

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**ΣΚΕΔΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΣΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΣΑ**

ΚΑΦΕΣΑΚΗ ΜΑΡΙΑ

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 1997

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

**ΣΚΕΔΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΣΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ ΣΕ ΤΥΧΑΙΑ ΜΕΣΑ**

ΚΑΦΕΣΑΚΗ ΜΑΡΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : Ε. Ν. ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗΣ : 17 / 2 / 1997

ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Οικονόμου Ελευθέριος Παπαδάκης Ιωάννης
Κελίρης Παντελής

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Οικονόμου Ελευθέριος Παπαδάκης Ιωάννης
Κελίρης Παντελής Σούκουλης Κώστας
Παπανικολάου Νικόλαος Τζανετάκης Παναγιώτης
Τσιρώνης Γεώργιος

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Στους γονείς μου
Σοφοκλή και Στέλλα

Ευχαριστίες

Τις πιο θερμές μου ευχαριστίες θέλω να εκφράσω στον επιδλέοντα καθηγητή μου Ελευθέριο Οικονόμου για τη διαρκή και με πάντα πρόθυμη διάθεση καθοδήγησή του. Οι πολύτιμες συμβουλές και η εποικοδομητική κριτική του, απόρροια της βαθιάς γνώσης και εμπειρίας του σε θέματα φυσικής, επέδρασαν αποφασιστικά στη διαμόρφωση του τρόπου σκέψης μου. Η συνεργασία μαζί του ήταν μια ανεκτίμητη εμπειρία για μένα.

Ενα μεγάλο ευχαριστώ επίσης οφείλω στον Μιχάλη Σιγάλα τόσο για τα προγράμματα του πάνω σε υπολογισμό δομής ζώνης ελαστικών κυμάτων όσο και για την πολύ χρήσιμη για μένα επικοινωνία που είχαμε όλα τα χρόνια εκπόνησης της διατριβής αυτής και τη βοήθεια του σε ότι αφορά την κατανόηση της κυματικής διάδοσης σε περιοδικά συστήματα.

Σε ότι αφορά την κατανόηση της κυματικής διάδοσης σε τυχαία συστήματα πολύτιμη υπήρξε η επικοινωνία με τον Kurt Busch. Τον ευχαριστώ όχι μόνο για τη βοήθειά του αλλά και για την ευγένεια και την προθυμία με την οποία ανταποκρινόταν στις ερωτήσεις μου.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω την επταμελή εξεταστική επιτροπή της διατριβής για τις εύστοχες παρατηρήσεις και υποδείξεις τους και ιδιαίτερα τον καθ. Κώστα Σούκουλη ο οποίος ήλθε στο Ηράκλειο ειδικά για την παρουσίαση και ο οποίος διάβασε το παρόν κείμενο και έκανε διορθώσεις.

Διορθώσεις σε τμήματα του κειμένου αυτού έκανε και ο φοιτητής Αλέξιος Κληρονόμος. Τον ευχαριστώ θερμά.

Για τη λύση καθημερινών υπολογιστικών προβλημάτων θα ήταν παράλειψη να μην αναφέρω τη βοήθεια του πάντα πρόθυμου Κοσμά Παπαχρήστου και των εργαζομένων στο υπολογιστικό κέντρο.

Ευχαριστώ επίσης θερμά τους φίλους και συμφοιτητές μου τόσο για τις χρήσιμες συζητήσεις που είχαμε όσο και για την ενθάρρυνση και συμπαράσταση τους. Τις ημέρες της συγγραφής της εργασίας ανεκτίμητη υπήρξε η βοήθεια και η συμπαράσταση της Κικής Χρυσούπουλου.

Ευχαριστώ τέλος το τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Κρήτης και το Ινστιτούτο Ηλεκτρονικής Δομής και Λείξεο του Ιδρύματος Τεχνολογίας και Έρευνας για την τεχνική και οικονομική υποστήριξη τα χρόνια των σπουδών μου. Το τμήμα Φυσικής, εκτός από οικονομική υποστήριξη, μου έδωσε και την ευκαιρία να αποκτήσω διδακτική εμπειρία συμμετέχοντας στην εκπαιδευτική διαδικασία σαν βοηθός σε ενδιαφέροντα μαθήματα και να ωφεληθώ από τις γνώσεις και την πείρα εξαιρετικών δασκάλων.

Περιεχόμενα

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Εισαγωγή | 1 |
| 1 Ακουστικά και ελαστικά κύματα - Εξισώσεις | 5 |
| 1.1 Θεμελιώδη μεγέθη και εξισώσεις της θεωρίας ελαστικότητας | 5 |
| 1.2 Κυματικές εξισώσεις | 6 |
| 1.3 Λύσεις της κυματικής εξίσωσης για ομογενή μέσα | 7 |
| 2 Σκέδαση ελαστικού κύματος από σφαίρα σαν μέσο πρόβλεψης της δομής ζώνης | 9 |
| 2.1 Εισαγωγή | 9 |
| 2.2 Βασικοί υπολογισμοί | 10 |
| 2.3 Αποτελέσματα | 15 |
| 2.3.1 Τυπικά χαρακτηριστικά της ενεργού διατομής | 15 |
| 2.3.2 Εξάρτηση της ενεργού διατομής από τις παραμέτρους των υλικών | 17 |
| 2.3.3 Σχετική θέση στενών ζωνών, χάσματος και συντονισμών της ενεργού διατομής | 19 |
| 2.3.4 Βέλτιστες συνθήκες για το χάσμα και ερμηνεία τους | 19 |
| 3 Ακουστικά και ελαστικά κύματα σε τυχαία μέσα - CPA | 23 |
| 3.1 Εισαγωγή | 23 |
| 3.2 Μακροσκοπικά χαρακτηριστικά της διάδοσης | 25 |
| 3.3 CPA | 27 |
| 3.3.1 Τυπική CPA | 28 |
| 3.3.2 CPA ενέργειας - Ταχύτητα ενέργειας | 34 |
| 3.4 Προσεγγιστικά αποτελέσματα | 39 |
| 3.4.1 Όριο χαμηλών συχνοτήτων | 39 |
| 3.4.2 Όριο χαμηλών συγκεντρώσεων | 40 |
| 3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα | 40 |
| 3.5.1 Σύγκριση απλής και coated CPA | 40 |
| 3.5.2 Τυπικές μορφές των χαρακτηριστικών της διάδοσης | 41 |
| 3.5.3 Ταχύτητα ενέργειας | 46 |
| Παραρτήματα | 49 |
| A Στοιχειώδη μεγέθη σε σφαιρικές συντεταγμένες | 51 |
| A.1 Τανυστής παραμόρφωσης, u_{ij} , σε σφαιρικές συντεταγμένες | 51 |
| A.2 Διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές | 51 |
| A.3 Τανυστής τάσης, σ_{ij} , σε σφαιρικές συντεταγμένες | 52 |

| | | |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| B | Σκέδαση από μια σφαίρα - υπολογισμοί | 53 |
| B.1 | Πλήρης προσδιορισμός του πεδίου | 53 |
| B.2 | Πυκνότητα ενέργειας | 55 |
| Γ | Σκέδαση από σύστημα δύο ομόκεντρων σφαιρών | 57 |
| Γ.1 | Πεδίο - Ενεργός διατομή σκέδασης | 57 |
| Γ.2 | Ενέργεια | 59 |
| Γ.3 | Αναλυτικός υπολογισμός του πεδίου | 59 |
| Δ | Δημοσιεύσεις (Publications) | 63 |
| Δ.1 | Interpretation of the Band Structure Results for Elastic and Acoustic Waves by Analogy with the LCAO Approach | 63 |
| Δ.2 | Elastic Wave Band Gaps in 3-D Periodic Polymer Matrix Composites . . . | 63 |
| Δ.3 | Elastic Waves in Periodic Composite Materials | 63 |
| Δ.4 | Acoustic Waves in Random Media | 63 |
| Δ.5 | Spectral gaps for Electromagnetic and Scalar waves: Possible explanation for certain differences | 63 |
| | Βιβλιογραφία | I |

Εισαγωγή

Η διάδοση κλασικών κυμάτων όπως τα ηλεκτρομαγνητικά, ακουστικά ή ελαστικά¹ κύματα σε περιοδικά και τυχαία μέσα έχει γίνει αντικείμενο ιδιαίτερου ενδιαφέροντος τα τελευταία χρόνια για πολλούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Από την πλευρά της φυσικής στερεάς κατάστασης το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στην ερώτηση για ύπαρξη ή όχι χάσματος² σε περιοδικά ή εντοπισμένων καταστάσεων σε τυχαία κλασικά συστήματα σε αναλογία με ότι συμβαίνει στα ηλεκτρόνια. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό μπορεί να οδηγήσει σε εφαρμογές ανάλογες με τις εφαρμογές των ηλεκτρονικών χασμάτων κι εντοπισμένων καταστάσεων στους ημιαγωγούς, εφαρμογές οι οποίες έχουν αποτελέσει την καρδιά της τεχνολογίας τα τελευταία χρόνια. Επιπλέον, η μελέτη των κλασικών συστημάτων παρουσιάζει βασικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τη μελέτη διάδοσης των ηλεκτρονίων.

Βασικό πλεονέκτημα είναι ότι τα κλασικά συστήματα αποτελούν περισσότερο “καθαρά” πειραματικά συστήματα σε σχέση με τα ηλεκτρόνια. Αυτό λόγω της απουσίας σύνθετων αλληλεπιδράσεων όπως αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-ηλεκτρονίου ή ηλεκτρονίων-φωτονίων, της έλλειψης ισχυρής εξάρτησης από τη θερμοκρασία και του γεγονότος ότι η συχνότητα του κλασικού κύματος μπορεί να καθοριστεί εξωτερικά εύκολα και με ακρίβεια.

Παρά το γεγονός όμως ότι τα κλασικά συστήματα είναι σχετικά “καθαρά” πειραματικά συστήματα ο εντοπισμός στην περίπτωση τους δεν είναι κάτι εκ των προτέρων εξασφαλισμένο. Συγκρίνοντας την βαθμωτή εξίσωση κύματος, $\nabla^2\phi + (\omega^2/c^2(\mathbf{r}))\phi = 0$, με την εξίσωση του Schrödinger, $\nabla^2\phi + 2(E - V(\mathbf{r}))\phi = 0$, μπορεί να δει κανείς ότι τα κλασικά κύματα είναι ισοδύναμα με κύματα ηλεκτρονίων ενέργειας, E , μεγαλύτερης από τη μέγιστη τιμή του δυναμικού $V(\mathbf{r})$. Σε αυτή την ενεργειακή περιοχή ο εντοπισμός των ηλεκτρονίων δεν φαίνεται να είναι εύκολος (αν και το πρόβλημα δεν έχει μελετηθεί πλήρως).

Η μελέτη των κλασικών κυμάτων ξεκίνησε από τα βαθμωτά κύματα³ που μελετήθηκαν κυρίως θεωρητικά τόσο σε περιοδικά όσο και σε τυχαία συστήματα σκεδαστών μέσα σε ομογενή μέσα. Βρέθηκε ότι οι βασικότερες παράμετροι για τον καθορισμό των χαρακτηριστικών της διάδοσης είναι η συγκέντρωση των σκεδαστών και ο λόγος της ταχύτητας διάδοσης του κύματος στους σκεδαστές προς την ταχύτητα διάδοσης στο περιβάλλον μέσο ενώ άλλες παράμετροι όπως η τοπολογία, το σχήμα των σκεδαστών κλπ. φάνηκαν να παίζουν επίσης ένα ρόλο.

Ακολούθησε η μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών (ΗΜ) κυμάτων, θεωρητικά δυσκολότερη λόγω του διανυσματικού χαρακτήρα. Ο διανυσματικός αυτός χαρακτήρας θεωρήθηκε υπεύθυνος για την μεγαλύτερη - σε σχέση με τα βαθμωτά

¹Με τον όρο ακουστικά δηλώνονται τα κύματα ελαστικότητας που διαδίδονται σε ρευστά ενώ ελαστικά τα κύματα στα στερεά.

²Ο όρος χάσμα δηλώνει και στην περίπτωση κλασικών συστημάτων περιοχές συχνότητων στις οποίες δεν υπάρχει διάδοση του κύματος.

³Λέγοντας βαθμωτά εννοούμε κύματα που ικανοποιούν τη βαθμωτή κυματική εξίσωση $\nabla^2\phi + (\omega^2/c^2)\phi = 0$.

- αντίσταση των ΗΜ κυμάτων στη δημιουργία χάσματος. Παρόλα αυτά βρέθηκαν τόσο υπολογιστικά όσο και πειραματικά περιοδικές δομές που εμφανίζουν αρκετά μεγάλα χάσματα. Στην περίπτωση διάδοσης σε τυχαία συστήματα ένα αξιοσημείωτο αποτέλεσμα (το οποίο θα συζητηθεί περισσότερο εκτεταμένα στο κεφάλαιο 3), τόσο για βαθμωτά όσο και για ηλεκτρομαγνητικά κύματα, αφορά την ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας. Η ταχύτητα αυτή βρέθηκε να μην ταυτίζεται ούτε με την ταχύτητα φάσης ούτε με την ταχύτητα ομάδας αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις να είναι πολύ μικρότερη κι από τις δύο.

Τελευταία στη σειρά και το βαθμό μελέτης τόσο από τους θεωρητικούς όσο κι από τους πειραματικούς φυσικούς έχουν μείνει τα ακουστικά και τα ελαστικά κύματα τα οποία αποτελούν και το αντικείμενο της παρούσας εργασίας.

Λόγοι που ώθησαν το ενδιαφέρον μας στη μελέτη των ακουστικών κι ελαστικών κυμάτων είναι τόσο οι πολλές εφαρμογές τους (σε μηχανική, ιατρική, κ.ο.κ) αλλά κυρίως η πλούσια φυσική τους. Τα ελαστικά κύματα είναι πλήρως διανυσματικά κύματα (εγκάρσια και διαμήκη) και μάλιστα με διαφορετική ταχύτητα διάδοσης μεταξύ της διαμήκους και της εγκάρσιας συνιστώσας. Οι δύο αυτές συνιστώσες ενώ διαδίδονται ανεξάρτητα σε ένα ομογενές μέσο αναμιγνύονται στην παρουσία ανομοιογένειας και εγκάρσιο κύμα μετατρέπεται σε διαμήκες κι αντίστροφα. Επιπλέον η διάδοση ακουστικών κι ελαστικών κυμάτων σε ένα μέσο είναι ένα πρόβλημα πλούσιο σε παραμέτρους αφού εξαρτάται τόσο από τις ταχύτητες διάδοσης όσο κι από την πυκνότητα του μέσου και μάλιστα με τρόπο με όχι άμεσα προβλέψιμες συνέπειες.

Ολη αυτή η πλούσια φυσική πέρα από πηγή ενδιαφέροντος όμως είναι και πηγή θεωρητικών δυσκολιών κι ένας από τους λόγους που έδωσαν στα ακουστικά κι ελαστικά κύματα τη μικρότερη προτεραιότητα στη σειρά μελέτης από τους θεωρητικούς φυσικούς. Επιπλέον λόγος για την όχι εκτεταμένη θεωρητική μελέτη είναι και τα περιορισμένα πειραματικά αποτελέσματα.

Όσον αφορά τα ήδη υπάρχοντα θεωρητικά αποτελέσματα τα περισσότερα από αυτά αφορούν διάδοση σε περιοδικά συστήματα. Η διάδοση σε περιοδικά συστήματα, λόγω της συμμετρίας και της υπολογιστικής εμπειρίας από τη μελέτη της ηλεκτρονικής δομής ζώνης, είναι ευκολότερο πρόβλημα σε σχέση με τη διάδοση σε τυχαία. Επιπλέον λόγος για την “προτίμηση” των περιοδικών συστημάτων είναι το γεγονός ότι από ένα περιοδικό σύστημα μπορεί κανείς να πάρει πληροφορίες για το τυχαίο σύστημα που προκύπτει από τη σταδιακή “τυχαιοποίηση” του περιοδικού.

Παρά το ότι ο πλήρως διανυσματικός χαρακτήρας των ελαστικών κυμάτων ήταν μια ένδειξη μεγαλύτερης - σε σχέση με τα άλλα κλασικά κύματα - αντίστασης στη δημιουργία χάσματος βρέθηκαν - υπολογιστικά - εξαιρετικά μεγάλα χάσματα για αρκετές περιπτώσεις περιοδικών δομών. Μελετήθηκε επίσης εκτεταμένα η εξάρτηση των χάσμάτων καθώς και των άλλων χαρακτηριστικών της δομής ζώνης (πχ. ιδιαίτερα στενές ζώνες) από παραμέτρους όπως συγκέντρωση σκεδαστών, πλεγματική δομή, αντίθεση πυκνοτήτων ή ταχυτήτων των υλικών (σκεδαστών-περιβάλλοντος μέσου) και υπολογίστηκαν οι βέλτιστες συνθήκες για την εμφάνιση χάσματος.

Τα υπολογιστικά αυτά αποτελέσματα πάνω στη διάδοση ακουστικών κι ελαστικών κυμάτων σε περιοδικά μέσα αποτελούν την αφετηρία και το κίνητρο για το πρώτο μέρος αυτής της εργασίας. Παίρνοντας υπόψη ότι ένας από τους μηχανισμούς

δημιουργίας του χάσματος είναι η σκέδαση από καθένα σκεδαστή μελετήθηκε η σκέδαση από μία μόνο σφαίρα θυθισμένη σε ομογενές μέσο και εξετάστηκε πώς και σε ποιο βαθμό αυτή η σκέδαση μπορεί να δώσει πρόβλεψη κι εξήγηση για τα χαρακτηριστικά της δομής ζώνης σε σύστημα περιοδικά τοποθετημένων όμοιων σφαιρών. Η μελέτη αυτή και τα αποτελέσματα αναφέρονται στο κεφάλαιο 2.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας αφορά μελέτη της διάδοσης τόσο ακουστικών όσο και ελαστικών κυμάτων σε διάφορα *τυχαία* συστήματα. Χρησιμοποιώντας διάφορες επεκτάσεις της γνωστής από το ηλεκτρονικό πρόβλημα μεθόδου Coherent Potential Approximation (CPA) και με αφορμή πρόσφατα πειράματα υπολογίζονται οι ταχύτητες ενέργειας και φάσης, η μέση ελεύθερη διαδρομή κι επίσης εξετάζεται η δυνατότητα εντοπισμού του κύματος στα διάφορα αυτά τυχαία συστήματα. Η μέθοδος και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 3.

Τέλος, στο κεφάλαιο 1 γίνεται μια σύντομη παρουσίαση θεμελιωδών μεγεθών κι εξισώσεων της θεωρίας ελαστικότητας τα οποία χρησιμοποιήθηκαν στην πορεία της εργασίας. Αναφέρονται οι κυματικές εξισώσεις εστιάζοντας στην εξίσωση διάδοσης ελαστικών κυμάτων σε *ομογενή* μέσα και τις λύσεις της.

1

Ακουστικά και ελαστικά κύματα - Εξισώσεις

1.1 Θεμελιώδη μεγέθη και εξισώσεις της θεωρίας ελαστικότητας

Κάτω από την επίδραση δυνάμεων τα σώματα σε κάποιο βαθμό παραμορφώνονται. Η παραμόρφωση αυτή των σωμάτων (τα οποία θεωρούνται σαν συνεχή, πλήρως ελαστικά μέσα) είναι το κεντρικό θέμα της θεωρίας ελαστικότητας.

Η μετατόπιση ενός σημείου λόγω παραμόρφωσης δίδεται από το διάνυσμα μετατόπισης, \mathbf{u} , με συνιστώσες [1]

$$u_i = x'_i - x_i \quad (1.1)$$

όπου x_i και x'_i οι συνιστώσες του διανύσματος θέσης, \mathbf{r} , πριν και μετά την παραμόρφωση αντίστοιχα.

Όταν ένα σώμα παραμορφώνεται η απόσταση μεταξύ γειτονικών σημείων του, dl , αλλάζει κατά τρόπο ώστε¹

$$(dl')^2 = (dl)^2 + 2u_{ij}dx_i dx_j \quad (1.2)$$

dl' είναι η απόσταση των θεωρούμενων σημείων στο παραμορφωμένο σώμα και u_{ij} είναι οι συνιστώσες του γνωστού στην θεωρία ελαστικότητας *τανυστή παραμόρφωσης* οι οποίες σε καρτεσιανές συντεταγμένες και για μικρές παραμορφώσεις δίδονται από²

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.3)$$

Εκτός του τανυστή παραμόρφωσης ένας άλλος θεμελιώδης στη θεωρία ελαστικότητας τανυστής είναι ο λεγόμενος *τανυστής τάσης*³. Ο τανυστής τάσης, σ_{ij} , συνδέεται με τον τανυστή παραμόρφωσης με τη γενική σχέση

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} u_{kl} \quad (1.4)$$

C_{ijkl} είναι ο *τανυστής ελαστικότητας*, χαρακτηριστικός του μέσου.

Για τοπικά ισοτροπικά μέσα ο C_{ijkl} μπορεί να γραφεί σαν⁴: $C_{ijkl} = \alpha \delta_{ik} \delta_{jl} + \beta \delta_{il} \delta_{jk} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}$ και η σχέση παραμόρφωσης-τάσης (Εξ.1.4) παίρνει τη μορφή

¹Σε όλη τη συζήτηση θεωρούμε άθροιση ως προς τους επαναλαμβανόμενους δείκτες.

²Για τις συνιστώσες του u_{ij} σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες δεξ αναφορά [1, σελ.3]. Οι συνιστώσες σε σφαιρικές συντεταγμένες αναφέρονται επίσης στο Παράρτημα Α.

³Τόσο ο u_{ij} όσο κι ο τανυστής τάσης είναι συμμετρικοί τανυστές.

⁴Οι $\delta_{ik} \delta_{jl}$, $\delta_{il} \delta_{jk}$ και $\delta_{ij} \delta_{kl}$ είναι οι μόνοι τανυστές τέταρτης τάξης που μένουν αναλλοίωτοι κάτω από στροφές κι ανακλάσεις του συστήματος συντεταγμένων.

$$\sigma_{ij} = 2\mu u_{ij} + \lambda u_{\ell\ell} \delta_{ij} \quad (1.5)$$

με $\mu = (\alpha + \beta)/2$. Οι συντελεστές $\lambda = \lambda(\mathbf{r})$ και $\mu = \mu(\mathbf{r})$ είναι οι λεγόμενοι συντελεστές Lamé του μέσου [1]. Ο μ εκφράζει την αντίσταση στις διατμητικές τάσεις ενώ ο συνδυασμός $B = \lambda + (2/3)\mu$ δίνει το υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας.

Μέσω του τανυστή τάσης η δύναμη ανά μονάδα όγκου, \mathbf{F} , σε μια περιοχή του παραμορφούμενου σώματος μπορεί να εκφραστεί σαν

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.6)$$

Ολοκληρώνοντας πάνω στον όγκο της περιοχής και μετατρέποντας το ολοκλήρωμα σε επιφανειακό εύκολα βρίσκει κανείς ότι η τάση, \mathbf{P} , πάνω σε ένα στοιχείο επιφάνειας της θεωρούμενης περιοχής εκφράζεται σαν

$$P_i = \sigma_{ij} n_j \quad (1.7)$$

με n_j τις συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου στο θεωρούμενο στοιχείο επιφάνειας.

Σημειώνουμε τέλος ότι η δυναμική ενέργεια ανά μονάδα όγκου του παραμορφούμενου σώματος, E_V , δίδεται από

$$E_V = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{ij} \quad (1.8)$$

ενώ η ροή ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας, \mathbf{J} , από τη σχέση⁵ [2]

$$J_i = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} \quad (1.9)$$

1.2 Κυματικές εξισώσεις

Παίρνοντας υπόψη τη σχέση 1.6 και τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα η γενική εξίσωση κίνησης για ένα ελαστικό μέσο μπορεί να γραφεί σαν [1, p.87]

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.10)$$

όπου $\rho = \rho(\mathbf{r})$ η πυκνότητα του μέσου.

Για την περίπτωση ισοτροπικών μέσων και αντικαθιστώντας το σ_{ij} από την αντίστοιχη έκφραση (Εξ. 1.5) η γενική εξίσωση κίνησης (Εξ.1.10) σε καρτεσιανές συντεταγμένες παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u^\ell}{\partial x_\ell} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \right] \right\}. \quad (1.11)$$

Η σχέση 1.11 είναι η γενική κυματική εξίσωση σε ισοτροπικό μέσο.

Για ρευστά, όπου η αντίσταση στη διάτμηση είναι μηδέν ($\mu = 0$), η εξίσωση 1.11 εισάγοντας την πίεση, $p = -\lambda \nabla \mathbf{u}$, παίρνει τη μορφή

⁵Τόσο για το E_V όσο και για το J_i , στη θέση των σ_{ij} , u_{ij} και u_j θεωρούνται τα πραγματικά μέρη των αντίστοιχων ποσοτήτων.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \lambda \nabla \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \quad (1.12)$$

Ομογενή μέσα : Στην περίπτωση *ομογενών μέσων*, δηλαδή μέσων με λ , μ , ρ = σταθερά, η γενική εξίσωση ελαστικού κύματος, Εξ.1.11, θεωρώντας χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{-i\omega t}$ μπορεί να γραφεί σαν [2, 3]

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0 \quad (1.13)$$

Θέτοντας $\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t$ όπου $\nabla \cdot \mathbf{u}_t = \nabla \times \mathbf{u}_l = 0$ δηλαδή χωρίζοντας το διάνυσμα παραμόρφωσης, \mathbf{u} , σε διαμήκη και εγκάρσια συνιστώσα (\mathbf{u}_l και \mathbf{u}_t αντίστοιχα) η Εξ.1.13 χωρίζεται σε δύο ανεξάρτητες διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz [2]

$$\nabla^2 \mathbf{u}_l + \frac{\omega^2}{c_l^2} \mathbf{u}_l = 0 \quad (1.14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{u}_t + \frac{\omega^2}{c_t^2} \mathbf{u}_t = 0 \quad (1.15)$$

Φυσική συνέπεια είναι η ύπαρξη για ομογενή μέσα *ασύζευκτων* διαμήκων και εγκάρσιων κυμάτων που διαδίδονται *ανεξάρτητα* με ταχύτητες

$$c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} \quad \text{για το διαμήκες} \quad \text{και} \quad c_t = \sqrt{\mu/\rho} \quad \text{για το εγκάρσιο} \quad ^6.$$

1.3 Λύσεις της κυματικής εξίσωσης για ομογενή μέσα

Με το χωρισμό του διανύσματος μετατόπισης σε διαμήκη και εγκάρσια συνιστώσα η λύση της εξίσωσης διάδοσης ελαστικού κύματος σε ομογενές μέσο (Εξ.1.13) ανάγεται τελικά στον υπολογισμό των λύσεων των δύο διανυσματικών εξισώσεων Helmholtz Εξ.1.14 και Εξ.1.15.

Σε ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων μια διανυσματική εξίσωση Helmholtz μπορεί να αναλυθεί σε τρεις βαθμωτές κυματικές εξισώσεις μια για κάθε συνιστώσα του προς υπολογισμό διανύσματος. Επειδή το ίδιο δεν είναι δυνατόν σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες οι προσπάθειες για γενικό τρόπο λύσης της 1.13 στράφηκαν στην προσπάθεια εύρεσης τριών ανεξάρτητων *διανυσματικών* λύσεων πράγμα εφικτό για τα περισσότερα συστήματα συντεταγμένων [3, 4].

Εστω συναρτήσεις ϕ , ψ και χ τέτοιες ώστε

$$(\nabla^2 + k_l^2)\phi = 0, \quad (\nabla^2 + k_t^2)(\psi, \chi) = 0 \quad (1.16)$$

με $k_l = \omega/c_l$ και $k_t = \omega/c_t$ και \mathbf{a} ένα σταθερό διάνυσμα. Μπορεί να δείξει κανείς εύκολα με αντικατάσταση ότι οι ανεξάρτητες διανυσματικές συναρτήσεις

$$\mathbf{l} = \frac{1}{k_l} \nabla \phi \quad \mathbf{m} = \nabla \times \mathbf{a} \psi \quad \mathbf{n} = \frac{1}{k_t} \nabla \times \nabla \times \mathbf{a} \chi \quad (1.17)$$

είναι λύσεις της Εξ.1.13. Η \mathbf{l} δίνει τη διαμήκη συνιστώσα του κύματος (λύση της 1.14) ενώ οι \mathbf{m} και \mathbf{n} την εγκάρσια (λύσεις της 1.15).

⁶Σημειώνεται ότι η ομογένεια του μέσου είναι *αναγκαία συνθήκη* για την ύπαρξη της ανεξαρτησίας μεταξύ της διαμήκους και της εγκάρσιας συνιστώσας του κύματος.

Σφαιρικές συντεταγμένες : Σε σφαιρικές συντεταγμένες $\mathbf{a} = {}^7\mathbf{r}$ και η λύση \mathbf{u} εκφράζεται συνήθως σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχειωδών λύσεων $\mathbf{l}_{\varepsilon nm}$, $\mathbf{m}_{\varepsilon nm}$ και $\mathbf{n}_{\varepsilon nm}$ [3, 2].

Οι στοιχειώδεις λύσεις $\mathbf{l}_{\varepsilon nm}$, $\mathbf{m}_{\varepsilon nm}$ και $\mathbf{n}_{\varepsilon nm}$ (διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές) είναι οι λύσεις που προέρχονται (με βάση τις εξισώσεις 1.17) από θαθμωτές συναρτήσεις⁸ της μορφής

$$\varphi_{\varepsilon nm} = R_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin} m\phi \quad (1.18)$$

όπου $n \in [0, \infty)$, $m \in [0, n]$, R_n συνάρτηση Bessel, $k = k_l$ για τις διαμήκεις λύσεις ($\mathbf{l}_{\varepsilon nm}$) και $k = k_t$ για τις εγκάρσιες ($\mathbf{m}_{\varepsilon nm}$, $\mathbf{n}_{\varepsilon nm}$) ενώ τα e, o δηλώνουν τις άρτιες (even) και τις περιττές (odd) αντίστοιχα σφαιρικές αρμονικές.

Οι αναλυτικές εκφράσεις των $\mathbf{l}_{\varepsilon nm}$, $\mathbf{m}_{\varepsilon nm}$ και $\mathbf{n}_{\varepsilon nm}$ αναφέρονται στο παράρτημα Α.

⁷Το \mathbf{r} δεν είναι σταθερό διάνυσμα αλλά αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση των σφαιρικών συντεταγμένων δίνει ανεξάρτητες λύσεις με τη διαμήκη λύση, \mathbf{l} , κάθετη στην επιφάνεια σφαιράς με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

⁸Λύσεις της θαθμωτής εξίσωσης Helmholtz.

2

Σκέδαση ελαστικού κύματος από σφαίρα σαν μέσο πρόβλεψης της δομής ζώνης

2.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή της εργασίας τα περισσότερα από τα ήδη υπάρχοντα αποτελέσματα πάνω στη διάδοση ακουστικών κι ελαστικών κυμάτων αφορούν διάδοση σε περιοδικά συστήματα [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. Περισσότερο εκτεταμένα έχει μελετηθεί η διάδοση σε συστήματα σφαιρικών σκεδαστών περιοδικά τοποθετημένων σε ελαστικό μέσο. Διαπιστώθηκε η δυνατότητα ύπαρξης σε πολλές περιπτώσεις μεγάλων χασμάτων και μελετήθηκαν οι συνθήκες που ευνοούν την ύπαρξη αυτή. Μερικά από τα βασικά συμπεράσματα [8, 9] που διατυπώθηκαν είναι ότι η εμφάνιση χάσματος ευνοείται από (i) συγκέντρωση σφαιρών: 10 - 50%, (ii) στις περισσότερες περιπτώσεις μικρό λόγο διαμήκους προς εγκάρσια ταχύτητα (c_l/c_t) για τις σφαίρες και το περιβάλλον μέσο¹, (iii) μεγάλες ταχύτητες για το περιβάλλον μέσο (c_o), μικρές ταχύτητες για το υλικό των σφαιρών (c_i) - για σταθερή πυκνότητα παντού στο σύστημα - και (iv) μικρός λόγος ρ_o/ρ_i για στερεά ενώ μεγάλος λόγος ρ_o/ρ_i για υγρά όπου ρ_o η πυκνότητα του μέσου και ρ_i η πυκνότητα του υλικού των σφαιρών. Διαπιστώθηκε επίσης μια σχετική ανεξαρτησία των βασικών χαρικών της δομής ζώνης (χάσματα και πολύ στενές ζώνες²) τόσο από τη συγκέντρωση των σκεδαστών (σφαιρών) όσο κι από την πλεγματική δομή. Τέλος, ένα πρόσφατο μη αναμενόμενο αποτέλεσμα είναι ο υπολογισμός αξιοσημείωτα μεγάλων χασμάτων σε συστήματα σφαιρών από μέταλλο μεγάλης πυκνότητας, περιοδικά τοποθετημένων σε πλαστικά (υλικά χαμηλής πυκνότητας) όπως epoxy, PMMA κοκ. [10, 11, 12] παρά το ότι η αντίθεση ταχυτήτων, c_o/c_i , σ' αυτά τα συστήματα είναι σχεδόν ανύπαρκτη. Τα χάσματα αυτά βρέθηκαν να είναι πολύ μεγαλύτερα από χάσματα που υπολογίστηκαν σε συστήματα με τον ίδιο λόγο πυκνοτήτων μεταξύ σκεδαστών και περιβάλλοντος και μεγαλύτερο λόγο ταχυτήτων c_o/c_i .

Η προσπάθεια να κατανοηθούν τα παραπάνω αποτελέσματα και να βρεθεί ένας απλός τρόπος πρόβλεψης τους και πρόβλεψης κατάλληλων για δημιουργία χάσματος υλικών οδήγησε στη μελέτη της σκέδασης από μια μόνο σφαίρα³ [10, 11, 13] η οποία αποτελεί και το πρώτο μέρος της παρούσας εργασίας.

Η σκέδαση από μία σφαίρα έχει το πλεονέκτημα ότι αποτελεί ένα φυσικό σύστημα

¹Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να έχει ο λόγος c_l/c_t σε μέσα χωρίς απορρόφηση (ώστε οι σταθερές Lamé να είναι θετικοί αριθμοί) είναι $\sqrt{2}$. Η εξάρτηση του χάσματος από το c_l/c_t σε πολλές περιπτώσεις είναι αρκετά σύνθετη κι όχι πολύ καθαρή.

²Οι "στενές ζώνες" παράγουν κορυφές στην πυκνότητα καταστάσεων.

³Η σκέδαση από μία μόνο σφαίρα μαζί με την πολλαπλή σκέδαση και καταστροφική συμβολή των σκεδαζομένων κυμάτων ευθύνεται για την εμφάνιση του χάσματος.

που μπορεί να μελετηθεί σχετικά εύκολα, χωρίς ανάγκη μεγάλου υπολογιστικού χρόνου και μνήμης και που λόγω της απλότητας του δίνει δυνατότητα φυσικής ερμηνείας των αποτελεσμάτων. Επιπλέον, η σχετική ανεξαρτησία των βασικών χαρακτηριστικών της δομής ζώνης τόσο από τη συγκέντρωση των σκεδαστών όσο κι από την πλεγματική δομή είναι μια ισχυρή ένδειξη για το ότι ο ρόλος της στον καθορισμό των χαρ/κών της δομής ζώνης στο αντίστοιχο περιοδικό σύστημα (σύστημα των περιοδικά τοποθετημένων όμοιων σφαιρών) είναι κυρίαρχος.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι μελέτη της σκέδασης από μία σφαίρα στην περίπτωση των βαθμωτών κυμάτων [14] κατάφερε να δώσει εκτίμηση τόσο για το μέγεθος όσο και για τη θέση του χάσματος (για τα ΗΜ κύματα ανάλογη μελέτη οδήγησε σε αποτελέσματα λιγότερο “καθαρά” λόγω του διανυσματικού χαρακτήρα των κυμάτων αυτών).

Η μελέτη της σκέδασης από μια μόνο σφαίρα, γίνεται εδώ μέσω υπολογισμού και ανάλυσης της ενεργού διατομής σκέδασης. Η βασική ιδέα είναι ο έλεγχος για πιθανή σύνδεση των συντονισμών της ενεργού διατομής με τις πολύ στενές ζώνες και τα χάσματα της δομής ζώνης ελέγχοντας έτσι την πιθανή επέκταση της γνωστής από το ηλεκτρονικό περιοδικό πρόβλημα ιδέας του LCAO (γραμμικός συνδυασμός ατομικών τροχιακών) στην περίπτωση των ακουστικών κι ελαστικών κυμάτων με τους συντονισμούς να παίζουν το ρόλο των ιδιοκαταστάσεων. Συνδέοντας τους συντονισμούς της ενεργού διατομής με τα χαρακτηριστικά της δομής ζώνης οι συνθήκες για ύπαρξη χάσματος μπορούν να μετατραπούν σε συνθήκες για την ενεργό διατομή και να δοθεί μια φυσική ερμηνεία για τις συνθήκες αυτές.

Στην προσπάθεια επέκτασης της ιδέας του LCAO στην περίπτωση των ακουστικών κι ελαστικών κυμάτων θα πρέπει να σημειωθούν δυο σημαντικές διαφορές σε σχέση με τα ηλεκτρόνια που κάνουν το πρόβλημα μη τετριμμένο. Το ότι (i) οι συντονισμοί δεν είναι πραγματικές ιδιοκαταστάσεις πλήρως εντοπιζόμενες⁴ και (ii) εκτός από το κανάλι διάδοσης μέσω των συντονισμών υπάρχει και η δυνατότητα διάδοσης μέσω του υλικού που περιβάλλει τις σφαίρες το οποίο μπορεί να υποστηρίξει κύματα για κάθε τιμή της συχνότητας.

Για τη σύνδεση της ενεργού διατομής με τα χαρακτηριστικά της δομής ζώνης στα πλαίσια της παρούσας δουλειάς α) εξετάστηκε η εξάρτηση της ενεργού διατομής από παραμέτρους του προβλήματος που επηρεάζουν την εμφάνιση χάσματος και συγκρίθηκε με την εξάρτηση του χάσματος από τις ίδιες παραμέτρους, β) η θέση του χάσματος και των πολύ στενών ζωνών συνδέθηκε με τη θέση των συντονισμών της ενεργού διατομής και γ) οι βέλτιστες για την εμφάνιση χάσματος συνθήκες εκφράστηκαν σαν συνθήκες πάνω στην ενεργό διατομή κι έγινε μια προσπάθεια φυσικής ερμηνείας των συνθηκών αυτών. Στην παρουσίαση που ακολουθεί, πριν την αναφορά των κυριότερων αποτελεσμάτων η οποία γίνεται στο υποκεφάλαιο 2.3, αναφέρονται συνοπτικά οι βασικότεροι υπολογισμοί.

2.2 Βασικοί υπολογισμοί

Το κύριο μέρος των υπολογισμών αυτού του κεφαλαίου αφορά υπολογισμό ενεργού διατομής σκέδασης, πλατών σκέδασης και υπολογισμό ενέργειας όταν Α) διαμήκες

⁴Σβήνουν πολύ αργά (σαν $1/r$) για $r \rightarrow \infty$.

και B) εγκάρσιο επίπεδο κύμα σκεδάζεται από ελαστική σφαίρα θυθισμένη σε ελαστικό μέσο.

Σαν μαθηματικό πρόβλημα η μελέτη της σκέδασης από μια σφαίρα είναι αρκετά παλιό. Ο υπολογισμός της ενεργού διατομής σκέδασης έγινε για πρώτη φορά από τους Yiang και Tuell το 1956 [15, 2, 16, 17]. Πολλή δουλειά πάνω στη σκέδαση από μια σφαίρα έχει γίνει επίσης από τους Brill, Gaunaurd, και Überall οι οποίοι μελέτησαν κυρίως τα πλάτη σκέδασης [18, 19, 20, 21, 22, 23]. Μερικά από τα συμπεράσματα τους θα αναφερθούν και θα χρησιμοποιηθούν στην πορεία της παρουσίασης αυτού του κεφαλαίου.

Ο λόγος που βασικοί υπολογισμοί επαναλήφθηκαν κι αναφέρονται εδώ είναι από τη μια για να παρουσιαστούν με ένα ενιαίο τρόπο για την περίπτωση διαμήκους κι εγκάρσιου προσπίπτοντος κύματος κι από την άλλη λόγω τυπογραφικών λαθών στην υπάρχουσα βιβλιογραφία.

Οι υπολογισμοί που αναφέρονται αφορούν την περίπτωση σφαίρας (ακτίνας a) από ελαστικό στερεό με παραμέτρους: ρ_i (πυκνότητα), c_{li} , c_{ti} (διαμήκης και εγκάρσια ταχύτητα αντίστοιχα), τοποθετημένης σε επίσης στερεό ελαστικό μέσο με αντίστοιχες παραμέτρους ρ_o , c_{lo} , c_{to} . Περιπτώσεις όπως π.χ. ρευστά και σκληρή ή άδεια σφαίρα, υπολογιστικά, μπορούν να θεωρηθούν σαν οριακές περιπτώσεις της παραπάνω.

Εστω η περίπτωση (A) όπου *διαμήκες* κύμα της μορφής

$$\mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k}_{lo}\mathbf{r})} \hat{\mathbf{z}}, \quad k_{lo} = \omega/c_{lo} \quad (2.1)$$

που διαδίδεται κατά μήκος του $\hat{\mathbf{z}}$ άξονα προσπίπτει στην επιφάνεια της σφαίρας⁵.

Βάση όλων των υπολογισμών είναι ο προσδιορισμός του σκεδαζόμενου κύματος⁶, \mathbf{u}^{sc} , και του κύματος στο εσωτερικό της σφαίρας, \mathbf{u}^{in} . Πρώτο βήμα είναι η ανάπτυξη του προσπίπτοντος κύματος στη βάση των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών \mathbf{l}_{enm} , \mathbf{m}_{enm} , \mathbf{n}_{enm} που ορίστηκαν στο κεφάλαιο 1. Το \mathbf{u}^{inc} σαν συνάρτηση των \mathbf{l}_{enm} , \mathbf{m}_{enm} και \mathbf{n}_{enm} μπορεί να γραφεί σαν⁷ [3]

$$\mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) (-i) \mathbf{l}_{en0}(j, k_{lo}) \quad (2.2)$$

όπου j η σφαιρική συνάρτηση Bessel πρώτου είδους [24] με όρισμα $k_{lo}r$ και $i = \sqrt{-1}$.

Παίρνοντας υπόψη ότι η σφαίρα διατηρεί τις συμμετρίες του προσπίπτοντος και απαιτώντας ξεχωριστό σφαιρικό κύμα μακριά από την επιφάνεια της και πεδίο καλά ορισμένο παντού στο εσωτερικό της⁸, το σκεδαζόμενο κύμα, \mathbf{u}^{sc} , και το εσωτερικό πεδίο, \mathbf{u}^{in} , μπορούν να γραφούν σαν [15]

$$\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) [A_{en0} \mathbf{l}_{en0}(h, k_{lo}) + C_{en0} \mathbf{n}_{en0}(h, k_{to})] \quad (2.3)$$

και

⁵Η αρχή του συστήματος συντεταγμένων τοποθετείται στο κέντρο της σφαίρας.

⁶Το κύμα στην περιοχή έξω από τη σφαίρα είναι άθροισμα του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου κύματος.

⁷Ο διαμήκης χαρακτήρας υπαγορεύει μόνο λύσεις \mathbf{l}_{nm} ενώ η συμμετρία γύρω από τον $\hat{\mathbf{z}}$ περιορίζει σ' αυτές με $m = 0$.

⁸Οι συνθήκες αυτές καθορίζουν τη συνάρτηση Bessel.

$$\mathbf{u}^{in}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) [E_{en0} \mathbf{l}_{en0}(j, k_{lj}) + G_{en0} \mathbf{n}_{en0}(j, k_{tj})] \quad (2.4)$$

όπου h η σφαιρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους [24] και $k_{lj} = \omega/c_{lj}$, $k_{tj} = \omega/c_{tj}$ ($j = o, i$). Οι συντελεστές $A_{en0}, C_{en0}, E_{en0}, G_{en0}$ υπολογίζονται (βλέπε παράρτημα Β) με εφαρμογή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, $r = a$, οι οποίες θα συζητηθούν παρακάτω.

Στην περίπτωση (Β) όπου εγγάρσιο επίπεδο κύμα πολωμένο στον $\hat{\mathbf{x}}$ άξονα που διαδίδεται κατά μήκος του $\hat{\mathbf{z}}$ άξονα προσπίπτει στην επιφάνεια της σφαίρας

$$\mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r}) = e^{i(\mathbf{k}_{to}\mathbf{r})} \hat{\mathbf{x}} = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [\mathbf{m}_{on1}(j, k_{to}) - i \mathbf{n}_{en1}(j, k_{to})] \quad (2.5)$$

Το σκεδαζόμενο κύμα σ' αυτή την περίπτωση δίδεται από [2]

$$\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [A_{en1} \mathbf{l}_{en1}(h, k_{lo}) + B_{on1} \mathbf{m}_{on1}(h, k_{to}) + C_{en1} \mathbf{n}_{en1}(h, k_{to})] \quad (2.6)$$

ενώ το κύμα στο εσωτερικό της σφαίρας από

$$\mathbf{u}^{in}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [E_{en1} \mathbf{l}_{en1}(j, k_{lj}) + F_{on1} \mathbf{m}_{on1}(j, k_{tj}) + G_{en1} \mathbf{n}_{en1}(j, k_{tj})] \quad (2.7)$$

Οι συντελεστές $A_{en1}, B_{on1}, C_{en1}, E_{en1}, F_{on1}$ και G_{en1} προσδιορίζονται κι εδώ (βλέπε παράρτημα Β) από εφαρμογή συνοριακών συνθηκών στην επιφάνεια της σφαίρας.

Συνοριακές συνθήκες [2] : Η πρώτη συνοριακή συνθήκη προκύπτει από την απαίτηση η σφαίρα και το περιβάλλον μέσο που βρίσκονται σε επαφή να συνεχίσουν να βρίσκονται σε επαφή σε κάθε χρονική στιγμή. Μαθηματικά αυτό εκφράζεται με τη συνέχεια του διανύσματος μετατόπισης, \mathbf{u} , πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, $r = a$

$$\mathbf{u}^{inc}|_{r=a} + \mathbf{u}^{sc}|_{r=a} = \mathbf{u}^{in}|_{r=a} \quad (2.8)$$

Η συνθήκη 2.8 στην πιο γενική περίπτωση (σφαίρα από ελαστικό στερεό σε στερεό ελαστικό μέσο) οδηγεί σε τρεις εξισώσεις μία για κάθε συνιστώσα του \mathbf{u} .

Δεύτερη συνθήκη είναι η συνέχεια του διανύσματος της τάσης πάνω στην επιφάνεια

$$\mathbf{P}^{inc}|_{r=a} + \mathbf{P}^{sc}|_{r=a} = \mathbf{P}^{in}|_{r=a} \quad (2.9)$$

Παίρνοντας υπόψη το ότι οι συνιστώσες της τάσης δίδονται από $P_i = \sigma_{ij} n_j$ (δες. Εξ.1.7) με μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια της σφαίρας ($\hat{\mathbf{n}}$) το διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ η 2.9 οδηγεί στις συνθήκες

$$\begin{aligned} (\sigma_{rr}^{inc} + \sigma_{rr}^{sc})_{r=a} &= (\sigma_{rr}^{in})_{r=a} \\ (\sigma_{\theta r}^{inc} + \sigma_{\theta r}^{sc})_{r=a} &= (\sigma_{\theta r}^{in})_{r=a} \\ (\sigma_{\phi r}^{inc} + \sigma_{\phi r}^{sc})_{r=a} &= (\sigma_{\phi r}^{in})_{r=a} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Στην περίπτωση που ο σκεδαστής είναι άπειρα σκληρή σφαίρα ($\rho, \lambda, \mu \rightarrow \infty, c_l, c_t \rightarrow 0$) ή άδεια σφαίρα ($\rho, \lambda, \mu, c_l, c_t \rightarrow 0$) όπου το πεδίο στο εσωτερικό είναι μηδέν και επίσης στην περίπτωση όπου κάποιο από τα δύο υλικά είναι ρευστό και άρα δεν υποστηρίζει εγκάρσια κύματα, λιγότερες από έξι εξισώσεις είναι αρκετές για τον προσδιορισμό του πεδίου παντού στο χώρο. Στην περίπτωση της *άπειρα σκληρής σφαίρας* η αδυναμία παραμόρφωσης επιβάλλει τη χρήση της εξίσωσης 2.8 πάνω στην επιφάνεια με το δεξιό μέλος μηδέν. Στην περίπτωση της *άδειας σφαίρας* η αδυναμία του σκεδαστή να ασκεί τάσεις επιβάλλει τη χρήση των εξισώσεων 2.9 με το δεξιό μέλος επίσης μηδέν. Τέλος στην περίπτωση που είτε ο σκεδαστής είτε το περιβάλλον μέσο είναι ρευστό οι συνοριακές συνθήκες είναι η συνέχεια της κάθετης στην επιφάνεια μετατόπισης και τάσης (u_r, σ_{rr}), κι ο μηδενισμός των εγκάρσιων τάσεων ($\sigma_{\theta r}, \sigma_{\phi r}$) πάνω στην επιφάνεια.

Ενεργός διατομή : Η ενεργός διατομή σκέδασης ορίζεται σαν ο λόγος της σκεδαζόμενης ροής ενέργειας προς την προσπίπτουσα ροή ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας. Για την περίπτωση προσπίπτοντος κύματος που διαδίδεται κατά τον $\hat{\mathbf{z}}$ άξονα και σκεδάζεται στην επιφάνεια σφαίρας τοποθετημένης στην αρχή των αξόνων αυτό εκφράζεται μαθηματικά σαν [13, 11]

$$\sigma = \frac{\int \langle J_r^{sc} \rangle r^2 d\Omega}{\langle J_z^{inc} \rangle} \quad \text{για } r \rightarrow \infty \quad (2.11)$$

όπου

$$\langle J_i \rangle = \langle \Re(\sigma_{ij}^{sc}) \Re(\dot{u}_j^{sc}) \rangle = -\frac{1}{2} \omega \Im([\sigma_{ij}]^* u_j) \quad (2.12)$$

Το σύμβολο \dot{u}_j δηλώνει τη χρονική παράγωγο του u_j , το σύμβολο $\langle \rangle$ μέση τιμή ως προς χρόνο ενώ τα \Re, \Im πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα μιγαδικού αριθμού. Το τελευταίο μέλος της 2.12 προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη τη χρονική εξάρτηση του κύματος ($\sigma, \mathbf{u} \sim e^{-i\omega t}$).

Για την περίπτωση του διαμήκους προσπίπτοντος κύματος της εξίσωσης 2.1 η ενεργός διατομή, σ_l , (αντικαθιστώντας στους τύπους 2.12 και 2.11 τις αντίστοιχες εκφράσεις για τα u_j και σ_{ij} -δες παράρτημα Α) υπολογίζεται σαν [15, 13]

$$\hat{\sigma}_l = \frac{\sigma_l}{\pi a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 4(2n+1) \left[\frac{|A_{en0}|^2}{|Z_{l0}|^2} + n(n+1) \left(\frac{Z_{l0}}{Z_{t0}} \right) \frac{|C_{en0}|^2}{|Z_{t0}|^2} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\sigma}_l(n) \quad (2.13)$$

με $Z_{l0} = k_{l0}a$, $Z_{t0} = k_{t0}a$ και $\hat{\sigma}_l(n)$ αδιάστατη *μερική* ενεργός διατομή οφειλόμενη στη συνεισφορά του του n^{ov} σφαιρικού κύματος.

Για εγκάρσιο προσπίπτον κύμα (Εξ.2.5) η αντίστοιχη της 2.13 έκφραση για την ενεργό διατομή, σ_t , είναι [2, 13]

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\sigma_t}{\pi a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2(2n+1) \left[\frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{Z_{t0}}{Z_{l0}} \right) \frac{|A_{en1}|^2}{|Z_{l0}|^2} + \frac{|B_{on1}|^2}{|Z_{t0}|^2} + \frac{|C_{en1}|^2}{|Z_{t0}|^2} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\sigma}_t(n) \quad (2.14)$$

Στους δύο αμέσως προηγούμενους τύπους (2.13, 2.14) ο όρος που περιέχει τον συντελεστή A_{en} δίνει το διαμήκες σκεδαζόμενο κύμα ενώ οι όροι που περιέχουν τους B_{on} και C_{en} το εγκάρσιο.

Το άπειρα αθροίσματα των 2.13 και 2.14, υπολογιστικά, στα πλαίσια της παρούσας δουλειάς, προσεγγίζονται με πεπερασμένα χρησιμοποιώντας κριτήριο που συγκρίνει κάθε όρο του αθροίσματος ($\hat{\sigma}(n)$) με το άθροισμα των προηγούμενων όρων. Για χαμηλές συχνότητες ($Z_l, Z_t < 2$) τρεις έως τέσσερις όροι στο άθροισμα είναι αρκετοί να δώσουν ικανοποιητική ακρίβεια ενώ σε όλους τους υπολογισμούς 20 όροι είναι οι περισσότεροι που έχουν χρησιμοποιηθεί.

Αξίζει να αναφερθεί τέλος ότι στο όριο των χαμηλών συχνοτήτων (Rayleigh σκέδαση) τόσο η σ_l όσο και η σ_t τείνουν στο μηδέν σαν ω^4 .

Πλάτη σκέδασης: Τα πλάτη σκέδασης, $\mathbf{f}_l, \mathbf{f}_t$, τα οποία δίνουν πληροφορίες για την γωνιακή κατανομή του σκεδαζόμενου κύματος ορίζονται και στην περίπτωση των ελαστικών κυμάτων όπως και στην περίπτωση των ηλεκτρονίων από την έκφραση του σκεδαζόμενου πεδίου μακριά από την επιφάνεια του σκεδαστή⁹

$$\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_l(\theta, \phi) \frac{e^{ik_l r}}{r} + \mathbf{f}_t(\theta, \phi) \frac{e^{ik_t r}}{r} \quad \text{για } r \rightarrow \infty \quad (2.15)$$

Διαφορές με τα ηλεκτρόνια είναι (i) η ύπαρξη στην περίπτωση των ελαστικών κυμάτων δύο πλατών σκέδασης πού αντιστοιχούν το ένα (\mathbf{f}_l) σε διαμήκεις σκεδαζόμενο κύμα και το άλλο (\mathbf{f}_t) σε εγκάρσιο και (ii) ότι τα πλάτη σκέδασης είναι στην περίπτωση αυτή διανύσματα (με $\mathbf{f}_l = f_l \hat{\mathbf{r}}$ και $\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_t = 0$). Για χαμηλές συχνότητες ($\omega \rightarrow 0$) το πραγματικό μέρος των $\mathbf{f}_l, \mathbf{f}_t$ τείνει στο μηδέν σαν ω^2 ενώ το φανταστικό σαν¹⁰ ω^5 .

Οπτικό θεώρημα: Από την απαίτηση διατήρησης της ολικής ενέργειας προκύπτει και στην περίπτωση των ελαστικών κυμάτων το επίσης γνωστό από τα ηλεκτρόνια οπτικό θεώρημα το οποίο συνδέει τα πλάτη σκέδασης με την ενεργό διατομή [25].

Για προσπίπτον διαμήκεις κύμα που διαδίδεται κατά τον $\hat{\mathbf{z}}$ άξονα η μαθηματική του έκφραση είναι

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k_{l0}} \Im[f_{ll}]_{\theta=0} = \pi a^2 \sum_{n=0}^{\infty} 4(2n+1) \frac{\Im[A_{en0}]}{Z_{l0}^2} \quad (2.16)$$

όπου ο πρώτος δείκτης στο πλάτος σκέδασης δηλώνει την πόλωση του προσπίπτοντος κύματος και ο δεύτερος την πόλωση του σκεδαζόμενου¹¹. Για εγκάρσιο προσπίπτον κύμα, πολωμένο στον $\hat{\mathbf{x}}$ άξονα

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k_{t0}} \Im[\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_{tt}]_{\theta=0} = \pi a^2 \sum_{n=1}^{\infty} 2(2n+1) \frac{\Im[C_{en1} - iB_{on1}]}{Z_{t0}^2} \quad (2.17)$$

Ενέργεια: Η πυκνότητα ενέργειας σε κάθε περιοχή του χώρου είναι άθροισμα πυκνότητας κινητικής ενέργειας, E_T και πυκνότητας δυναμικής ενέργειας, E_V (δες

⁹Τα πλάτη σκέδασης, γενικά, είναι συνάρτηση του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου κυματανύσματος ($\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$). Για ελαστική σκέδαση (ίσο μέτρο, k , προσπίπτοντος, \mathbf{k} , και σκεδαζόμενου, \mathbf{k}' , κυματανύσματος) και \mathbf{k} κατά τον $\hat{\mathbf{z}}$ άξονα, τα πλάτη σκέδασης γίνονται συνάρτηση του k και των γωνιών θ και ϕ (αφού η διεύθυνση του \mathbf{k}' ταυτίζεται μ'εκείνη του \mathbf{r}).

¹⁰Εξαιρέση αποτελεί η περίπτωση στην οποία ο σκεδαστής είναι άπειρα σκληρή σφαίρα. Εκεί τόσο το παραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος των πλατών σκέδασης τείνει στο μηδέν σαν ω .

¹¹ f_{ll} δηλαδή είναι το πλάτος σκέδασης διαμήκους σκεδαζόμενου κύματος που προέρχεται από διαμήκεις προσπίπτον.

Εξ.1.8) με

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{1}{2} \rho \Re(\dot{u}_i) \Re(\dot{u}_i) \\ E_V &= \frac{1}{2} \Re(\sigma_{ij}) \Re(u_{ij}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Παίρονοντας υπόψη την χρονική εξάρτηση του κύματος, εκφράζοντας τα πραγματικά μέρη μέσω των αντίστοιχων μιγαδικών ποσοτήτων και παίρονοντας χρονική μέση τιμή, η ολική πυκνότητα ενέργειας, $\langle E(\mathbf{r}) \rangle$, μπορεί να γραφεί σαν¹²

$$\langle E(\mathbf{r}) \rangle = \langle E_T \rangle + \langle E_{V_1} \rangle + \langle E_{V_2} \rangle = \frac{1}{4} \rho \omega^2 u_i u_i^* + \frac{1}{4} \lambda u_{ii} u_{jj}^* + \frac{1}{2} \mu u_{ij} u_{ij}^* \quad (2.19)$$

Ο υπολογισμός του $\langle E(\mathbf{r}) \rangle$ για το σύστημα σφαίρα σε ομογενές μέσο και σκέδαση διαμήκους κι εγκάρσιου κύματος αναφέρεται αναλυτικά στο παράρτημα Β.

2.3 Αποτελέσματα

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου το πρώτο δήμα για τη σύνδεση των χαρακτηριστικών της δομής ζώνης με τους συντονισμούς της ενεργού διατομής είναι η μελέτη της παράλληλης εξάρτησης τους από τις παραμέτρους του προβλήματος. Πριν προχωρήσουμε στα αποτελέσματα της συγκριτικής μελέτης αυτής της εξάρτησης θα αναφέρουμε συνοπτικά μερικά από τα τυπικά χαρ/κα της ενεργού διατομής τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στην περαιτέρω ανάλυση.

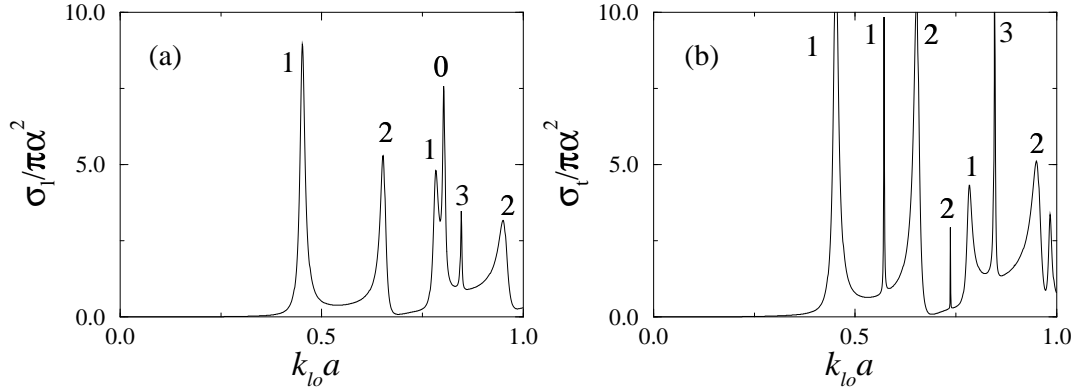
2.3.1 Τυπικά χαρακτηριστικά της ενεργού διατομής

Μια τυπική μορφή ενεργού διατομής σκέδασης φαίνεται στο Σχ.2.1 Το Σχ.2.1(a) δείχνει την ενεργό διατομή για προσπίπτον διαμήκες κύμα ενώ το Σχ.2.1(b) για εγκάρσιο στην περίπτωση “σκληρών” στερεών με $c_l/c_t \approx \sqrt{2}$. Η ενεργός διατομή όπως φαίνεται στο Σχ.2.1 αποτελείται από οξείς συντονισμούς με μια περιοχή ασθενέστερης σκέδασης ανάμεσα σ’ αυτούς. Οι συντονισμοί αυτοί παρατηρούνται όταν η συχνότητα του προσπίπτοντος κύματος συμπίπτει με κάποια από τις ιδιοταλαντώσεις της σφαίρας. Καθένας από τους συντονισμούς είναι συνεισφορά ενός σφαιρικού μερικού κύματος (n) το οποίο δηλώνεται στο Σχ.2.1 με ένα αριθμό δίπλα ή πάνω από τον αντίστοιχο συντονισμό. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση εγκάρσιου προσπίπτοντος κύματος δεν υπάρχει συντονισμός προερχόμενος από το $n = 0$ σφαιρικό κύμα το οποίο είναι μόνο διαμήκες¹³ κι επίσης ότι το μεγαλύτερο μέρος της σκεδαζόμενης ενέργειας είναι με μορφή εγκάρσιου κύματος.

Οι συντονισμοί για πρόσπτωση διαμήκους κύματος (Σχ.2.1(a)) (εξαιρώντας αυτούς που προέρχονται από το $n = 0$) συμπίπτουν σε θέση με συντονισμούς για πρόσπτωση εγκάρσιου (Σχ.2.1(b)). Οι συμπίπτοντες αυτοί συντονισμοί είναι συνεισφορά των

¹²Στην εξίσωση 2.19 υπάρχει ένας προς ένα αντιστοιχία των όρων του μεσαίου με τους όρους του δεξιού μέλους.

¹³Το $n = 0$ (σφαιρικά συμμετρικό) κύμα αντιστοιχεί σε σφαιρικά συμμετρική ταλάντωση της σφαίρας η οποία δεν μπορεί να διεγερθεί από το εγκάρσιο προσπίπτον κύμα όπως φαίνεται από την Εξ.2.5.



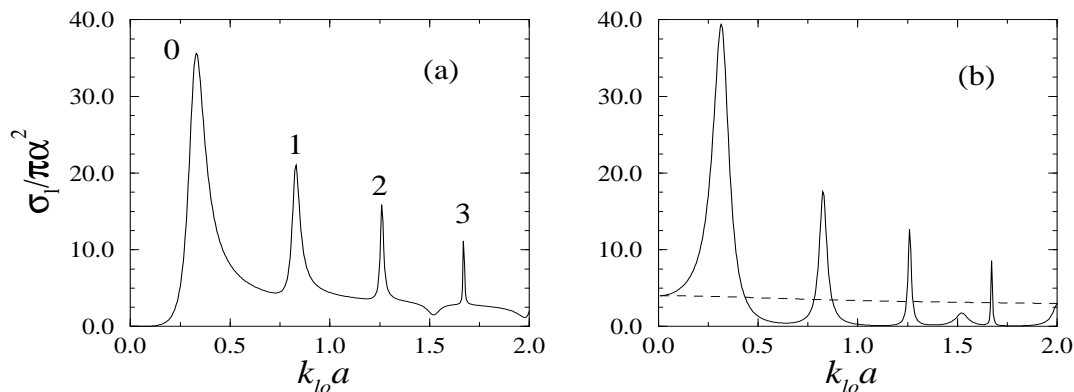
Σχ. 2.1: Ολική ενεργός διατομή για διαμήκεις (a) κι εγκάρσιο (b) προσπίπτον κύμα. $c_l/c_s = 2^{1/2}$ για τη σφαίρα και το περιβάλλον μέσο, $\rho_o/\rho_i = 1$ και $c_{l_o}/c_{l_i} = 5.48$. a είναι η ακτίνα της σφαίρας και $k_{l_o} = \omega/c_{l_o}$ ο διαμήκης κυματάριθμος στο περιβάλλον μέσο. Ο αριθμός δίπλα ή πάνω από κάθε συντονισμό δηλώνει την υπεύθυνη για την προέλευσή του σφαιρική αρμονική.

ίδιων μερικών κυμάτων όπως φαίνεται από τους αριθμούς στο Σχ.2.1 και μάλιστα της **1** και **n** συνιστώσας τους. Στην περίπτωση εγκάρσιου προσπίπτοντος κύματος υπάρχουν επιπλέον συντονισμοί (προερχόμενοι από την **m** συνιστώσα) οι οποίοι στις περισσότερες περιπτώσεις υλικών είναι πολύ οξείς (δες. πχ. τον δεύτερο και τέταρτο συντονισμό του Σχ.2.1(b)). Τέτοιοι οξείς συντονισμοί αντιστοιχούν σε πολύ μεγάλη συγκέντρωση ενέργειας στο εσωτερικό της σφαίρας σε σχέση με τη σκεδαζόμενη πυκνότητα ενέργειας. Αντίθετα πιο ευρείς συντονισμοί συνοδεύονται από μεγαλύτερη εκροή ενέργειας από το εσωτερικό της σφαίρας στο εξωτερικό της.

Στην περίπτωση του Σχ.2.1 όπως και σε κάθε περίπτωση στην οποία το περιβάλλον μέσο είναι “σκληρό” στερεό ($c_l/c_t \rightarrow \sqrt{2}$) ο πρώτος συντονισμός προέρχεται από το σφαιρικό κύμα με $n = 1$. Αντίθετα στις περιπτώσεις στις οποίες το περιβάλλον μέσο είναι ρευστό η πρώτη κορυφή στην ενεργό διατομή οφείλεται στο $n = 0$ κύμα. Μια τέτοια περίπτωση είναι εκείνη του Σχ.2.2(a) όπου εικονίζεται μια τυπική μορφή ενεργού διατομής σκέδασης από σφαίρα θυθισμένη σε υγρό. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι όταν είτε η σφαίρα είτε το περιβάλλον μέσο είτε και τα δύο είναι ρευστά, οι διαδοχικοί $(\nu + 1, \nu)$ συντονισμοί της κάθε μερικής ενεργού διατομής $\sigma_l(n)$ απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση τέτοια ώστε $[d/\lambda_{l_i}]_{\nu+1} - [d/\lambda_{l_i}]_{\nu} = 1$ ($\lambda_{l_i} = 2\pi/k_{l_i}$, $d = 2a$)¹⁴

Αναφέρουμε τέλος ένα αξιοσημείωτο αποτέλεσμα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση βασικών αποτελεσμάτων: Όταν η σφαίρα είναι σχετικά κοντά σε παραμέτρους στην άπειρα σκληρή (ή άδεια) σφαίρα το κάθε πλάτος σκέδασης, f_j ($j = l, s$), μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα δύο συμβαλλόμενων όρων [18, 19, 20, 21, 22, 23]. Ο πρώτος όρος ($f_j(0)$) ταυτίζεται με το πλάτος σκέδασης άπειρα σκληρής (ή άδειας) σφαίρας θυθισμένης στο περιβάλλον μέσο. Αυτός ο όρος αντιστοιχεί σε σκέδαση από το σύνορο της σφαίρας ανεξάρτητα από το υλικό της. Στις περιοχές συχνοτήτων που κυριαρχεί δεν υπάρχει σημαντική εισροή κύματος μέσα στη σφαίρα

¹⁴ Αν εξαιρέσει κανείς τους συντονισμούς που προέρχονται από την **m** συνιστώσα του κύματος ισχύει το ίδιο και για τις $\sigma_t(n)$ όταν σφαίρα από υγρό είναι θυθισμένη σε στερεό ελαστικό μέσο.



Σχ. 2.2: (a) : Ενεργός διατομή για σκέδαση κύματος από σφαίρα από υγρό θυθισμένη σε υγρό περιβάλλον μέσο με $c_{l_o}/c_{l_i} = 3$, $\rho_o/\rho_i = 3$ και $c_{s_o} = c_{s_i} = 0$. (b) : Ενεργός διατομή για σκέδαση από κενή σφαίρα θυθισμένη στο ίδιο με το (a) περιβάλλον μέσο (διακεκομμένη γραμμή) και ενεργός διατομή που προκύπτει αν από το πλάτος σκέδασης της σφαίρας από υγρό αφαιρέσουμε το πλάτος σκέδασης της κενής σφαίρας (συνεχής γραμμή). a : ακτίνα σφαίρας $k_{l_o} = \omega/c_{l_o}$ ο κυματάριθμος στο περιβάλλον μέσο. Ο αριθμός δίπλα ή πάνω από κάθε συντονισμό δηλώνει την υπεύθυνη για την προέλευσή του σφαιρική αρμονική.

όπως πιστοποιείται από υπολογισμούς της πυκνότητας ενέργειας στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Ο δεύτερος όρος ($f_j - f_j(0)$) δίνει μια ακολουθία συντονισμών καλά χωρισμένων από περιοχές σχεδόν μηδενικής σκέδασης. Οι συντονισμοί αυτοί είναι χαρακτηριστικοί του υλικού της σφαίρας και αντιστοιχούν σε συχνότητες μέγιστης απορρόφησης του κύματος από το υλικό αυτό. Λαμβάνοντας υπόψη το οπτικό θεώρημα αντίστοιχες με τα πλάτη σκέδασης εικόνες έχουμε και για την ενεργό διατομή σκέδασης με μια τυπική εικόνα το Σχ.2.2(b).

2.3.2 Εξάρτηση της ενεργού διατομής από τις παραμέτρους των υλικών

Η συγκριτική εξάρτηση χάσματος και ενεργού διατομής σκέδασης από παραμέτρους όπως λόγο ταχυτήτων των υλικών, λόγο πυκνοτήτων και σκληρότητα (c_l/c_t), παρουσιάζεται εκτεταμένα στο παράρτημα Δ. Σε ότι ακολουθεί επιχειρείται μια συνοπτική αναφορά των κυριότερων αποτελεσμάτων.

Εξάρτηση από τον λόγο ταχυτήτων c_{l_o}/c_{l_i} : Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου το χάσμα (απουσία διαφοράς πυκνοτήτων και κρατώντας σταθερή την σκληρότητα, c_l/c_t , των υλικών) ευνοείται από την αύξηση του λόγου c_{l_o}/c_{l_i} . Αυξάνοντας το c_{l_o}/c_{l_i} για τιμές μεγαλύτερες από μονάδα το χάσμα αν υπάρχει γίνεται όλο και ευρύτερο φτάνοντας μια τιμή κορεσμού. Αντίθετα ελάττωση του λόγου c_{l_o}/c_{l_i} σε τιμές μικρότερες από μονάδα ενώ επίσης συνεπάγεται αύξηση της διαφοράς ανάμεσα στα δυο υλικά δεν φαίνεται να ευνοεί την εμφάνιση χάσματος.

Όσον αφορά την ενεργό διατομή, για $c_{l_o}/c_{l_i} > 1$ δηλαδή σκεδαστή χαμηλής ταχύτητας σε υψηλής ταχύτητας περιβάλλον μέσο, η αύξηση του c_{l_o}/c_{l_i} προκαλεί¹⁵ (i) την εμφάνιση ολοένα και πιο οξείων (υψηλότερων και στενότερων) συντονισμών, (ii) οι συντονισμοί αυτοί έχουν την τάση να έρχονται κοντύτερα σε θέση ο ένας

¹⁵Κρατώντας σταθερή τη σκληρότητα (c_l/c_t) τόσο της σφαίρας όσο και του περιβάλλοντος μέσου.

στον άλλο και να μετακινούνται σε χαμηλότερες συχνότητες και (iii) ελαττώνεται η σκέδαση στις περιοχές συχνοτήτων ανάμεσα στους συντονισμούς (υπόδαθρο).

Για $c_{i0}/c_{li} < 1$, η ελάττωση του c_{i0}/c_{li} παρά το ότι αυξάνει τη διαφορά ανάμεσα σε σφαίρα και περιβάλλον μέσο δεν προκαλεί αισθητή αλλαγή στην ενεργό διατομή η οποία παραμένει χαμηλή σε τιμές και ομαλή στην εξάρτησή της από τη συχνότητα.

Η διαφορά αυτή μεταξύ των περιπτώσεων $c_{i0}/c_{li} < 1$ και $c_{i0}/c_{li} > 1$ δεν είναι απρόσμενη αν σκεφτεί κανείς ότι σκεδαστές με χαμηλή ταχύτητα διάδοσης αντιστοιχούν σε βαθειά πηγάδια δυναμικού στην εξίσωση Schrödinger. Όπως είναι γνωστό βαθύ πηγάδι δυναμικού στο ηλεκτρονικό πρόβλημα συνεπάγεται έντονους συντονισμούς στην ενεργό διατομή.

Όπως επίσης φαίνεται από τα παραπάνω, έντονες κορυφές στη σκέδαση από μία σφαίρα ευνοούν την ύπαρξη χάσματος στο σύστημα των περιοδικά τοποθετημένων όμοιων σφαιρών.

Εξάρτηση από το λόγο πυκνοτήτων ρ_o/ρ_i : Όσον αφορά την εξάρτηση της ενεργού διατομής από το λόγο ρ_o/ρ_i η αύξηση αυτού του λόγου για υγρά συνεπάγεται αξιοσημείωτη αύξηση της ενεργού διατομής σκέδασης. Η πιο δραματική αύξηση συμβαίνει στον πρώτο συντονισμό ο οποίος όπως έχει αναφερθεί είναι συνεισφορά του $n = 0$ σφαιρικού κύματος και στο υπόδαθρο (σκέδαση στην περιοχή συχνοτήτων ανάμεσα στους συντονισμούς) το οποίο επίσης είναι συνεισφορά του $n = 0$ κύματος. Για στερεά αντίθετα η αύξηση του λόγου ρ_o/ρ_i συνεπάγεται ελάττωση και του ύψους και του εύρους των συντονισμών. Οι συντονισμοί στην περίπτωση αυτή ευνοούνται από σφαίρα υψηλής πυκνότητας σε χαμηλής πυκνότητας περιβάλλον μέσο.

Η εξάρτηση της ενεργού διατομής από το λόγο των πυκνοτήτων συγκρινόμενη με την αναφερθείσα στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου εξάρτηση του χάσματος από τον ίδιο λόγο δείχνει επίσης ότι εντονότερες κορυφές στην ενεργό διατομή συνεπάγονται μεγαλύτερο χάσμα. Μένει να κατανοηθεί η πηγή της διαφοράς μεταξύ στερεών κι υγρών στην εξάρτηση από το λόγο των πυκνοτήτων. Η διαφορά αυτή μπορεί να κατανοηθεί αν σκεφτεί κανείς ότι στην περίπτωση των υγρών και η πρώτη κορυφή της ενεργού διατομής και το υπόδαθρο οφείλονται αποκλειστικά στη συνεισφορά του $n = 0$ μερικού κύματος η οποία είναι σχεδόν ανύπαρκτη στην περίπτωση των “σκληρών” στερεών (σε στερεά λόγω του μεγάλου c_t η σκέδαση εγκάρσιου κύματος κυριαρχεί στην ενεργό διατομή). Η $n = 0$ αυτή σκέδαση που αντιστοιχεί σε σφαιρικά συμμετρικές ταλαντώσεις της σφαίρας μεγιστοποιείται με την αύξηση του λόγου ρ_o/ρ_i μια και σφαίρα από όχι πυκνό υλικό μέσα σε υγρό μπορεί να δώσει εντονότερες ιδιοταλαντώσεις και άρα εντονότερη σκέδαση σε σχέση με σφαίρα από πυκνό υλικό.

Εξάρτηση από την σκληρότητα των υλικών c_{i0}/c_{t0} και c_{li}/c_{ti} : Όσον αφορά την εξάρτηση της ενεργού διατομής από την σκληρότητα της σφαίρας, c_{li}/c_{ti} , και του περιβάλλοντος μέσου, c_{i0}/c_{t0} , αξίζει να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν φάνηκαν να είναι πολύ πιο ευαίσθητα στην σκληρότητα του περιβάλλοντος μέσου απ’ ότι στη σκληρότητα της σφαίρας. Έτσι η περίπτωση σφαίρας από υγρό σε στερεό (υγρό) μέσο δίνει πολύ παρόμοια ενεργό διατομή με την περίπτωση σφαίρας από στερεό σε στερεό (υγρό) μέσο (όταν ο λόγος ταχυτήτων και πυκνοτήτων των δύο υλικών είναι ο ίδιος). Ανάλογα, αναμένεται και για το χάσμα η ίδια σχετική έλλειψη ευαισθησίας στη σκληρότητα των σκεδαστών σε σχέση με την ευαισθησία στη σκληρότητα του περιβάλλοντος τους.

2.3.3 Σχετική θέση στενών ζωνών, χάσματος και συντονισμών της ενεργού διατομής

Σε όλες τις περιπτώσεις υλικών που είχαν μελετηθεί αρχικά (με συγκέντρωση σκεδαστών 10-60%) και που έδειξαν να εμφανίζουν ένα χάσμα, το χάσμα αυτό δρέθηκε να είναι περίπου στο μέσο μεταξύ πρώτου και δεύτερου συντονισμού της ενεργού διατομής με το εύρος του πολύ μικρότερο από την απόσταση των δύο αυτών κορυφών. Οι στενές ζώνες σε όλες τις περιπτώσεις δρέθηκαν να είναι πολύ κοντά στους συντονισμούς ενώ η ταύτιση τους με τους συντονισμούς είναι τόσο μεγαλύτερη όσο πιο στενή είναι η ζώνη.

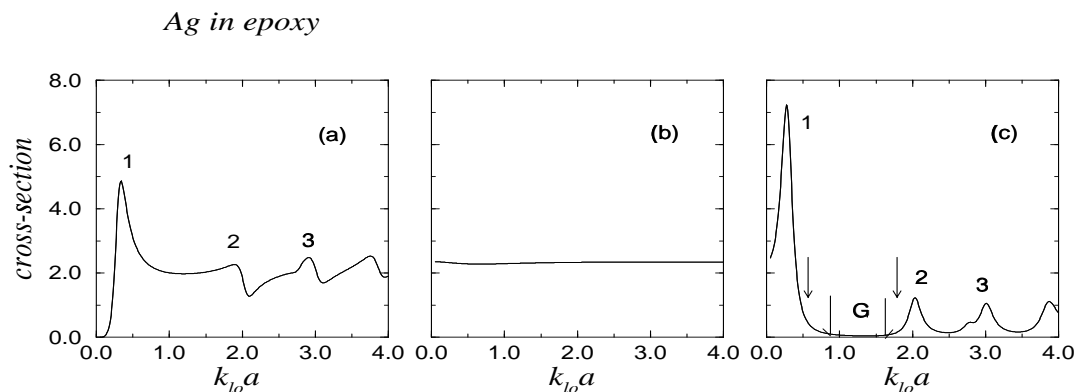
Εκτεταμένη μελέτη της θέσης του χάσματος και των στενών ζωνών σαν συνάρτηση της συγκέντρωσης των σκεδαστών έδειξε ότι η πρώτη εμφάνιση του χάσματος (σε πολύ χαμηλές συγκεντρώσεις) συμβαίνει πολύ κοντά στον πρώτο συντονισμό. Όσο η συγκέντρωση αυξάνει το χάσμα απομακρύνεται από το συντονισμό πλησιάζοντας το μέσο δυο διαδοχικών κορυφών, θέση στην οποία σταθεροποιείται μέχρι την εξαφάνιση του (για μεγάλες συγκεντρώσεις) ενώ στενές ζώνες εμφανίζονται πολύ κοντά στους συντονισμούς. Τα αποτελέσματα αυτά είναι πολύ παρόμοια με αντίστοιχα αποτελέσματα στην περίπτωση θαμνωτών κυμάτων [14] και απόλυτα συνεπή με τη βασική ιδέα του LCAO. Σε χαμηλές συγκεντρώσεις η εμφάνιση του χάσματος πολύ κοντά σε ένα συντονισμό μπορεί να αποδοθεί στο ότι στις συγκεντρώσεις αυτές η διάδοση του κύματος γίνεται κυρίως μέσω του περιβάλλοντος μέσου και οι σκεδαστές απλώς αποτελούν εμπόδιο για αυτή τη διάδοση. Άρα το χάσμα εμφανίζεται στην περιοχή έντονης σκέδασης από καθένα σκεδαστή. Όσο η συγκέντρωση αυξάνει οι καταστάσεις συντονισμού γειτονικών σφαιρών αλληλοεπικαλύπτονται δίνοντας ζώνες διάδοσης και προσφέροντας έτσι στο κύμα ένα άλλο κανάλι διάδοσης, προτιμητέο σ' αυτή την περιοχή συγκεντρώσεων (όπου η διάδοση μέσω του περιβάλλοντος μέσου είναι περισσότερο δύσκολη). Έτσι το χάσμα κινείται προς την περιοχή συχνοτήτων ανάμεσα στους συντονισμούς ενώ η θέση των συντονισμών ταυτίζεται με τη θέση των στενών ζωνών του συστήματος (υβριδισμός ή απώθηση των ιδιοκαταστάσεων είναι πιθανοί λόγοι για τους οποίους δεν υπάρχει ακριβής ταύτιση μεταξύ στενών ζωνών και συντονισμών).

Τα παραπάνω αποτελέσματα αναφέρονται περισσότερο αναλυτικά και πιστοποιούνται με διαγράμματα στο παράρτημα Δ.

2.3.4 Βέλτιστες συνθήκες για το χάσμα και ερμηνεία τους

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου ένα αξιοσημείωτο και μη αναμενόμενο αποτέλεσμα της μελέτης της δομής ζώνης είναι το ότι ενώ το χάσμα απουσία διαφοράς πυκνοτήτων ευνοείται από μεγάλο λόγο c_{l0}/c_{li} , στην παρουσία διαφοράς πυκνοτήτων δρέθηκαν πολύ μεγαλύτερα χάσματα σε υλικά με λόγο ταχυτήτων πολύ κοντά στη μονάδα απ' ότι σε υλικά με μεγάλο λόγο c_{l0}/c_{li} (με τον λόγο των πυκνοτήτων τον ίδιο και στις δύο περιπτώσεις). Ρεαλιστικές περιπτώσεις τέτοιων συστημάτων είναι σφαίρες από βαρύ μέταλλο (πχ. Ag, χάλυβα) περιοδικά τοποθετημένες σε πλαστικό (πχ. epoxy, PMMA).

Τυπική μορφή της ενεργού διατομής στην περίπτωση αυτών των μεγάλων χασμάτων δρέθηκε να είναι αυτή του Σχ.2.3(a). Η ενεργός διατομή αποτελείται από έντονους (υψηλούς κι ευρείς) συντονισμούς, σχετικά απομακρυσμένους μεταξύ τους, με μια



Σχ. 2.3: (a) : Ενεργός διατομή για σκέδαση διαμήκους κύματος από σφαίρα από άργυρο δυθισμένη σε epoxy. (b) : Ενεργός διατομή για σκέδαση από άπειρα σκληρή σφαίρα δυθισμένη σε epoxy. (c) : Ενεργός διατομή που προκύπτει αν από το πλάτος σκέδασης της σφαίρας από άργυρο αφαιρέσουμε το πλάτος σκέδασης της άπειρα σκληρής σφαίρας. a : ακτίνα σφαίρας, $k_{l_0} = \omega/c_{l_0}$ ο διαμήκης κυματάριθμος στο epoxy. Ο αριθμός δίπλα ή πάνω από κάθε συντονισμό δηλώνει την υπεύθυνη για την προέλευσή του σφαιρική αρμονική. Τα βέλη στο (c) δείχνουν τη θέση των στενών ζωνών ενώ το διπλό βέλος που πλαισιώνει το γράμμα G δείχνει τα όρια του μέγιστου χάσματος στο *fcc* περιοδικό πρόβλημα σφαιρών από άργυρο σε epoxy.

περιοχή ισχυρής σκέδασης ανάμεσα σ' αυτούς. Η σκέδαση στην περιοχή ανάμεσα στους συντονισμούς (υπόδαθρο) οφείλεται σχεδόν αποκλειστικά σε συνεισφορά της άπειρα σκληρής σφαίρας (δες υποκεφάλαιο 2.3.1) όπως φαίνεται στο Σχ.2.3(c) όπου η συνεισφορά αυτή έχει αφαιρεθεί και οι συντονισμοί αναδεικνύονται καθαρά. Το χάσμα κι εδώ (δες Σχ.2.3(c)) εμφανίζεται στην περιοχή ανάμεσα στους συντονισμούς ενώ στενές ζώνες διάδοσης εμφανίζονται κοντά σ' αυτούς.

Μετά από συστηματική μελέτη αποδείχτηκε ότι οποτεδήποτε στην ενεργό διατομή σκέδασης εμφανίζονται έντονες κορυφές, σχετικά απομακρυσμένες, χωρισμένες από υψηλό υπόδαθρο λόγω συνεισφοράς άπειρα σκληρής σφαίρας, εμφανίζεται μεγάλο χάσμα στη δομή ζώνης του αντίστοιχου περιοδικού συστήματος.

Το παραπάνω αξιοσημείωτο αποτέλεσμα μπορεί να κατανοηθεί αν δεχθεί κανείς την ύπαρξη δύο οριακών καναλιών διάδοσης όπως έχει ήδη συζητηθεί. Το ένα κανάλι είναι μέσω του περιβάλλοντος τις σφαίρες μέσω ενώ το άλλο πηγαινόντας από κάθε σφαίρα στις γειτονικές της μέσω των αλληλοεπικαλυπτόμενων καταστάσεων συντονισμού τους (στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται και τα δύο κανάλια).

Στην περιοχή ανάμεσα στους συντονισμούς, όπου η σκέδαση οφείλεται στην άπειρα σκληρή σφαίρα, κανένα από τα δύο αυτά κανάλια δεν είναι προσβάσιμο. Το κύμα δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει τις σφαίρες για τη διάδοσή του αφού και δεν μπορεί να τις διαπεράσει εύκολα κι ούτε υπάρχει συντονισμός κοντά. Επίσης δεν μπορεί να χρησιμοποιήσει το περιβάλλον μέσω λόγω της ισχυρής σκέδασης. Έτσι γίνεται εύκολη η δημιουργία χάσματος σε αυτή την περιοχή. Επιπλέον, η μεγάλη απόσταση των συντονισμών (λόγω έλλειψης διαφοράς ταχυτήτων) επιτρέπει ένα αρκετά μεγάλο

εύρος του χάσματος¹⁶. Στην περιοχή των συντονισμών από την άλλη, το μεγάλο εύρος τους (πράγμα που δείχνει μεγάλη εκροή ενέργειας από το εσωτερικό της σφαίρας στο εξωτερικό της και άρα εύκολη αλληλοεπικάλυψη μεταξύ των συντονισμών γειτονικών σφαιρών) κάνει προτιμητέα τη διάδοση του κύματος μέσω των σφαιρών δίνοντας ζώνες διάδοσης όπως φαίνεται στο Σχ.2.3(c).

Τα παραπάνω, σε συνδυασμό με το ρόλο του c_o/c_i που συζητήθηκε στο υποκεφάλαιο 2.3.2, δείχνουν ότι ο λόγος που ευνοεί η μικρή διαφορά ταχυτήτων στις περιπτώσεις συστημάτων όπου υπάρχει ήδη διαφορά στις παραμέτρους των υλικών λόγω των πυκνοτήτων είναι ότι από τη μία δίνει ισχυρό υπόδαθρο λόγω άπειρα σκληρής σφαίρας (αν προσέξει κανείς τόσο την αντίθεση πυκνοτήτων όσο και την αντίθεση ταχυτήτων και σταθερών Lamé μπορεί να δει ότι σφαίρα από βαρύ μέταλλο σε ελαφρύ υλικό με το λόγο c_o/c_i όχι μεγάλο είναι κοντύτερα σε παραμέτρους στη άπειρα σκληρή σφαίρα θυθισμένη στο ίδιο υλικό) επιτρέποντας το άνοιγμα του χάσματος κι από την άλλη κρατά τους συντονισμούς μακριά επιτρέποντας στο χάσμα να γίνει αρκετά ευρύ.

Θα πρέπει να αναφέρουμε τέλος ότι, σύμφωνα με τα παραπάνω, κάποιος θα περίμενε μεγάλο χάσμα σε περιπτώσεις ενεργού διατομής που αποτελείται από υψηλούς κι ευρείς συντονισμούς χωρισμένους από υψηλό υπόδαθρο λόγω συνεισφοράς *άδειας σφαίρας*. Αυτό θα μπορούσε να συμβεί για σφαίρα χαμηλής πυκνότητας και ταχύτητας σε υψηλής πυκνότητας και ταχύτητας περιβάλλον μέσο με το περιβάλλον μέσο να είναι ρευστό. Λόγω του μεγάλου όμως του υψηλού c_o/c_i που απαιτείται για την μεγαλύτερη συνεισφορά της *άδειας σφαίρας* στο υπόδαθρο, οι συντονισμοί της ενεργού διατομής σ' αυτή την περίπτωση δεν θα είναι αρκετά απομακρυσμένοι. Δεν πιστεύουμε έτσι ότι η περίπτωση αυτή ευνοεί ένα αρκετά ευρύ χάσμα.

¹⁶Υπενθυμίζεται ότι το εύρος του χάσματος είναι μικρότερο από την απόσταση ανάμεσα στους συντονισμούς.

3

Ακουστικά και ελαστικά κύματα σε τυχαία μέσα - CPA

3.1 Εισαγωγή

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η μελέτη της διάδοσης κλασικών κυμάτων σε τυχαία μέσα - μέσα στα οποία σκεδαστές είναι τυχαία τοποθετημένοι σε ομογενές υλικό - έχει γίνει αντικείμενο ιδιαίτερου ενδιαφέροντος τα τελευταία χρόνια για τους φυσικούς στερεάς κατάστασης λόγω της σύνδεσής της με το γνωστό από τα ηλεκτρόνια πρόβλημα του εντοπισμού. Η μελέτη αυτή βασίζεται στον υπολογισμό μακροσκοπικών χαρακτηριστικών της διάδοσης όπως ταχύτητα φάσης, ομάδας κι ενέργειας (c_{ph} , v_g και v_E αντίστοιχα), μέση ελεύθερη διαδρομή σκέδασης, l_s , και μεταφοράς, l_t , παράμετρος εντοπισμού, $kl_s = (\omega/c_{ph})l_s$, κοκ.

Παρά τις αντιστοιχίες με το ηλεκτρονικό πρόβλημα, οι οποίες δίνουν δυνατότητα προσανατολισμού στο πρόβλημα των κλασικών κυμάτων και πιθανής πρόβλεψης και κατανόησης αποτελεσμάτων, υπάρχουν βασικές διαφορές μεταξύ κλασικών κυμάτων και ηλεκτρονίων και ο έλεγχος για το αν οι διαφορές αυτές αποτελούν πηγή νέας φυσικής έδωσε ώθηση στο ενδιαφέρον. Οι διαφορές έγκεινται *i*) στη γραμμική σχέση διασποράς των κλασικών κυμάτων σε ομογενή μέσα - η οποία πηγάζει από την δεύτερη τάξη της χρονικής παραγωγού στην κυματική εξίσωση, *ii*) στο γεγονός ότι το δυναμικό στην περίπτωση των κλασικών κυμάτων είναι συνάρτηση της συχνότητας¹, ω και *iii*) στο ότι οι κλασικοί σκεδαστές δεν είναι σημειακοί αλλά μακροσκοπικά σώματα.

Η διάδοση σε τυχαία μέσα έχει μελετηθεί εκτεταμένα τόσο για βαθμωτά όσο και για ηλεκτρομαγνητικά (HM) κύματα (για μια ανασκόπηση δεξ αναφορές [26, 27, 28, 29]). Έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι, οι περισσότερες βασισμένες σε θεωρίες φαινομένου μέσου (effective medium theories) και ιδιαίτερα σε επεκτάσεις της - γνωστής από το ηλεκτρονικό πρόβλημα - “προσέγγισης σύμφωνου δυναμικού” (CPA : Coherent Potential Approximation) [30, 29]. Η CPA, η οποία υπολογίζει ένα ομογενές φαινόμενο μέσο σαν προσέγγιση των μέσων ιδιοτήτων του τυχαίου, έδωσε πολύ καλά - συγκρινόμενα με το πείραμα - αποτελέσματα τόσο για βαθμωτά όσο και για ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Έχουν μελετηθεί επίσης τα όρια ισχύος των διαφόρων θεωριών και προσεγγίσεων και έχει συζητηθεί εκτεταμένα το φυσικό νόημα των χαρακτηριστικών μεγεθών της διάδοσης [29, 31].

Από πειραματική άποψη το πιο ενδιαφέρον αποτέλεσμα προήλθε από μετρήσεις του συντελεστή διάχυσης, $D (= v_E l_t / 3)$, για διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων [32, 33]. Οι μετρήσεις αυτές έδειξαν ότι η ταχύτητα ενέργειας, v_E , η οποία είναι η

¹ $\nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{c^2(r)} \phi = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi + \frac{\omega^2}{c_0^2} \phi + \omega^2 [\frac{1}{c^2(r)} - \frac{1}{c_0^2}] \phi = 0.$

σωστή ταχύτητα για την περιγραφή της διάδοσης της ενέργειας σε ένα τυχαίο μέσο, δεν ταυτίζεται εν γένει ούτε με την ταχύτητα φάσης ούτε με την ταχύτητα ομάδας. Για χαμηλές συγκεντρώσεις σκεδαστών η v_E βρέθηκε να είναι μικρότερη από τις προηγούμενες δύο ιδιαίτερα σε συχνότητες κοντά στις συχνότητες συντονισμού του ενός σκεδαστή ενώ σε υψηλότερες συγκεντρώσεις η εξάρτηση της από τη συχνότητα φάνηκε να είναι ασθενής.

Οι παραπάνω μετρήσεις έστρεψαν ένα σημαντικό μέρος του ενδιαφέροντος στον υπολογισμό της v_E (ο οποίος δεν μπορεί να γίνει άμεσα μέσω CPA). Ακριδής θεωρία αναπτύχθηκε μόνο στο όριο χαμηλών συγκεντρώσεων σκεδαστών και για βαθμωτά κύματα [32, 34, 35, 31]. Η θεωρία αυτή - βασισμένη στο όριο χαμηλών συγκεντρώσεων της εξίσωσης Boltzmann - επεκτάθηκε και για ΗΜ κύματα με ένα μάλλον ευριστικό τρόπο χωρίς να λαμβάνεται υπόψη από την αρχή ο διανυσματικός χαρακτήρας των κυμάτων αυτών [32, 34, 35, 31]. Για τις υψηλές συγκεντρώσεις, μια προσπάθεια προσέγγισης της v_E αποτελεί ένας συνδυασμός της θεωρίας χαμηλών συγκεντρώσεων με μια επέκταση της CPA [36, 37]. Θα πρέπει να αναφερθεί τέλος μια καινούρια μέθοδος για τον υπολογισμό της v_E βασισμένη επίσης στην ιδέα της CPA, γνωστή σαν CPA ενέργειας [38, 39], η οποία αναπτύχθηκε πρόσφατα και η οποία φαίνεται να προσεγγίζει τα πειραματικά αποτελέσματα τόσο για υψηλές όσο και για χαμηλές συγκεντρώσεις. Οι χαμηλές τιμές της v_E κοντά στους συντονισμούς σε χαμηλές συγκεντρώσεις αποδόθηκαν στην καθυστέρηση του κύματος μέσα στους σκεδαστές στη γειτονιά των συντονισμών. Όσο η συγκέντρωση αυξάνεται η καθυστέρηση αυτή γίνεται μικρότερη - δίνοντας πιο ομαλή εξάρτηση από τη συχνότητα στην v_E - λόγω του ότι οι καταστάσεις συντονισμού γειτονικών σκεδαστών αλληλοεπικαλύπτονται προσφέροντας στο κύμα τη δυνατότητα να μεταβεί εύκολα, μέσω αυτών, από τον ένα σκεδαστή στον άλλο [32, 34, 35, 29, 31].

Ενώ η CPA και οι επεκτάσεις της έχουν χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα τόσο για βαθμωτά όσο και για ΗΜ κύματα, η μελέτη της διάδοσης ακουστικών κι ελαστικών κυμάτων σε τυχαία μέσα είναι πολύ λιγότερο εκτεταμένη. Το γεγονός αυτό οφείλεται από τη μια στις θεωρητικές δυσκολίες αυτής της μελέτης κι από την άλλη στην έλλειψη αρκετών αξιόπιστων πειραμάτων. Οι θεωρητικές δυσκολίες πηγάζουν από (i) τον πλήρως διανυσματικό χαρακτήρα των ελαστικών κυμάτων (οι ήδη υπάρχουσες θεωρίες είχαν αρχικά αναπτυχθεί για βαθμωτά κύματα και στις περισσότερες περιπτώσεις δεν υπάρχει μια εύκολη και προφανής επέκταση τους στην περίπτωση διανυσματικών κυμάτων) (ii) την διαφορετική ταχύτητα μεταξύ διαμήκους κι εγκάρσιας συνιστώσας ελαστικού κύματος και το γεγονός της *ανάμιξης*² των δύο αυτών συνιστωσών στην παρουσία ανομοιογένειας (οι προκύπτουσες δυσκολίες θα συζητηθούν στην πορεία της παρουσίασης του κεφαλαίου) και (iii) τον μεγαλύτερο της μίας αριθμό παραμέτρων που χρειάζονται για τον πλήρη προσδιορισμό ενός ομογενούς ελαστικού μέσου³ (πυκνότητα και ταχύτητες). Το τελευταίο οδηγεί σε ανάγκη περισσότερων από μία εξισώσεων για τον υπολογισμό του φαινομένου μέσου, στα πλαίσια εφαρμογής της CPA, με αποτέλεσμα τόσο θεωρητικές δυσκολίες (ερώτημα για το ποιες είναι οι πιο κατάλληλες εξισώσεις για τον υπολογισμό) όσο και υπολογιστικές (προβλήματα σύγκλισης, πολλαπλές λύσεις κοκ.).

²Με τον όρο ανάμιξη δηλώνεται η μετατροπή διαμήκους κύματος σε εγκάρσιο κι αντίστροφα.

³Τόσο στη διάδοση βαθμωτών όσο και ΗΜ κυμάτων μία μόνο παράμετρος (πχ. η διηλεκτρική σταθερά) είναι αρκετή για να περιγράψει τη διάδοση του κύματος σε ένα ομογενές μέσο.

Τα πειράματα από την άλλη μεριά τα οποία θα μπορούσαν να είναι κίνητρο για θεωρητική μελέτη αφορούν κυρίως μετρήσεις ταχυτήτων σε περιοχές χαμηλών συγκεντρώσεων ή χαμηλών συχνοτήτων (περιοχές ασθενούς σκέδασης) [40, 41, 42, 43]. Οι - πιο ενδιαφέρουσες - περιοχές συχνοτήτων στις οποίες η διάδοση καθορίζεται από σκέδαση συντονισμού και συμβολή των σκεδαζομένων κυμάτων (περιοχές ισχυρής σκέδασης) είναι στην ουσία πειραματικά ανεξερεύνητες. Πρόσφατα, μετρήθηκε για πρώτη φορά συντελεστής διάχυσης, D , και μέση ελεύθερη διαδρομή μεταφοράς, l_t , - επιτρέποντας έτσι υπολογισμό της ταχύτητας ενέργειας, v_E - σε τυχαίο μέσο αποτελούμενο από σφαίρες γυαλιού σε νερό, σε περιοχές ισχυρής σκέδασης [44]. Μετρήθηκαν επίσης ταχύτητες φάσης και ομάδας και μέση ελεύθερη διαδρομή σκέδασης στο ίδιο σύστημα [45]. Τα πειράματα αυτά σε συνδυασμό με παλιότερα πειράματα μέτρησης ταχύτητας φάσης [40, 43] αποτελούν το κίνητρο για το δεύτερο μέρος της παρούσας εργασίας. Σκοπός, είναι ο έλεγχος και η επέκταση μεθόδων που αναπτύχθηκαν για βαθμωτά και ηλεκτρομαγνητικά κύματα στην περίπτωση των ελαστικών και ακουστικών κυμάτων. Οι μέθοδοι αυτοί είναι δύο επεκτάσεις της τυπικής CPA (γνωστές με το όνομα απλή CPA και coated CPA [36]) για τον υπολογισμό ταχυτήτων φάσεων, μέσων ελεύθερων διαδρομών και εκτίμηση της δυνατότητας εντοπισμού και η προαναφερθείσα CPA ενέργειας η οποία εστιάζει το ενδιαφέρον της στον επιπλέον υπολογισμό της ταχύτητας ενέργειας.

Όσον αφορά τη δομή της παρουσίασης του κεφαλαίου : (α) Γίνεται μια συνοπτική αναφορά σε ορισμό και ανάλυση των μακροσκοπικών χαρακτηριστικών της διάδοσης και επίσης στα όρια ισχύος των διαφόρων θεωριών και προσεγγίσεων. Η αναφορά γίνεται για την περίπτωση βαθμωτών κυμάτων με τα αποτελέσματα να ισχύουν επίσης για ακουστικά κύματα⁴. Για ελαστικά κύματα υπάρχουν κάποιες ιδιαιτερότητες οι οποίες σημείο προς σημείο θα συζητηθούν στην πορεία της παρουσίασης του κεφαλαίου. (β) Παρουσιάζονται και αναλύονται οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται. Η παρουσίαση των μεθόδων, στα σημεία που σκοπός είναι η κατανόηση των βασικών ιδεών, γίνεται και εδώ (λόγω απλότητας και δυνατότητας σύγκρισης) για βαθμωτά κύματα. Σε δεύτερο δήμα συζητούνται οι ιδιαιτερότητες των ακουστικών (όπου υπάρχουν) και των ελαστικών κυμάτων. (γ) Παρουσιάζονται αποτελέσματα που έχουν εξαχθεί αναλυτικά για διάφορες οριακές περιπτώσεις και (δ) παρουσιάζονται και σχολιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα.

3.2 Μακροσκοπικά χαρακτηριστικά της διάδοσης

Σε ένα ομογενές μέσο χωρίς απορρόφηση ένα επίπεδο κύμα χαρακτηρίζεται από τη συχνότητα, ω και τη διεύθυνση διάδοσης. Πληροφορία για τη διεύθυνση διάδοσης δίνει η διεύθυνση του πραγματικού (για ομογενή μέσα χωρίς απορρόφηση) κυματανύσματος, \mathbf{k} , του οποίου το μέτρο συνδέεται με τη συχνότητα και την ταχύτητα φάσης με τη γνωστή για σωματίδια χωρίς μάζα σχέση διασποράς $\omega = kc_{ph}$. Η c_{ph} είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ένα σταθερό μέτωπο του κύματος και στην περίπτωση αυτή ταυτίζεται με την ταχύτητα ομάδας, $v_g = d\omega/dk$, την ταχύτητα δηλαδή διάδοσης της ενέργειας ενός σύμφωνου παλμού.

Σε ένα τυχαίο μέσο αντίθετα, λόγω των πολλαπλών σκεδάσεων, η σχέση διασποράς παύει να έχει την παραπάνω απλή μορφή ή και να ισχύει ως έννοια. Οι πολλαπλές

⁴Τα ακουστικά κύματα για σταθερή πυκνότητα ταυτίζονται με τα βαθμωτά.

σκεδάσεις κάνουν το κύμα να χάνει τη φάση του, τυχαιοποιώντας τη διεύθυνση του. Η τυχαιοποίηση αυτή, η οποία σε μεγάλο βαθμό είναι συνάρτηση του πόσο έντονη είναι η σκέδαση από κάθε ένα σκεδαστή και άρα συνάρτηση της συχνότητας, κάνει τις ταχύτητες διάδοσης να είναι επίσης συναρτήσεις της συχνότητας και σε περιπτώσεις ισχυρής σκέδασης και της διεύθυνσης. Το μέσο μήκος στο οποίο η συμφωνία φάσης διατηρείται σε ένα τυχαίο μέσο χαρακτηρίζεται σαν μέση ελεύθερη διαδρομή σκέδασης, l_s , του κύματος [46, 47]. Σε χαμηλές συγκεντρώσεις σκεδαστών ισχύει ότι $l_s = 1/n\sigma$ όπου n η συγκέντρωση των σκεδαστών και σ η ολική ενεργός διατομή σκέδασης από ένα σκεδαστή.

Στην περίπτωση ασθενούς σκέδασης ή λεπτών δειγμάτων, L , του τυχαίου μέσου τέτοιων ώστε $L \leq l_s$, (ακριβέστερα σε κλίμακες μήκους $L \leq l_s$) τα φαινόμενα πολλαπλής σκέδασης δεν παίζουν καθοριστικό ρόλο στη διάδοση (οι σκεδαστές είναι κατά κάποιο τρόπο ασυσχέτιστοι) και η αρχική φάση του κύματος σε μεγάλο βαθμό διατηρείται. Η περιοχή αυτή ($L \leq l_s$), η οποία χαρακτηρίζεται σαν περιοχή βαλλιστικής διάδοσης, είναι η περιοχή μέγιστης επιτυχίας των θεωριών φαινομένου μέσου, θεωρίες που βασίζονται σε απαιτήσεις πάνω στη μέση συνάρτηση Green⁵, $\langle G \rangle_c$. Επίσης είναι η περιοχή όπου μεγέθη όπως η ταχύτητα φάσης και ομάδας (ταχύτητες που σχετίζονται με σύμφωνη διάδοση του κύματος) έχουν κάποιο φυσικό νόημα [29, 31, 39].

Στην περίπτωση όπου το τυχαίο μέσο είναι σε διάσταση πολύ μεγαλύτερο από τη μέση ελεύθερη διαδρομή ($L \geq l_s$) οι πολλαπλές σκεδάσεις (οι οποίες, ακόμα κι ασθενείς, δρουν συσσωρευτικά) κυριαρχούν στον καθορισμό της διάδοσης. Το αποτέλεσμα είναι πλήρης απώλεια της φάσης του κύματος. Στην περιοχή αυτή ο σύμφωνος κυματικός χαρακτήρας επισκιάζεται από ένα χαρακτήρα διάχυσης⁶. Πληροφορία για τη διάχυση του κύματος δίνει το γινόμενο $\langle GG \rangle_c$. Έτσι, για την περιγραφή της διάδοσης σ' αυτή την περιοχή - η οποία χαρακτηρίζεται σαν περιοχή διάχυσης - χρειάζονται θεωρίες βασισμένες σε απαιτήσεις πάνω στο $\langle GG \rangle_c$ ή κατάλληλη τροποποίηση των θεωριών φαινομένου μέσου ώστε να περιγράφονται περισσότερο ικανοποιητικά τα φαινόμενα πολλαπλής σκέδασης. Επίσης εδώ η περιγραφή μέσω των ταχυτήτων φάσης και ομάδας χάνει το νόημα της και η διάδοση της ενέργειας μπορεί να περιγραφεί μόνο μέσω της ταχύτητας ενέργειας⁷, $v_E = 3D/l_t$ [29, 31, 39]. l_t είναι η λεγόμενη μέση ελεύθερη διαδρομή μεταφοράς η οποία ορίζεται σαν το μέσο μήκος στο οποίο το κύμα διατηρεί τη μνήμη της αρχικής του διεύθυνσης (φάσης) [46, 47]. Η μέση ελεύθερη διαδρομή μεταφοράς διαφέρει από την l_s ($\approx 1/n\sigma$) κατά το ότι περιέχει έναν όρο της μορφής $(1 - \cos\theta)$ στον υπολογισμό της ενεργού διατομής, σ , ενώ ταυτίζεται με αυτήν μόνο για ισοτροπική σκέδαση.

Όσον αφορά τέλος τη δυνατότητα εντοπισμού του κύματος, τη δυνατότητα δηλαδή ένας διαδιδόμενος παλμός να μετατραπεί σε εκθετικά αποσβενύμενο λόγω καταστροφικής συμβολής των πολλαπλά σκεδαζομένων κυμάτων, θα πρέπει να αναφερθεί ότι αυτό γενικά δεν είναι αναμενόμενο ούτε σε χαμηλές συχνότητες όπου η σκέδαση είναι ασθενής ούτε σε πολύ υψηλές όπου η σκέδαση περιγράφεται από

⁵Η συνάρτηση Green μπορεί να δώσει πληροφορία για ενδιαφέροντα μεγέθη όπως είναι η πυκνότητα καταστάσεων, η μέση ελεύθερη διαδρομή σκέδασης κοκ. Η μέση τιμή παίρνεται πάνω σε όλες τις δυνατές διατάξεις σκεδαστών.

⁶Η περιγραφή της διάδοσης της ενέργειας πολλαπλά σκεδαζομένων κυμάτων γίνεται μέσω της εξίσωσης διάχυσης.

⁷Σε περιοχές ασθενούς σκέδασης οι ταχύτητες c_{ph} , v_g και v_E είναι περίπου οι ίδιες.

τη γεωμετρική οπτική και φαινόμενα συμβολής δεν συμπεριλαμβάνονται. Μόνη δυνατότητα για εντοπισμό υπάρχει σε περιοχές συχνοτήτων που αντιστοιχούν σε μήκη κύματος συγκρίσιμα με την διάσταση των σκεδαστών (εκεί η ενεργός διατομή σκέδασης έχει την πλούσια σε δομή μορφή που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 2). Ποσοτικά, ο έλεγχος για εντοπισμό γίνεται με εξέταση της παραμέτρου εντοπισμού $kl = (\omega/c_{ph}) \cdot l_s$. Η παράμετρος αυτή συγκρίνει το μήκος κύματος $\lambda (= 2\pi/k)$ με τη μέση ελεύθερη διαδρομή l_s . Εντοπισμός μπορεί να υπάρξει μόνο για τιμές της παραμέτρου kl μικρότερες από μονάδα ενώ το ακριβές όριο μετάδοσης, $(kl)_c$, από εκτεταμένες σε εντοπισμένες καταστάσεις δεν έχει προσδιοριστεί ακριβώς. Προσπάθεια υπολογισμού της κρίσιμης τιμής $(kl)_c$, αποτέλεσε η λεγόμενη PWA [48, 49, 50] στην οποία το πρόβλημα της εύρεσης εντοπισμένων καταστάσεων σε τυχαίο μέσο συνδέεται με το πρόβλημα εύρεσης δέσιμων καταστάσεων σε πηγάδι δυναμικού. Η θεωρία αυτή δίνει $(kl)_c = 0.844$ [48, 49, 50] ενώ άλλη τιμή που υπάρχει στη βιβλιογραφία, αποτέλεσμα διαφορετικού τρόπου προσέγγισης, είναι η $(kl)_c = 0.911$ [29].

3.3 CPA

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η CPA αντικαθιστά το τυχαίο μέσο με ένα ομογενές φαινόμενο (effective) μέσο. Το φαινόμενο αυτό μέσο χαρακτηρίζεται από ένα μιγαδικό, εξαρτώμενο από τη συχνότητα κυματοδιάνυσμα διάδοσης, $q_e(\omega)$, (ή ισοδύναμα μια μιγαδική ταχύτητα, $c_e = \omega/q_e$) το οποίο και υπολογίζεται αυτοσυνεπώς⁸ [30, 29]. Το πραγματικό μέρος του q_e , χαρακτηρίζεται σαν το επανακανονικοποιημένο κυματοδιάνυσμα διάδοσης στο τυχαίο μέσο και δίνει την ταχύτητα φάσης, $c_{ph} = \omega/\Re[q_e]$ ενώ το φανταστικό μέρος συνδέεται με την απώλεια της φάσης του κύματος λόγω πολλαπλών σκεδάσεων και δίνει τη μέση ελεύθερη διαδρομή σκέδασης, $l_s = 1/2\Im[q_e]$.

Το φαινόμενο μέσο, q_e , στα πλαίσια όλων των εκδοχών της CPA υπολογίζεται από την *βασική απαίτηση* η συνάρτηση Green του μέσου αυτού, G_e , να είναι ίση με την μέση τιμή της συνάρτησης Green του πραγματικού μέσου, $\langle G \rangle_c$, όπου η μέση τιμή παίρνεται πάνω σε όλες τις δυνατές διατάξεις της τυχειότητας [30]. Η συνθήκη αυτή μαθηματικά εκφράζεται σαν

$$\langle G \rangle_c = G_e \left(= \frac{1}{q_e^2 - k^2} \right) \quad (3.1)$$

Το δεξιό μέλος στην 3.1 είναι η έκφραση στο χώρο των ορμών (k -χώρο) της συνάρτησης Green ομογενούς μέσου με κυματόνυσμα q_e .

Εστω τώρα ένα ομογενές μέσο που χαρακτηρίζεται από από ένα κυματόνυσμα k_m (ή ισοδύναμα μια ταχύτητα $c_m = \omega/k_m$). Τότε η συνάρτηση Green, G , του τυχαίου μέσου μπορεί να γραφεί σαν [30, 29]

$$G = G_m + G_m T_m G_m \quad (3.2)$$

⁸ Αναφερόμαστε σε μέσα που χαρακτηρίζονται πλήρως από μόνο ένα κυματοδιάνυσμα. Η επέκταση στην περίπτωση των ελαστικών κι ακουστικών κυμάτων θα συζητηθεί παρακάτω.

όπου G_m είναι η συνάρτηση Green του ομογενούς αυτού μέσου και T_m ο καλά γνωστός από τη θεωρία διαταραχών τελεστής σκέδασης⁹, ο οποίος περιέχει όλη την πληροφορία για σκέδαση ανάμεσα στο ομογενές μέσο, k_m , και το τυχαίο (ο δείκτης m δηλώνει ότι ο T ορίζεται σχετικά με το μέσο k_m).

Παίρνοντας μέση τιμή στην Εξ.3.2 προκύπτει η

$$\langle G \rangle_c = G_m + G_m \langle T_m \rangle_c G_m \quad (3.3)$$

η οποία στον k -χώρο μπορεί να γραφεί σαν [29]:

$$\langle G \rangle_c = \frac{1}{k_m^2 - k^2 - \Sigma_m(\omega)} \quad (3.4)$$

Στη σχέση 3.4 όλη η πληροφορία για τη σκέδαση έχει μεταφερθεί από τον $\langle T_m \rangle_c$ στην μιγαδική συνάρτηση $\Sigma_m(\omega)$ γνωστή σαν ιδιοενέργεια (self-energy)¹⁰. Η Σ για ασθενή σκέδαση είναι ανάλογη του $\langle T \rangle_c$ [29, σελ.55] ενώ ο δείκτης m μπαίνει κι εδώ για να δηλώσει σκέδαση σχετικά με το μέσο k_m .

Αξίζει να αναφερθεί τέλος ότι ο τελεστής σκέδασης T μπορεί να γραφεί σαν ένα άπειρο άθροισμα της μορφής [30]

$$T_m = \sum_i t_i + \sum_{i \neq j} t_i G_m t_j + \sum_{i \neq j \neq k} t_i G_m t_j G_m t_k + \dots \quad (3.5)$$

όπου οι τελεστές t_i αντιπροσωπεύουν τη σκέδαση από κάθε δομική μονάδα του τυχαίου μέσου που περιβάλλεται από το μέσο k_m ενώ όροι πάνω από τον πρώτο περιγράφουν φαινόμενα πολλαπλής σκέδασης μεταξύ των διαφόρων δομικών μονάδων.

Οι παραπάνω τύποι (Εξ.3.1-Εξ.3.5) είναι η βάση για την ανάλυση και κατανόηση των εκδοχών της CPA που χρησιμοποιούνται στην παρούσα δουλειά. Οι εκδοχές αυτές όπως ήδη αναφέρθηκε, είναι η απλή και η coated CPA [36] οι οποίες είναι άμεσες επεκτάσεις της τυπικής CPA κι επίσης η CPA ενέργειας [38, 39] η οποία είναι απλώς βασισμένη στην ιδέα της CPA.

3.3.1 Τυπική CPA

Η βασική συνθήκη για τον υπολογισμό του φαινόμενου μέσου, q_e , στα πλαίσια της τυπικής CPA [30, 29] είναι ο μηδενισμός της κατά μέσο όρο σκέδασης ανάμεσα στο φαινόμενο μέσο, q_e , και το πραγματικό τυχαίο σύστημα [30, 29]. Η συνθήκη αυτή μαθηματικά εκφράζεται σαν

$$\langle T_e \rangle_c = 0 \quad (3.6)$$

Η Εξ.3.6 δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο τρόπος υλοποίησης, στα πλαίσια της τυπικής CPA, της βασικής απαίτησης της CPA σύμφωνα με την οποία η συνάρτηση Green του φαινόμενου μέσου θα πρέπει να ταυτίζεται με τη μέση συνάρτηση Green του τυχαίου. Πράγματι, όπως εύκολα μπορεί να δει κανείς, αν $\langle T_m \rangle_c = 0$ στην

⁹Τόσο ο T όσο και η G είναι ταυτοστές. Συναρτήσεις είναι οι αναπαραστάσεις τους στον πραγματικό χώρο ή στον χώρο των οσμών.

¹⁰Η Σ γενικά είναι συνάρτηση τόσο του ω όσο και του \mathbf{k} . Για την ανεξαρτησία της Σ από το \mathbf{k} δεξ αναφορά [29] σελ.67.

Εξ.3.3, η βασική απαίτηση της CPA ικανοποιείται αυτόματα και το ομογενές μέσο G_m , ταυτίζεται με το προς υπολογισμό φαινόμενο μέσο G_e ($G_m = G_e = \langle G \rangle_c \Rightarrow T_m = T_e$). Σ' αυτή την περίπτωση $\Sigma_m(\omega) = \Sigma_e(\omega) = 0$ και το k_m είναι το κυματοδιάνυσμα διάδοσης q_e .

Η εφαρμογή της συνθήκης 3.6 απαιτεί υπολογισμό της συνολικής σκέδασης ανάμεσα στο φαινόμενο μέσο και το τυχαίο. Το γεγονός ότι η σκέδαση αυτή, εν γένει, δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς, οδηγεί στην ανάγκη προσέγγισης. Με τη *βασική προσέγγιση της CPA* η συνθήκη $\langle T \rangle_c = 0$ (ο δείκτης e στο εξής θα παραλείπεται) αντικαθίσταται από την πιο χαλαρή απαίτηση [30]

$$\langle t \rangle_c = 0 \quad (3.7)$$

όπου $\langle t \rangle_c = \langle t_i \rangle_c$ (δες Εξ.3.5) η μέση τιμή της σκέδασης από κάθε ανεξάρτητη δομική μονάδα του τυχαίου μέσου που περιβάλλεται από το φαινόμενο. Το φαινόμενο μέσο δηλαδή αντικαθίσταται μόνο *τοπικά* από το τυχαίο και απαιτείται η σκέδαση που προκύπτει από την τοπική αυτή αντικατάσταση να είναι κατά μέσο όρο μηδέν.

Ερωτήματα που προκύπτουν είναι α) ποιές είναι οι συνέπειες της παραπάνω προσέγγισης όσον αφορά τα όρια ισχύος της μεθόδου και β) πως πρέπει να γίνει η τοπική αντικατάσταση που προαναφέρθηκε ώστε να αναπαρασταθεί καλύτερα το συγκεκριμένο τυχαίο μέσο. Πως θα διαλεχθούν δηλαδή οι δομικές μονάδες του τυχαίου μέσου που εμβαπτίζονται στο φαινόμενο.

Όσον αφορά το ερώτημα (α) αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι στο όριο όπου $\langle T \rangle_c \rightarrow 0$ η σκέδαση γίνεται αρκετά ασθενής. Αυτό σημαίνει ασθενή σκέδαση από κάθε σκεδαστή ξεχωριστά και άρα σκεδαστές ασυσχέτιστους μεταξύ τους. Αν δηλαδή t_i είναι η σκέδαση από τον σκεδαστή i τότε $\langle t_i t_j \rangle_{i \neq j} \approx \langle t_i \rangle \langle t_j \rangle$. Με βάση την εξίσωση 3.5 μπορεί να δει κανείς ότι η συνθήκη που προκύπτει μετά από την βασική προσέγγιση της CPA, Εξ.3.7, μηδενίζει τους τρεις πρώτους όρους στο ανάπτυγμα για τον $\langle T \rangle_c$. Περιμένουμε λοιπόν ότι αν μπορεί να γίνει $\langle T \rangle_c \approx 0$, η CPA θα είναι αρκετά ακριβής μια και όροι πάνω από τον τρίτο - σαν γινόμενα μικρών ποσοτήτων - δεν θα συνεισφέρουν σημαντικά. Περιμένουμε επίσης να αποτυγχάνει σε περιπτώσεις όπου όροι πάνω από τον τρίτο κυριαρχούν στο ανάπτυγμα του $\langle T \rangle_c$, περιπτώσεις δηλαδή όπου η σκέδαση κυριαρχείται από φαινόμενα πολλαπλής σκέδασης εντοπιζόμενα σε περιοχές συσσωματωμάτων σκεδαστών [30].

Όσον αφορά το ερώτημα (β), το ποιός δηλαδή είναι ο καταλληλότερος τρόπος τοπικής αντικατάστασης του φαινομένου μέσου από το τυχαίο, η απάντηση του δίνει ύπαρξη σε διάφορες εκδοχές της τυπικής CPA όπως είναι η απλή CPA και η coated CPA οι οποίες παρουσιάζονται αμέσως παρακάτω.

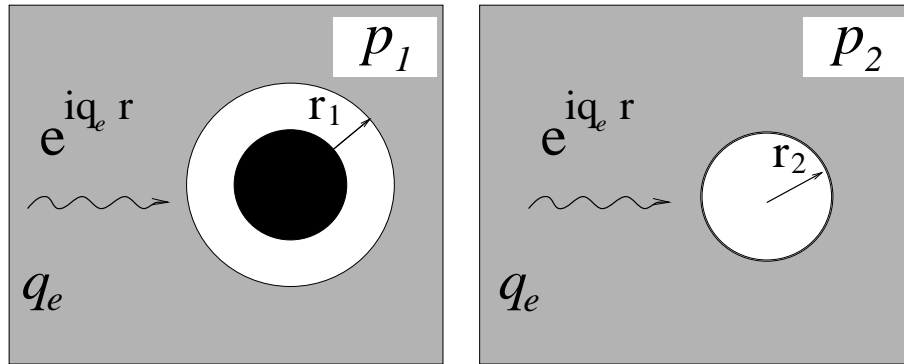
Στην παρουσίαση που ακολουθεί περιοριζόμαστε σε τυχαία συστήματα που αποτελούνται από όμοιους *σφαιρικούς σκεδαστές* (ακτίνας a) τοποθετημένους, σε ποσοστό όγκου f_s , μέσα σε ομογενές περιβάλλον μέσο. Οτι αφορά τους σκεδαστές θα χαρακτηρίζεται από τον δείκτη i (in), ότι αφορά το περιβάλλον μέσο από τον δείκτη o (out), ενώ ότι αφορά το φαινόμενο μέσο από τον δείκτη e (effective). Τόσο η απλή όσο και η coated CPA εφαρμόζονται με τον ίδιο τρόπο (όπως περιγράφεται παρακάτω) για κάθε κατηγορία κλασικών κυμάτων.

Απλή CPA

Στα πλαίσια της απλής CPA το φαινόμενο μέσο αντικαθίσταται τοπικά με πιθανότητα $p_1 = f_s$ από ένα σφαιρικό σκεδαστή όμοιο με τους σκεδαστές στο πραγματικό τυχαίο σύστημα (σκεδαστής τύπου 1) και με πιθανότητα $p_2 = 1 - f_s$ ένα σκεδαστή ίσης ακτίνας, a , από το υλικό του περιβάλλοντος μέσου (σκεδαστής τύπου 2).

Coated CPA

Στα πλαίσια της coated CPA [36, 39] το φαινόμενο μέσο αντικαθίσταται τοπικά με πιθανότητα p_1 από ένα σφαιρικό σκεδαστή όμοιο κι εδώ με τους σκεδαστές του τυχαίου συστήματος αλλά καλυμμένο με ένα σφαιρικό κέλυφος (ακτίνας r_1) από το υλικό του περιβάλλοντος μέσου (σκεδαστής τύπου 1). Αντικαθίσταται επίσης με πιθανότητα p_2 από μια σφαίρα ακτίνας r_2 από το υλικό του περιβάλλοντος μέσου (σκεδαστής τύπου 2) (δες, Σχ.3.1). Ο τρόπος αυτός αντικατάστασης αναπαριστά το γεγονός ότι στο πραγματικό τυχαίο σύστημα τα δύο υλικά (σκεδαστές-περιβάλλον) δεν είναι τοπολογικά ισοδύναμα μια και οι σκεδαστές είναι απομονωμένοι ενώ η φάση του περιβάλλοντος μέσου είναι συνεκτική. Με την έννοια αυτή περιμένει κανείς η coated CPA να περιγράφει καλύτερα, σε σχέση με την απλή, τη διάδοση σε τυχαία συστήματα χωρικά απομονωμένων σκεδαστών.



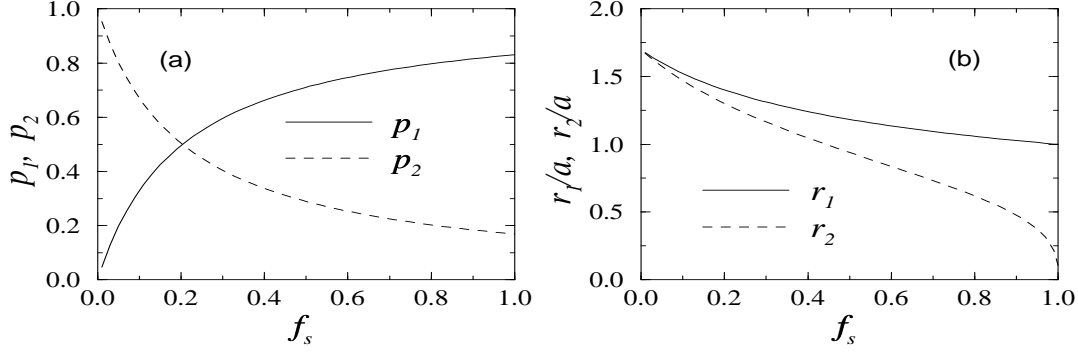
Σχ. 3.1: Ο τρόπος που γίνεται η αντικατάσταση του φαινομένου μέσου από το τυχαίο στα πλαίσια της coated CPA. Η σκιασμένη περιοχή παριστάνει το τυχαίο μέσο, η μαύρη σφαίρα ταυτίζεται με τους σκεδαστές στο τυχαίο σύστημα ενώ η άσπρη περιοχή με το περιβάλλον μέσο. Η σκέδαση υπολογίζεται θεωρώντας πρόσπτωση επίπεδου κύματος.

Οι ακτίνες r_1, r_2 και οι πιθανότητες p_1, p_2 , που προαναφέρθηκαν είναι συναρτήσεις του ποσοστού του όγκου, f_s , των σκεδαστών στο τυχαίο σύστημα. Αφετηρία για τον υπολογισμό τους είναι οι προφανείς ισότητες

$$p_1 + p_2 = 1 \quad (3.8)$$

$$\frac{V}{V_1 + V_2} = f_s \quad (3.9)$$

όπου $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ και $V_i = \frac{4}{3}\pi r_i^3$ ($i = 1, 2$). Οι δύο παραπάνω συνθήκες, όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς, δεν είναι αρκετές για τον υπολογισμό των p_i, r_i ($i = 1, 2$). Για



Σχ.3.2: Οι πιθανότητες p_1, p_2 και οι ακτίνες r_1, r_2 για τους δύο τύπους σκεδαστών στα πλαίσια της coated CPA, σαν συνάρτηση του ποσοστού του όγκου των σφαιρών, f_s .

την εύρεση επιπλέον συνθηκών ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία. Θεωρείται το φαινόμενο μέσο να χωροπληρείται από μη αλληλοεπικαλυπτόμενες κυψελίδες Wigner-Seitz με όγκο $V_p = z^3 V$. Το z είναι ελεύθερη παράμετρος με την οποία γίνεται προσπάθεια να συσχετιστούν οι προς υπολογισμό ποσότητες. Στο κέντρο της κυψελίδας τοποθετείται ένας σκεδαστής τύπου 1 με πιθανότητα p_1 κι ένας σκεδαστής τύπου 2 με πιθανότητα p_2 .

Είναι προφανές ότι ισχύουν οι εξισώσεις

$$p_1 V \propto f_s \quad (3.10)$$

$$p_1(V_1 - V) + p_2 V_2 \propto 1 - f_s \quad (3.11)$$

όπου η σταθερά αναλογίας είναι η ίδια και στις δύο περιπτώσεις. Επιπλέον ο όγκος V_1 μπορεί να θεωρηθεί ίσος με $V_p/(n+1)$ όπου n ο μέσος αριθμός σφαιρών (πραγματικών σκεδαστών) μέσα στον όγκο V_p γύρω από την κεντρική. Ο n είναι ανάλογος με το ποσοστό του όγκου των σφαιρών, f_s , και με τον διαθέσιμο όγκο. Επειδή το z είναι ελεύθερη παράμετρος μπορούμε να διαλέξουμε τη σταθερά αναλογίας να είναι μονάδα, δηλαδή $n = f_s(z^3 - 1)$. Έτσι $V_1 = V z^3 / [f_s(z^3 - 1) + 1]$. Ομοια, $V_2 = V_p - \bar{n} V_1$ όπου ο \bar{n} , ο μέσος αριθμός σφαιρών στον όγκο V_p , είναι ανάλογος με τον διαθέσιμο όγκο V_p/V και το f_s . Παίρνοντας πάλι μονάδα τη σταθερά αναλογίας θα ισχύει ότι $V_2 = z^3(V - f_s V_1)$. Με τις παραπάνω επιλογές οι p_1, p_2 εξαρτώνται μόνο από το f_s και την ελεύθερη παράμετρο z μέσω των οποίων εκφράζονται σαν

$$p_1 = \frac{f_s z^3}{f_s z^3 + 1} \quad (3.12)$$

$$p_2 = \frac{1}{f_s z^3 + 1} \quad (3.13)$$

Ο υπολογισμός του z γίνεται από την απαίτηση τα αποτελέσματα να δίνουν γνωστά προσεγγιστικά αποτελέσματα για τις ταχύτητες και μέσες ελεύθερες διαδρομές στο όριο των μεγάλων μηκών κύματος ($\omega \rightarrow 0$). Βρέθηκε ότι η τιμή $z = 1.7$ προσεγγίζει αρκετά ικανοποιητικά τα αποτελέσματα αυτά. Με βάση το $z = 1.7$ οι ακτίνες r_1, r_2 και οι πιθανότητες p_1, p_2 σαν συνάρτηση της συγκέντρωσης f_s δείχνονται στο Σχ.3.2.

Εξισώσεις

Μετά την επιλογή των δομικών μονάδων του τυχαίου συστήματος που εμβαπτιζονται στο φαινόμενο μέσο το πρόβλημα για τον υπολογισμό του q_e μέσω της συνθήκης 3.7, ανάγεται στον υπολογισμό του ταυυστή σκέδασης, t , για σκέδαση επίπεδου κύματος από κάθε μία δομική μονάδα. Ο t είναι συνάρτηση τόσο του προσπίπτοντος κυματανύσματος, έστω \mathbf{q}_e , όσο και του σκεδαζόμενου, έστω \mathbf{q}'_e και συνδέεται με το πλάτος σκέδασης με τη σχέση [29]

$$t_{\mathbf{q}_e, \mathbf{q}'_e} = -4\pi f(\mathbf{q}_e, \mathbf{q}'_e) (= -4\pi f(\theta, \phi)) \quad (3.14)$$

όπου θ και ϕ η πολική και αζιμουθιακή γωνία του διανύσματος θέσης. Το τελευταίο μέλος της παραπάνω ισότητας προκύπτει διαλέγοντας τη διεύθυνση του προσπίπτοντος κύματος να είναι εκείνη του $\hat{\mathbf{z}}$ άξονα και παίρνοντας υπόψη ότι η διεύθυνση του \mathbf{q}'_e ταυίζεται με εκείνη του διανύσματος θέσης.

Με βάση τα παραπάνω, η συνθήκη της τυπικής CPA (Εξ.3.7) γίνεται

$$\langle f \rangle_c = 0 \quad (3.15)$$

Το πλάτος σκέδασης όμως στην περίπτωση των κλασικών κυμάτων (λόγω της μακροσκοπικής φύσης των σκεδαστών) δεν είναι απλώς αριθμός αλλά μια συνάρτηση των γωνιών και ένα βασικό ερώτημα είναι για ποιά τιμή των γωνιών η μέση τιμή της συνάρτησης αυτής θα πρέπει παρθεί ίση με μηδέν.

Σαν καταλληλότερη ποσότητα για τον μηδενισμό διαλέγεται το πλάτος σκέδασης στη διεύθυνση πρόσπτωσης, $f(\theta = 0)$. Ο λόγος είναι ότι η ποσότητα αυτή συνδέεται με την ολική ενεργό διατομή σκέδασης (μέσω του οπτικού θεωρήματος - δες Εξ.2.16 και Εξ.2.17) και άρα ο μηδενισμός της εξασφαλίζει μηδενική μέση σκέδαση. Αξίζει να σημειωθεί επίσης ότι στο όριο όπου ο T μπορεί να προσεγγιστεί μόνο από τον πρώτο όρο του αναπτύγματος 3.5, ο μηδενισμός του μέσου πλάτους σκέδασης στη διεύθυνση πρόσπτωσης, ο οποίος σημαίνει μηδενισμό μόνο των “διαγωνίων” στοιχείων του $\langle t \rangle_c$ ($\langle t_{\mathbf{q}_e, \mathbf{q}_e} \rangle_c$), συνεπάγεται ακριβή μηδενισμό του ολικού¹¹ $\langle T \rangle_c$.

Ιδιαιτερότητες των ελαστικών κυμάτων : Στην περίπτωση των ελαστικών κυμάτων όπου ένα ομογενές μέσο χαρακτηρίζεται από δύο κυματανύσματα (ένα για διάδοση διαμήκους κύματος κι ένα για εγκάρσιου) και την πυκνότητα, το φαινόμενο μέσο θα χαρακτηρίζεται (εκτός από την πυκνότητα ρ_e) από τα δύο κυματανύσματα q_{le}, q_{te} (ο δείκτης l δηλώνει το διαμήκες κι ο δείκτης t το εγκάρσιο) με συνέπειες δύο ταχύτητες φάσης, $c_l^{ph} = \omega/\Re[q_{le}]$ και $c_t^{ph} = \omega/\Re[q_{te}]$ και δύο μέσες ελεύθερες διαδρομές σκέδασης¹², $l_l = 1/2\Im[q_{le}]$ και $l_t = 1/2\Im[q_{te}]$. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται απαίτηση πέντε τουλάχιστον εξισώσεων για τον υπολογισμό του φαινομένου μέσου (τέσσερις εξισώσεις για τον υπολογισμό των μιγαδικών κυματανυσμάτων και μια εξίσωση για την πυκνότητα).

Οι επιπλέον σε σχέση με τα άλλα κλασικά κύματα εξισώσεις προέρχονται από τη διαφορετική έκφραση του ταυυστή σκέδασης, t , για διαμήκες κι εγκάρσιο προσπίπτον

¹¹ Αν $T = \sum_i t_i$, τότε το γεγονός ότι ο $\langle T \rangle_c$ αντιστοιχεί σε συνάρτηση Green ομογενούς μέσου και άρα είναι συνάρτηση μόνο ενός \mathbf{k} συνεπάγεται ότι ο μηδενισμός μόνο των διαγωνίων στοιχείων των $\langle t_i \rangle_c$, είναι ικανός να εξασφαλίσει μηδενισμό του ολικού $\langle T \rangle_c$ (δες αναφορά [29], σελ.54).

¹² Σημειώνεται ότι ο δείκτης t εδώ δηλώνει τη μέση ελεύθερη διαδρομή εγκάρσιου κύματος κι όχι τη μέση ελεύθερη διαδρομή μεταφοράς η οποία στο εξής θα δηλώνεται εκπεφρασμένα.

κύμα. Για διαμήκες προσπίπτον κύμα (και παίρνοντας τον $\hat{\mathbf{z}}$ άξονα στη διεύθυνση πρόσπτωσης) τα διαγώνια στοιχεία του t ($t_{\mathbf{q}_e, \mathbf{q}_e}$) είναι ανάλογα με το διαμήκες πλάτος σκέδασης στη διεύθυνση πρόσπτωσης¹³ $f_{ll}(\theta = 0) = f_{ll}(0)$ (δες Εξ.2.16) [51, 52, 53]. Έτσι η απαίτηση μηδενισμού της μέσης τιμής του t οδηγεί σε απαίτηση μηδενισμού του $\langle f_{ll}(0) \rangle_c$. Για εγκάρσιο προσπίπτον, πολωμένο στον $\hat{\mathbf{n}}$ άξονα, που διαδίδεται κατά τον $\hat{\mathbf{z}}$ άξονα, τα διαγώνια στοιχεία του t είναι ανάλογα με το εγκάρσιο πλάτος σκέδασης, $f_{tt}(0)$, όπου $f_{tt}(0) = \hat{\mathbf{n}} \mathbf{f}_{tt}|_{\theta=0}$ (δες Εξ.2.17) [51, 52]. Έτσι ο υπολογισμός του φαινομένου μέσου ανάγεται σε επίλυση των εξισώσεων

$$\begin{aligned} \langle f_{ll}(0) \rangle_c &= p_1 f_{ll1}(0) + p_2 f_{ll2}(0) = 0 \\ \langle f_{tt}(0) \rangle_c &= p_1 f_{tt1}(0) + p_2 f_{tt2}(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

η οποία γίνεται αυτοσυνεπώς. Στις 3.16, p_i ($i = 1, 2$) είναι η πιθανότητα το φαινόμενο μέσο να αντικαθίσταται από τον σκεδαστή τύπου i (όπως αυτός ορίστηκε στην απλή και coated CPA) και $f_{lli}(0)$ ($f_{tti}(0)$) το διαμήκες (εγκάρσιο) πλάτος σκέδασης στη διεύθυνση πρόσπτωσης¹⁴ για πρόσπτωση διαμήκους (εγκάρσιου) επίπεδου κύματος σ' αυτόν τον σκεδαστή¹⁵.

Οι παραπάνω εξισώσεις (3.16) είναι δυο μιγαδικές εξισώσεις αρκετές για τον υπολογισμό μόνο των δύο μιγαδικών κυματανυσμάτων q_{le} και q_{te} . Όπως όμως ήδη αναφέρθηκε, ο πλήρης προσδιορισμός του φαινομένου μέσου τόσο για ελαστικά κύματα όσο και για ακουστικά, απαιτεί και γνώση της πυκνότητας, ρ_e (η οποία συμμετέχει στον αυτοσυνεπή υπολογισμό 3.16). Για τον υπολογισμό της ρ_e μια τουλάχιστον επιπλέον εξίσωση απαιτείται. Σε διερεύνηση στα πλαίσια της παρούσας δουλειάς για το ποια είναι η πιο κατάλληλη, συμπληρωματική των συνθηκών 3.16, εξίσωση δεν έχει βρεθεί μέχρι στιγμής ικανοποιητική απάντηση. Θέτοντας ίση με μηδέν τη μέση τιμή κάποιου από τα πλάτη σκέδασης f_{ll} και f_{tt} σε διεύθυνση διαφορετική από τη διεύθυνση πρόσπτωσης, το αποτέλεσμα ήταν προβλήματα σύγκλισης, πολλαπλές λύσεις η μία κοντά στην άλλη ή φυσικά μη παραδεκτές λύσεις. Μικρή βελτίωση (για ελαστικά κύματα) υπήρξε θέτοντας ίσο με μηδέν σε κάποια διεύθυνση, το μέσο πλάτος σκέδασης που αντιστοιχεί σε εγκάρσιο σκεδαζόμενο κύμα προερχόμενο από διαμήκες προσπίπτον¹⁶ ($\langle f_{lt} \rangle_c$) το οποίο στη διεύθυνση πρόσπτωσης είναι μηδέν. Στις περιπτώσεις όπου καταφέραμε να έχουμε μια αυτοσυνεπή πλήρη λύση (υπολογισμο ταυτόχρονα ταχυτήτων και πυκνότητας) το αποτέλεσμα ήταν πολύ κοντά σε ότι υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας για την ρ_e την μέση τιμή των πυκνοτήτων των δύο υλικών (σκεδαστών-περιβάλλοντος μέσου), $\rho_e = f_s \rho_i + (1 - f_s) \rho_o$, ή προσεγγιστικούς τύπους για την πυκνότητα στο όριο των χαμηλών συχνοτήτων [54, 55]. Τα περισσότερα από τα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν παρακάτω έχουν εξαχθεί μ'αυτή την προσέγγιση.

¹³Ο πρώτος δείκτης στο πλάτος σκέδασης δηλώνει την πόλωση του προσπίπτοντος και ο δεύτερος την πόλωση του σκεδαζόμενου κύματος.

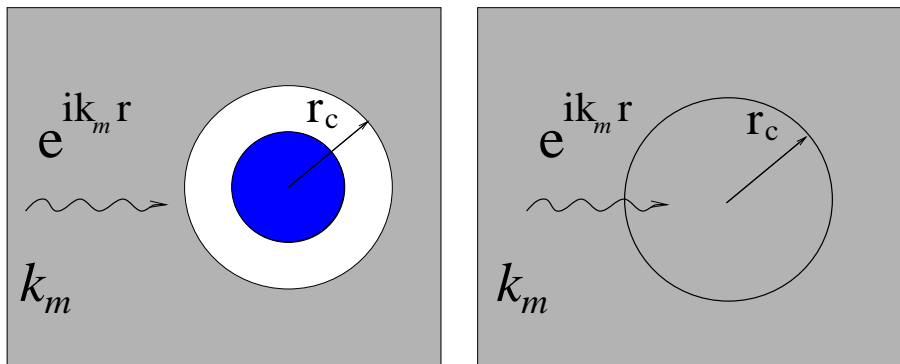
¹⁴Οι αναλυτικές εκφράσεις των $f_{ll}(0)$ και $f_{tt}(0)$ μπορούν να εξαχθούν εύκολα από τις εξισώσεις 2.16 και 2.17 και είναι ίδιες σε μορφή τόσο για απλή σφαίρα όσο και για σύστημα δύο ομόκεντρων σφαιρών.

¹⁵Η σκέδαση από σύστημα δύο ομόκεντρων σφαιρών (coated σφαίρα) περιγράφεται αναλυτικά στο παράρτημα Γ.

¹⁶Το πλάτος αυτό είναι ανάλογο με το πλάτος σκέδασης που αντιστοιχεί σε διαμήκες σκεδαζόμενο κύμα προερχόμενο από εγκάρσιο προσπίπτον.

3.3.2 CPA ενέργειας - Ταχύτητα ενέργειας

Η CPA ενέργειας είναι μια καινούρια μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε με επιτυχία στον υπολογισμό της ταχύτητας ενέργειας τόσο ηλεκτρομαγνητικών όσο και βαθμωτών κυμάτων [38, 39]. Χρησιμοποιεί μεν τη βασική ιδέα της CPA (Εξ.3.1) και τα βασικά της πλεονεκτήματα δηλαδή την απλότητα όσον αφορά την ιδέα και τους υπολογισμούς αλλά πλησιάζει το πρόβλημα από μια διαφορετική οπτική γωνία μια και το βασικό της ενδιαφέρον είναι ο υπολογισμός ιδιοτήτων μεταφοράς, ιδιοτήτων που χαρακτηρίζουν τη διάδοση και σε περιοχές όπου η φάση έχει χαθεί εντελώς. Μια θεωρία που θα ισχύει και σ' αυτές τις περιοχές θα πρέπει να βασίζεται σε απαίτηση πάνω στο $\langle GG \rangle_c$ ή μιλώντας με όρους πεδίου κι όχι συναρτήσεων Green στη μέση ενέργεια. Πράγματι, η CPA ενέργειας ξεκινά από την ιδέα ότι σε ένα τυχαίο μέσο η πυκνότητα ενέργειας θα πρέπει να είναι ομογενής σε κλίμακες μεγαλύτερες από τη βασική δομική μονάδα του μέσου¹⁷. Το τελευταίο είναι απόρροια του ότι σε τέτοιες κλίμακες το τυχαίο μέσο είναι γεωμετρικά ομογενές. Σε ότι ακολουθεί παρουσιάζουμε αρχικά τη μέθοδο όπως αναπτύχθηκε για βαθμωτά και για ΗΜ κύματα [38, 39] και σε δεύτερο δήμα αναφέρουμε αναλυτικά τον υπολογισμό για ακουστικά κι ελαστικά κύματα μαζί με τις ιδιαιτερότητες αυτής της περίπτωσης.



Σχ.3.3: Ο τρόπος που αντικαθίσταται το ομογενές μέσο k_m (σκιασμένη περιοχή) από το τυχαίο στα πλαίσια εφαρμογής της CPA ενέργειας. Η μαύρη σφαίρα (άσπρη περιοχή) ταυτίζεται με τους σκεδαστές (το περιβάλλον μέσο) στο τυχαίο σύστημα. Το k_m υπολογίζεται από την απαίτηση η ολική ενέργεια στη βασική δομική μονάδα του τυχαίου συστήματος - coated σφαίρα (αριστερό πλαίσιο) - να είναι ίση με την ολική ενέργεια στην περιοχή που περιλαμβάνεται από τον κύκλο στο δεξιό πλαίσιο. Η ενέργεια υπολογίζεται θεωρώντας πρόσπτωση επίπεδου κύματος.

Στα πλαίσια της CPA ενέργειας ο υπολογισμός του φαινομένου μέσου γίνεται σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο υπολογίζεται ένα ομογενές μέσο, G_m , από την απαίτηση η πυκνότητα ενέργειας σε αυτό το μέσο να είναι ίση με τη μέση πυκνότητα ενέργειας στο τυχαίο. Η παραπάνω απαίτηση εξίσωσης της ενέργειας υλοποιείται με το να θεωρείται μια βασική δομική μονάδα του τυχαίου μέσου (δες Σχ.3.3) η οποία εμβαπτίζεται στο ομογενές μέσο, G_m , και να απαιτείται η ολική ενέργεια σε αυτή τη δομική μονάδα να είναι ίση με την ολική ενέργεια σε ένα τμήμα ίσου όγκου του ομογενούς μέσου. Η ενέργεια υπολογίζεται θεωρώντας πρόσπτωση επίπεδου

¹⁷Θεωρώντας μη εντοπισμένο κύμα.

κύματος. Η διαδικασία που αναφέρθηκε υπολογίζει αυτοσυνεπώς ένα κυματάνυσμα, k_m , το οποίο χαρακτηρίζει το ομογενές μέσο. Το k_m στην περίπτωση αυτή είναι πραγματικό μια και υπολογίζεται μέσω συλλογισμού διατήρησης της ενέργειας σε μέσα χωρίς απόσβεση.

Σε δεύτερο θήμα υπολογίζεται το μιγαδικό κυματάνυσμα q_e που χαρακτηρίζει το υπό αναζήτηση φαινόμενο μέσο. Ο υπολογισμός του q_e γίνεται εξισώνοντας τη συνάρτηση Green του φαινομένου μέσου με την μέση συνάρτηση Green του τυχαίου όπως δίνεται με βάση τον τύπο 3.4. Συγκρίνοντας τους τύπους 3.1 και 3.4 μπορεί να δει κανείς ότι το q_e θα δίδεται από

$$q_e^2 = k_m^2 - \Sigma_m(\omega) \quad (3.17)$$

Η $\Sigma_m(\omega)$ (σε πρώτη τάξη ως προς τη συγκέντρωση των σκεδαστών) υπολογίζεται από τον απλό τύπο [29, 37, 39]

$$\Sigma_m = -4\pi n f(0) \quad (3.18)$$

όπου n είναι η συγκέντρωση (αριθμητική πυκνότητα) των σκεδαστών στο τυχαίο σύστημα και $f(0)$ το πλάτος σκέδασης στη διεύθυνση πρόσπτωσης για επίπεδο κύμα που σκεδάζεται από τη βασική δομική μονάδα του τυχαίου η οποία έχει εμβαπτιστεί στο μέσο k_m .

Σαν βασική δομική μονάδα του τυχαίου μέσου που εμβαπτίζεται στο k_m θεωρήθηκε αρχικά για τα ΗΜ και βαθμωτά κύματα μια σφαίρα ίδια με τους σκεδαστές του τυχαίου μέσου καλυμμένη με ένα σφαιρικό κέλυφος εξωτερικής ακτίνας r_c (με $r_c^3 = a^3/f_s$) από το υλικό του περιβάλλοντος μέσου (δες Σχ.3.3).

Ελαστικά κύματα : Στην περίπτωση ελαστικών κυμάτων τώρα, όπου ένα ομογενές μέσο χαρακτηρίζεται από δύο κυματάνυσματα και την πυκνότητα, στο πρώτο θήμα του υπολογισμού του φαινομένου μέσου στα πλαίσια της CPA ενέργειας, χρειάζεται να υπολογίσει κανείς τόσο τα δύο πραγματικά κυματάνυσματα k_{lm} και k_{tm} όσο και την πυκνότητα ρ_m .

Τα δύο κυματάνυσματα υπολογίζονται από την απαίτηση ομογένειας της ενέργειας όπως αυτή αναφέρθηκε παραπάνω. Οι αντίστοιχες δύο εξισώσεις προκύπτουν με το να θεωρήσουμε πρόσπτωση τόσο διαμήκους όσο και εγκάρσιου κύματος πάνω στη βασική δομική μονάδα του τυχαίου που εμβαπτίζεται στο ομογενές.

Στα πλαίσια της παρούσας δουλειάς σαν βασική δομική μονάδα διαλέγεται είτε η διπλή σφαίρα εξωτερικής ακτίνας $r_c = a/[f_s]^{1/3}$ (δες Σχ.3.3) που χρησιμοποιήθηκε στα βαθμωτά και ΗΜ κύματα με πιθανότητα μονάδα (η CPA ενέργειας με αυτή τη βασική δομική μονάδα θα χαρακτηρίζεται σαν E-CPA1) είτε το σύστημα των δύο σφαιρών που ορίζεται στην coated CPA με τις ίδιες πιθανότητες κι ακτίνες (E-CPA2).

Η απαίτηση ομογένειας της ενέργειας, για την περίπτωση της E-CPA2, οδηγεί στις δύο παρακάτω αυτοσυνεπώς επιλύσιμες εξισώσεις

$$p_1 \int_0^{r_1} \tilde{E}_l^c r^2 dr + p_2 \int_0^{r_2} \tilde{E}_l^s r^2 dr = \frac{1}{2} \rho_m \omega^2 [p_1 \frac{r_1^3}{3} + p_2 \frac{r_2^3}{3}] \quad (3.19)$$

$$p_1 \int_0^{r_1} \tilde{E}_t^c r^2 dr + p_2 \int_0^{r_2} \tilde{E}_t^s r^2 dr = \frac{1}{2} \rho_m \omega^2 [p_1 \frac{r_1^3}{3} + p_2 \frac{r_2^3}{3}] \quad (3.20)$$

Το σύμβολο \tilde{E} δηλώνει τη μέση τιμή της πυκνότητας ενέργειας, E , ως προς χρόνο και ως προς όλες τις διευθύνσεις (για τον υπολογισμό της \tilde{E} βλέπε παραρτήματα Β και Γ). Οι δείκτες l και t δηλώνουν ότι αυτή η πυκνότητα ενέργειας υπολογίστηκε θεωρώντας πρόσπτωση διαμήκους και εγκάρσιου κύματος αντίστοιχα ενώ οι c και s ότι στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων έχει τοποθετηθεί αντίστοιχα η coated και η απλή (simple) σφαίρα. Το δεξιό μέλος των 3.19 και 3.20 υπολογίστηκε παίρνοντας υπόψη ότι η πυκνότητα ενέργειας για διαμήκες και εγκάρσιο επίπεδο κύμα συχνότητας ω που διαδίδεται σε ομογενές μέσο πυκνότητας ρ_m δίδεται από $\tilde{E} = \rho_m \omega^2 / 2$.

Στα πλαίσια της παρούσας δουλειάς, η πυκνότητα ρ_m (η γνώση της οποίας είναι απαραίτητη τόσο για τον υπολογισμό 3.19 και 3.20 όσο και για τον περαιτέρω υπολογισμό του μιγαδικού φαινομένου μέσου, G_e) προσεγγίζεται από τον μέσο όρο των πυκνοτήτων σκεδαστών περιβάλλοντος μέσου ($\rho_m = f_s \rho_i + (1 - f_s) \rho_o$) ή από εκφράσεις που έχουν εξαχθεί για το όριο χαμηλών συχνοτήτων [54, 55] - με πρακτικά τα ίδια αποτελέσματα.

Τέλος, τα μιγαδικά κυματανύσματα q_{le} και q_{te} από τα οποία προκύπτουν οι ταχύτητες φάσης και οι μέσες ελεύθερες διαδρομές υπολογίζονται από

$$q_{le}^2 = k_{lm}^2 - \Sigma_{llm}(\omega) \quad (3.21)$$

$$q_{te}^2 = k_{tm}^2 - \Sigma_{ttm}(\omega) \quad (3.22)$$

όπου

$$\Sigma_{jjm}(\omega) = -4\pi \sum_i n_i f_{jji}(0) \quad (j = l, t) \quad (3.23)$$

Στην εξίσωση 3.23, $f_{lli}(0)$ ($f_{tli}(0)$) είναι το διαμήκες (εγκάρσιο) πλάτος σκέδασης στη διεύθυνση πρόσπτωσης για διαμήκες (εγκάρσιο) (δες Εξ.3.16) επίπεδο προσπίπτον κύμα που σκεδάζεται από ένα σκεδαστή τύπου i τοποθετημένο στο ομογενές μέσο G_m και n_i είναι η συγκέντρωση του i τύπου σκεδαστών. Για διάταξη σκέδασης αυτή της coated CPA (E-CPA2), $n_1 = f_s/V$ και $n_2 = [1 - n_1 V_1]/V_2$ ($V_j = 4\pi r_j^3/3$ ($j = 1, 2$), $V = 4\pi a^3/3$).

Ταχύτητα ενέργειας

Ο υπολογισμός της ταχύτητας ενέργειας, v_E , στα πλαίσια της CPA ενέργειας γίνεται με αφετηρία τη θεωρία που αναπτύχθηκε στο όριο των χαμηλών συγκεντρώσεων σκεδαστών [32, 34, 35, 31]. Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή η ταχύτητα ενέργειας δίδεται από την παρακάτω συνάρτηση της σκέδασης, $\Sigma_o(\omega) (= -4\pi n f(0))$, ανάμεσα σε ένα σκεδαστή του τυχαίου συστήματος και στο περιβάλλον του μέσο k_o

$$v_E = \frac{\omega \sqrt{k_o^2 - \Re[\Sigma_o]}}{k_o^2 (1 + \delta)} \quad (3.24)$$

Η ποσότητα δ , χαρακτηριστική στη διάδοση των κλασικών κυμάτων (για ηλεκτρονία $\delta = 0$)¹⁸, μπορεί επίσης να εκφραστεί σαν συνάρτηση της σκέδασης

¹⁸Η διαφορά κλασικών κυμάτων και ηλεκτρονίων σε αυτό το σημείο πηγάζει από τη διαφορετική τάξη της χρονικής παραγωγού στις αντίστοιχες εξισώσεις.

ανάμεσα στον σκεδαστή και το περιβάλλον μέσο. Το δ είναι ανάλογο του χρόνου που καταναλώνει το κύμα μέσα στους σκεδαστές ο οποίος με τη σειρά του δρέθηκε να είναι ανάλογος της ενέργειας που συγκεντρώνεται μέσα σε κάθε σκεδαστή. Έτσι το δ γίνεται μέγιστο κοντά στους συντονισμούς της ενεργού διατομής σκέδασης από ένα σκεδαστή (συντονισμός συνήθως σημαίνει μέγιστη συγκέντρωση του κύματος μέσα στον σκεδαστή) δίνοντας τα ελάχιστα στην v_E που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή.

Στα πλαίσια της CPA ενέργειας τώρα, η ταχύτητα ενέργειας v_E , υπολογίζεται από την ίδια με την έκφραση 3.24 συνάρτηση, στην οποία το περιβάλλον μέσο k_o αντικαθίσταται από το ομογενές μέσο k_m ενώ ο απλός σκεδαστής μέσω του οποίου υπολογίζεται η ιδιοενέργεια, Σ , αντικαθίσταται από τη βασική ή τις βασικές δομικές μονάδες του τυχαίου συστήματος που εμβαπτίζονται στο k_m . Αποτέλεσμα είναι η έκφραση

$$v_E = \frac{\omega}{k_m^2} \frac{\sqrt{k_m^2 - \Re[\Sigma_m]}}{1 + \delta} \quad (3.25)$$

όπου τα Σ και δ υπολογίζονται σχετικά με το μέσο k_m .

Η έκφραση 3.25 στα πλαίσια της CPA ενέργειας χρησιμοποιείται για κάθε συγκέντρωση. Η ισχύς για κάθε συγκέντρωση δικαιολογείται από το ότι αντικαθιστώντας το πραγματικό μέσο γύρω από κάθε σκεδαστή με ένα προσεγγιστικό ομογενές μέσο - ο υπολογισμός του οποίου λαμβάνει υπόψη του φαινόμενα πολλαπλής σκέδασης - η κατάσταση πλησιάζει εκείνη των ανεξάρτητων σκεδάσεων, η οποία μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από τη θεωρία χαμηλών συγκεντρώσεων.

Το πλεονέκτημα τώρα της επιλογής του k_m με την υπόθεση της CPA ενέργειας είναι το ότι λόγω ομογένειας της ενέργειας δεν θα υπάρχει επιπλέον καθυστέρηση του κύματος στο πραγματικό μέσο σχετικά με το μέσο k_m . Έτσι, περιμένει κανείς η ποσότητα δ στον τύπο 3.25 (η οποία έχει υπολογιστεί μέσω ακριβούς θεωρίας μόνο για βαθμωτά κύματα και η επέκταση της στα ΗΜ είχε για πολύ καιρό αμφισβητηθεί) να είναι περίπου ίση με μηδέν και να μπορεί να αγνοηθεί.

Πράγματι, τόσο για ΗΜ όσο και για βαθμωτά κύματα η έκφραση 3.25 με $\delta = 0$ έδωσε αποτελέσματα που προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά τα πειραματικά δεδομένα τόσο για χαμηλές όσο και για υψηλότερες συγκεντρώσεις.

Δυστυχώς για ακουστικά κι ελαστικά κύματα η κατάσταση είναι περισσότερο σύνθετη. Στα πλαίσια εφαρμογής της CPA ενέργειας σε διάδοση ακουστικών κι ελαστικών κυμάτων - όπως αποδείχτηκε στους υπολογισμούς αυτής της εργασίας - η ποσότητα δ , ενώ είναι αρκετά μικρή, δεν είναι αμελητέα ώστε να αγνοηθεί εντελώς - ιδιαίτερα σε χαμηλές συχνότητες.

Ο λόγος για αυτή τη διαφορά των ακουστικών κι ελαστικών σχετικά με τα βαθμωτά και ΗΜ κύματα πηγάζει από την ύπαρξη της πυκνότητας σαν ανεξάρτητης παραμέτρου για τον καθορισμό της διάδοσης σε ένα ελαστικό μέσο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η επιλογή της πυκνότητας, ρ_m , του ομογενούς μέσου επηρεάζει αισθητά την τιμή του δ . Η επιρροή αυτή μειώνεται όσο αυξάνει η συχνότητα. Για ενδιαμέσες και υψηλές συχνότητες το δ είναι πολύ μικρό και σχεδόν ανεξάρτητο από την επιλογή του ρ_m . Θα πρέπει να σημειωθεί πάντως, κι εκεί βασίζεται η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που παρουσιάζονται, ότι η εξάρτηση των k_m , Σ_m και $\delta (= \delta_m)$ από το ρ_m είναι τέτοια ώστε να οδηγεί σε πρακτικά ίδια

ταχύτητα v_E για κάθε επιλογή του ρ_m .

Μια επιπλέον διαφορά των ακουστικών κι ελαστικών από τα βαθμωτά και ΗΜ κύματα, η οποία σχετίζεται άμεσα με την ταχύτητα ενέργειας και την εξάρτηση της από τη συχνότητα όπως αυτή ερμηνεύτηκε στην εισαγωγή, πηγάζει από τη φύση των συντονισμών της ενεργού διατομής σκέδασης. Όπως συζητήθηκε στο κεφάλαιο 2, στη σκέδαση ακουστικών κι ελαστικών κυμάτων υπάρχουν συντονισμοί προερχόμενοι από την σκληρή ή άδεια σφαίρα. Οι συντονισμοί αυτοί δεν συνοδεύονται από μεγάλη συγκέντρωση ενέργειας μέσα στη σφαίρα. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται ότι η εξάρτηση της v_E από τη συχνότητα δεν περιμένει κανείς να έχει σε όλες τις περιπτώσεις την τυπική μορφή που παρατηρήθηκε και ερμηνεύτηκε τόσο στα βαθμωτά όσο και στα ΗΜ κύματα.

Ερχόμενοι τώρα σε εφαρμογή της CPA ενέργειας στην περίπτωση των πλήρως διανυσματικών ελαστικών κυμάτων η κατάσταση γίνεται ακόμα περισσότερο περίπλοκη. Εδώ, το αποτέλεσμα της προσέγγισης του τυχαίου μέσου με ομογενές, είναι ο υπολογισμός δύο ταχυτήτων διάδοσης της ενέργειας μία για διαμήκεις προσπίπτον κύμα και μία για εγκάρσιο. Το πρόβλημα του κατά πόσον έχει κάποιο φυσικό νόημα για το τυχαίο μέσο - όπου το νόημα προσπίπτοντος κύματος μίας μόνο πόλωσης εξαφανίζεται - η ύπαρξη δύο διαφορετικών ταχυτήτων ενέργειας και του πώς σχετίζονται οι ταχύτητες αυτές με τον συντελεστή διάχυσης στο μέσο είναι ένα από τα ανοιχτά προβλήματα στη διάδοση ελαστικών κυμάτων. Το πρόβλημα αυτό, το οποίο πηγάζει από τη διαφορά μεταξύ ομογενών και τυχαίων μέσων όσον αφορά τη σύζευξη ή μη της διαμήκους και της εγκάρσιας συνιστώσας του κύματος, είναι απόρροια του γενικού ερωτήματος κατά πόσο το φαινόμενο μέσο (ένα ομογενές μέσο στο οποίο διαμήκεις και εγκάρσιο κύμα είναι ασύζευκτα) μπορεί να προσεγγίσει το τυχαίο όπου συμβαίνουν συνεχείς μετατροπές διαμήκους κύματος σε εγκάρσιο και αντίστροφα, όσον αφορά μεγέθη που ενδιαφέρουν στην περίπτωση που η πολλαπλή σκέδαση κυριαρχεί τη διάδοση.

Παρακάτω αναφέρεται ο υπολογισμός της ταχύτητας ενέργειας στην περίπτωση διάδοσης ακουστικών κυμάτων όταν δηλαδή το τυχαίο σύστημα μακροσκοπικά είναι ρευστό. Αυτό μπορεί να συμβεί για σκεδαστές από είτε ρευστό είτε στερεό σε ρευστό περιβάλλον μέσο. Για διάδοση ακουστικών κυμάτων η ταχύτητα ενέργειας, v_E , δίδεται από την έκφραση 3.25. Στην 3.25 το $k_m = k_{lm}$ είναι το κυματάνυσμα που υπολογίζεται από την υλοποίηση της απαίτησης ομογένειας της ενέργειας, εξίσωση 3.19. Η συνάρτηση $\Sigma_m = \Sigma_{ilm}$ δίδεται από την έκφραση 3.23 ενώ η ποσότητα $\delta = \delta_m$ από $\delta = \sum_i n_i \delta_i$ ($i = 1, 2$) [34, 35, 38, 39] με

$$\delta_i = 4\pi \Re \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}'_m)}{\partial k_m^2} \right] + \int d\Omega \frac{d\sigma^i}{d\Omega} \frac{\partial \phi^i_{\mathbf{k}_m \mathbf{k}'_m}}{\partial k_m} \quad (3.26)$$

Στη σχέση 3.26

$$f_i = f_{li} \quad (\text{δες Εξ.3.23}), \quad \frac{d\sigma^i}{d\Omega} = |f_i(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}'_m)|^2$$

$$\text{και } f_i(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}'_m) = -|f_i(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}'_m)| \exp[i\phi^i_{\mathbf{k}_m \mathbf{k}'_m}]. \quad (3.27)$$

Αντικαθιστώντας τις 3.27 στην 3.26, η ποσότητα δ_i μπορεί να πάρει την πιο απλή και πρόσφορη για αριθμητικούς υπολογισμούς μορφή

$$\delta_i = 4\pi \frac{\omega}{k_m} \Re \left[\frac{1}{2k_m} \frac{\partial f_i(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}_m)}{\partial \omega} \right] + \frac{\omega}{k_m} \int d\Omega \Im \{ [f_i(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}'_m)]^* \frac{\partial f_i(\mathbf{k}_m, \mathbf{k}'_m)}{\partial \omega} \} \quad (3.28)$$

3.4 Προσεγγιστικά αποτελέσματα

3.4.1 Όριο χαμηλών συχνοτήτων

Όπως συζητήθηκε στο κεφάλαιο 2 τα πλάτη σκέδασης σε χαμηλές συχνότητες τείνουν στο μηδέν σαν ω^2 . Γράφοντας το κάθε πλάτος σκέδασης σαν άθροισμα μερικών πλατών (συνεισφορών από κάθε μερικό σφαιρικό κύμα) διαπιστώνει κανείς ότι ο ανάλογος με ω^2 όρος στο ανάπτυγμα για μικρές συχνότητες προέρχεται από τα $n = 0$ και $n = 1$ σφαιρικά κύματα. Για $n \geq 2$ τα μερικά πλάτη σκέδασης τείνουν στο μηδέν σαν ω^ℓ με $\ell \geq 3$ (για ρευστά $\ell = 2n$). Έτσι, εφαρμόζοντας τη συνθήκη της CPA στο όριο χαμηλών συχνοτήτων, αρκεί κανείς να απαιτήσει τον μηδενισμό μόνο των δύο πρώτων όρων ($n = 0$ και $n = 1$) στο $\langle f_{ll}(0) \rangle_c$ και του $n = 1$ όρου στο $\langle f_{tt}(0) \rangle_c$.

Ο μηδενισμός του πρώτου ($n = 0$) όρου του $\langle f_{ll}(0) \rangle_c$ για τυχαίο σύστημα στερεών και στα πλαίσια της απλής CPA οδήγησε στην έκφραση

$$f_s \frac{B_i - B_e}{3B_i + 4\mu_e} + (1 - f_s) \frac{B_o - B_e}{3B_o + 4\mu_e} = 0 \quad (3.29)$$

όπου B είναι το υδροστατικό μέτρο ελαστικότητας ($B = \lambda + \frac{2}{3}\mu$).

Για μακροσκοπικά ρευστά συστήματα ($\mu_e = \mu_o = 0$), αποτέλεσμα του μηδενισμού της $n = 0$ συνεισφοράς στο $\langle f_{ll}(0) \rangle_c$ στα πλαίσια τόσο της απλής CPA όσο και και μιας coated CPA με βασική μονάδα σκέδασης μία μόνο coated σφαίρα εξωτερικής ακτίνας $r_c = a/[f_s]^{1/3}$ είναι η έκφραση

$$\frac{1}{B_e} = \frac{f_s}{B_i} + \frac{1 - f_s}{B_o} \quad (3.30)$$

η οποία είναι γνωστή σαν νόμος του Wood [29].

Ο μηδενισμός του $n = 1$ όρου στο $\langle f_{ll}(0) \rangle_c$ οδήγησε στην ίδια σχέση με τον μηδενισμό του $n = 1$ όρου στο $\langle f_{tt}(0) \rangle_c$, η οποία είναι σχέση ανάμεσα μόνο στις πυκνότητες ρ_i, ρ_o και ρ_e και η οποία διαφέρει ανάλογα με τη διάταξη σκέδασης που χρησιμοποιείται. Στα πλαίσια της CPA με βασική μονάδα σκέδασης μία μόνο coated σφαίρα εξωτερικής ακτίνας r_c , το ρ_e τόσο για στερεά όσο και για ρευστά υπολογίστηκε σαν

$$\rho_e = \rho_o \frac{f_s(\rho_i - \rho_o) + 2\rho_i + \rho_o}{2f_s(\rho_o - \rho_i) + 2\rho_i + \rho_o} \quad (3.31)$$

Στα πλαίσια της απλής CPA η εξαχθείσα έκφραση του ρ_e για τυχαίο σύστημα ρευστών ($\mu_i = \mu_o = \mu_e = 0$) είναι

$$f_s \frac{\rho_i - \rho_e}{2\rho_i + \rho_e} + (1 - f_s) \frac{\rho_o - \rho_e}{2\rho_o + \rho_e} = 0 \quad (3.32)$$

ενώ για στερεά ($\mu_i, \mu_o, \mu_e \neq 0$)

$$\rho_e = f_s \rho_i + (1 - f_s) \rho_o \quad (3.33)$$

3.4.2 Όριο χαμηλών συγκεντρώσεων

Όσον αφορά το όριο χαμηλών συγκεντρώσεων, μπορεί να πάρει κανείς αναλυτικό αποτέλεσμα θεωρώντας τη διαφορά ανάμεσα στο περιβάλλον μέσο του πραγματικού συστήματος και το φαινόμενο μέσο σαν μικρή ποσότητα, αναπτύσσοντας τη συνθήκη της CPA ως προς αυτή τη μικρή ποσότητα και κρατώντας όρους πρώτης τάξης ως προς τη συγκέντρωση. Για διάταξη σκέδασης αυτή της απλής CPA η παραπάνω διαδικασία οδηγεί σε εκφράσεις για τις μέσες ελεύθερες διαδρομές σκέδασης. Για την πλήρη ελαστική περίπτωση (τυχαίο σύστημα στερεών) βρίσκουμε

$$l_l = \frac{1}{n\sigma_l} \quad (3.34)$$

$$l_t = \frac{1}{n\sigma_t} \quad (3.35)$$

όπου n είναι η συγκέντρωση των σφαιρών στο τυχαίο σύστημα και σ_l (σ_t) η ενεργός διατομή σκέδασης διαμήκους (εγκάρσιου) κύματος από μία σφαίρα.

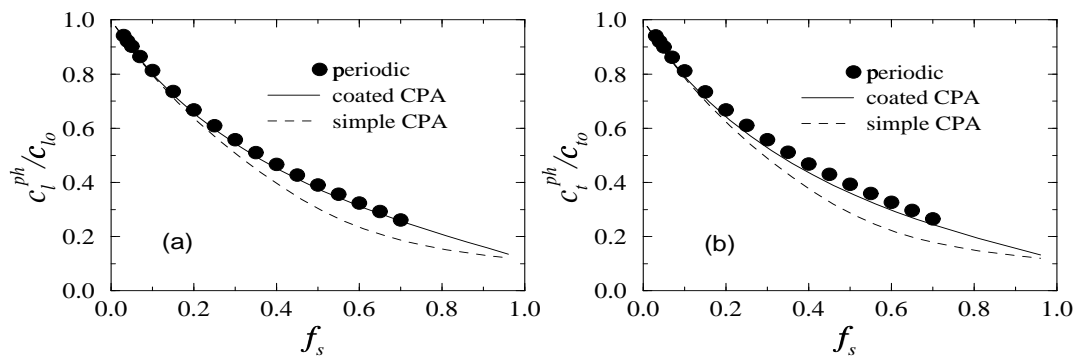
3.5 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στα υπολογιστικά αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω γίνεται κατ'αρχήν μια σύγκριση απλής και coated CPA όσον αφορά υπολογισμό χαρακτηριστικών της διάδοσης. Σε δεύτερο δήμα συζητούνται τυπικές μορφές των χαρακτηριστικών αυτών για διάφορες περιπτώσεις υλικών. Επίσης γίνεται μια σύγκριση με τα πειραματικά δεδομένα. Τέλος παρουσιάζονται και σχολιάζονται διαγράμματα για την ταχύτητα ενέργειας.

Η παρουσίαση και η προσπάθεια κατανόησης και ερμηνείας γίνεται σε στενή σύνδεση με το πρόβλημα της σκέδασης από μία μόνο σφαίρα. Το γεγονός ότι η σκέδαση από μία σφαίρα κατάφερε να περιγράψει τη διάδοση σε περιοδικά συστήματα, συνδυαζόμενο με το ότι η διάδοση τόσο σε περιοδικά όσο και σε τυχαία συστήματα καθορίζεται από του ίδιους μηχανισμούς (σκέδαση και συμβολή των πολλαπλά σκεδαζομένων κυμάτων) δικαιολογεί αυτό τον τρόπο αντιμετώπισης. Ο προσανατολισμός στη σκέδαση από μία σφαίρα υποκινείται επιπλέον κι από την εμπειρία από τη διάδοση HM και βαθωτών κυμάτων (βλέπε ερμηνεία για την εξάρτηση της ταχύτητας ενέργειας από τη συχνότητα).

3.5.1 Σύγκριση απλής και coated CPA

Όσον αφορά την σύγκριση απλής και coated CPA - η οποία έγινε σαν πρώτο δήμα της υπολογιστικής μελέτης - ένα ενδεικτικό αποτέλεσμα είναι εκείνο του σχήματος 3.4. Στο Σχ.3.4 απεικονίζονται οι ταχύτητες φάσης διαμήκους και εγκάρσιου κύματος που διαδίδεται σε σύστημα σφαιρών (από υψηλής πυκνότητας, υψηλής ταχύτητας υλικό) τυχαία τοποθετημένων σε ομογενές (χαμηλής ταχύτητας, χαμηλής πυκνότητας) περιβάλλον μέσο, σαν συνάρτηση της συγκέντρωσης. Τόσο οι σφαίρες όσο και το περιβάλλον μέσο είναι "σκληρά" στερεά ($c_l/c_t \approx \sqrt{2}$). Ο υπολογισμός έγινε σε χαμηλές συχνότητες, περιοχή βέλτιστης ισχύος της CPA (σε χαμηλές συχνότητες - μεγάλα μήκη κύματος - τα χαρακτηριστικά της διάδοσης είναι συνάρτηση μόνο της



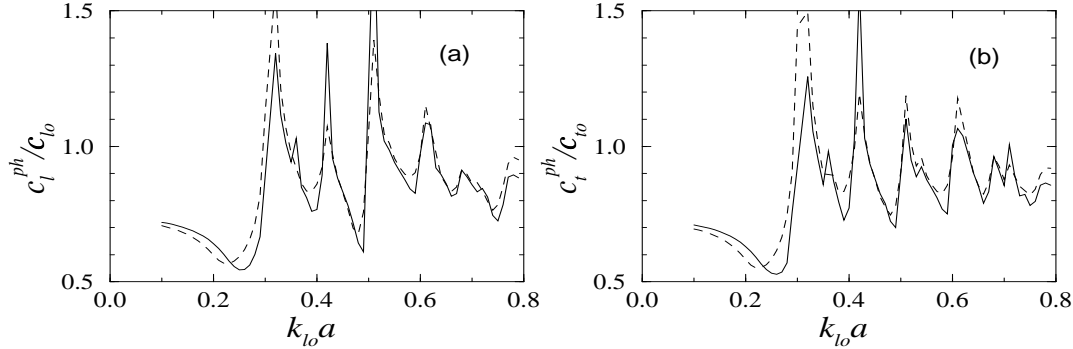
Σχ.3.4: Ταχύτητες φάσης διαμήκους (c_l^{ph}) και εγκάρσιου (c_t^{ph}) κύματος που διαδίδεται σε τυχαίο σύστημα σφαιρών μέσα σε ομογενές μέσο σαν συνάρτηση του ποσοστού του όγκου των σφαιρών, f_s . Οι παράμετροι του συστήματος είναι $\rho_o/\rho_i = 1/4$, $c_{l0}/c_{li} = 8.66$, $c_i/c_t = 1.4143$. Οι ταχύτητες υπολογίστηκαν σε συχνότητα $\omega a/c_{l0} = 0.05$ (a : ακτίνα σφαιρών). Οι δείκτες l και t δηλώνουν το διαμήκες και εγκάρσιο αντίστοιχα ενώ οι i και o τις σφαίρες και το περιβάλλον μέσο. Οι κύκλοι δείχνουν το αποτέλεσμα στο αντίστοιχο fcc περιοδικό πρόβλημα, η συνεχής γραμμή το αποτέλεσμα της coated CPA και η διακεκομμένη το αποτέλεσμα της απλής CPA.

συχνότητας όπως δέχεται η CPA). Η σύγκριση απλής και coated CPA γίνεται μέσω σύγκρισης με ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα του αντίστοιχου fcc περιοδικού προβλήματος. Τα αποτελέσματα αυτά, λόγω του ότι το μήκος κύματος είναι αρκετά μεγαλύτερο από τα διάφορα χαρακτηριστικά μήκη του μέσου και άρα το κύμα βλέπει το μέσο σαν ομογενές, θα πρέπει να ταυτίζονται με τα αποτελέσματα των CPA. Στο Σχ.3.4 η συνεχής γραμμή είναι αποτέλεσμα της coated CPA, η διακεκομμένη αποτέλεσμα της απλής CPA ενώ οι κύκλοι αντιπροσωπεύουν τις ταχύτητες φάσης στο αντίστοιχο fcc περιοδικό πρόβλημα. Στους υπολογισμούς μέσω των CPA η πυκνότητα του φαινόμενου μέσου προσεγγίστηκε από το μέσο όρο των πυκνοτήτων σκεδαστών περιβάλλοντος.

Όπως φαίνεται από το Σχ.3.4, η coated CPA δίνει αποτελέσματα πλησιέστερα σε εκείνα του περιοδικού προβλήματος σε σύγκριση με την απλή. Η απλή CPA ενώ αποκλίνει για ενδιάμεσες συγκεντρώσεις τείνει να επανέλθει όσο το f_s πλησιάζει τη μονάδα. Αυτό είναι αναμενόμενο μια και σε υψηλές συγκεντρώσεις ($f_s \geq 0.64$) οι σκεδαστές είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους κάνοντας τις δύο φάσεις του τυχαίου συστήματος (σκεδαστές-περιβάλλον) να είναι τοπολογικά ισοδύναμες όπως δηλαδή ακριβώς θεωρούνται από την απλή CPA. Διαπιστώθηκε τέλος ότι η coated CPA προσεγγίζει τόσο καλύτερα τα αποτελέσματα του περιοδικού προβλήματος όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος c_o/c_i .

3.5.2 Τυπικές μορφές των χαρακτηριστικών της διάδοσης

Στην παράγραφο που ακολουθεί συζητούνται τυπικές μορφές των χαρακτηριστικών της διάδοσης για διάφορα τυχαία συστήματα σφαιρών σε ομογενές περιβάλλον. Κριτήριο για την επιλογή των συστημάτων, εκτός από την ύπαρξη πειραματικών αποτελεσμάτων με τα οποία γίνεται σύγκριση, είναι και η μορφή της αντίστοιχης ενεργού διατομής σκέδασης από μία σφαίρα, μέσω της οποίας γίνεται προσπάθεια



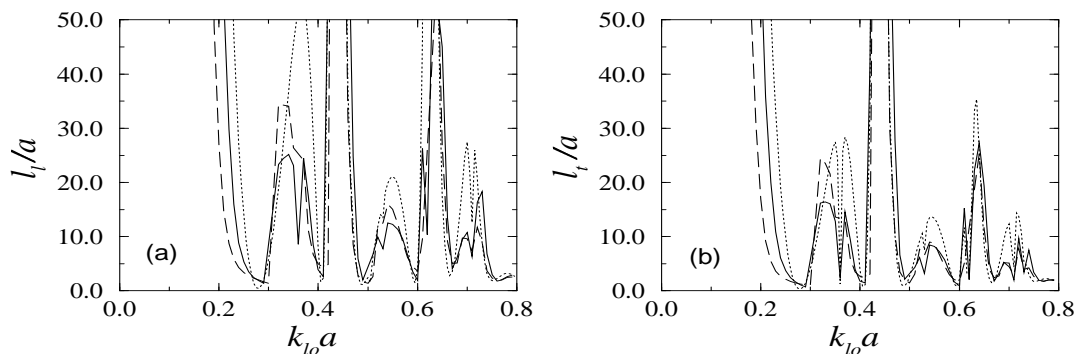
Σχ.3.5: Ταχύτητες φάσης διαμήκους (a) κι εγκάρσιου (b) κύματος σαν συνάρτηση της συχνότητας για το τυχαίο σύστημα που περιγράφεται στο σχήμα 3.4. Οι ταχύτητες υπολογίστηκαν σε ποσοστό όγκου σφαιρών $f_s = 0.144$. Η συνεχής γραμμή δείχνει το αποτέλεσμα της coated CPA ενώ η διακεκομμένη της απλής CPA.

κατανόησης των αποτελεσμάτων.

Τα δύο πρώτα σχήματα, Σχ.3.5 και Σχ.3.6, είναι τυπικά των χαρακτηριστικών της διάδοσης σε συστήματα σκεδαστών χαμηλής ταχύτητας σε υψηλής ταχύτητας περιβάλλον μέσο. Για σκεδαστή χαμηλής ταχύτητας σε υψηλής ταχύτητας περιβάλλον, η ενεργός διατομή - όπως συζητήθηκε στο κεφάλαιο 2 - αποτελείται από οξείες συντονισμούς, ο ένας κοντά στον άλλο, οι οποίοι συνήθως συνοδεύονται από μεγάλη συγκέντρωση ενέργειας μέσα στον σκεδαστή. Τέτοιας μορφής ενεργός διατομή είναι χαρακτηριστική και στην διάδοση HM κυμάτων. Με βάση αυτό περιμένουμε και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στα σχήματα 3.5 και 3.6 να είναι ανάλογα με αυτά που έχουν υπολογιστεί για HM κύματα και να μπορούν να γίνουν κατανοητά με βάση τους ίδιους συλλογισμούς.

Στο Σχ.3.5 δείχνονται οι ταχύτητες φάσης σαν συνάρτηση της συχνότητας για το τυχαίο σύστημα που περιγράφεται στο σχήμα 3.4. Ο υπολογισμός έγινε για ποσοστό όγκου σφαιρών $f_s = 0.144$. Η συγκέντρωση $f_s = 0.144$ είναι εκείνη για την οποία υπάρχει το μέγιστο χάσμα στο αντίστοιχο f_{ce} περιοδικό πρόβλημα [7] οπότε δεν μπορεί να θεωρηθεί χαμηλή συγκέντρωση για το σύστημα. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς από το Σχ.3.5 η ταχύτητα φάσης παρουσιάζει μέγιστα για κάποιες συχνότητες στις οποίες μάλιστα γίνεται αρκετά μεγαλύτερη από την ταχύτητα του (υψηλής ταχύτητας) περιβάλλοντος μέσου. Το γεγονός αυτό έχει το ανάλογο του στην περίπτωση διάδοσης HM κυμάτων όπου η ταχύτητα φάσης γίνεται σε ορισμένες περιπτώσεις μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός. Τα μέγιστα αυτά της ταχύτητας φάσης αντιστοιχούν στις συχνότητες εκείνες στις οποίες υπάρχει κορυφή στην ενεργό διατομή σκέδασης από μία σφαίρα όπως φαίνεται από τα σχήματα 10(a) και 11(a) του πρώτου άρθρου στο παράρτημα Δ. Στις περιοχές αυτές ισχυρής σκέδασης, η ταχύτητα φάσης χάνει το νόημά της - μια και υπάρχει πλήρης απώλεια της φάσης του κύματος - κάνοντας εύλογο το να μην αναζητήσει κανείς κάποιο φυσικό νόημα για τις υπερβολικά υψηλές τιμές της c^{ph} .

Στο Σχ.3.6 δείχνονται σαν συνάρτηση της συχνότητας οι μέσες ελεύθερες διαδρομές σκέδασης διαμήκους (l_l) και εγκάρσιου (l_t) κύματος που διαδίδεται στο σύστημα που περιγράφεται στο σχήμα 3.4. Ο υπολογισμός έγινε κι εδώ σε $f_s = 0.144$. Η συνεχής γραμμή είναι το αποτέλεσμα της απλής CPA, η διακεκομμένη της coated CPA ενώ



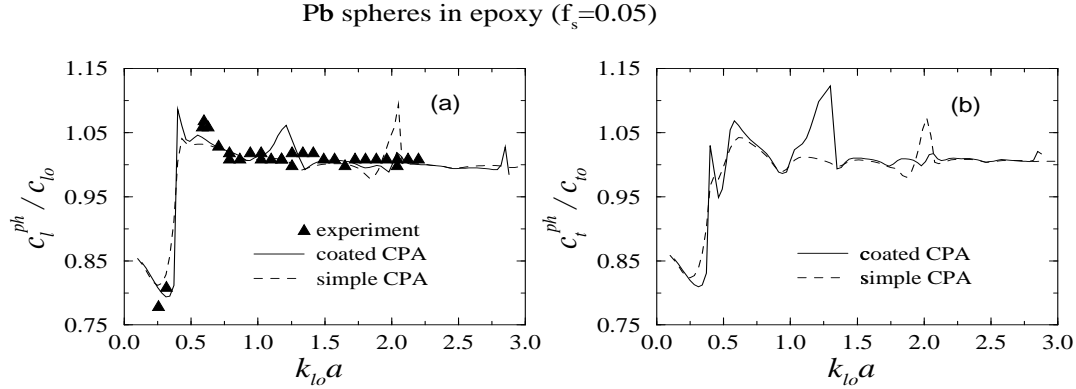
Σχ.3.6: Μέσες ελεύθερες διαδρομές σαν συνάρτηση της συχνότητας για διαμήκες (a) και εγκάρσιο (b) κύμα που διαδίδεται στο τυχαίο σύστημα που περιγράφεται στο σχήμα 3.4. Οι μέσες ελεύθερες διαδρομές υπολογίστηκαν σε ποσοστό όγκου σφαιρών $f_s = 0.144$. Η συνεχής γραμμή δείχνει το αποτέλεσμα της coated CPA, η διακεκομμένη της απλής CPA και η σπικτή το αποτέλεσμα χαμηλής συγκέντρωσης προσεγγιστικών τύπων.

σπικτή είναι αποτέλεσμα των χαμηλής συγκέντρωσης προσεγγίσεων $l_i = 1/n\sigma_i$ (δες εξίσωση 3.34) για το (a) και $l_t = 1/n\sigma_t$ (δες εξίσωση 3.35) για το (b). Τα ελάχιστα στις μέσες ελεύθερες διαδρομές αντιστοιχούν κι εδώ στις συχνότητες συντονισμού του ενός σκεδαστή όπως μπορεί να δει κανείς συγκρίνοντας με τα σχήματα 10(a) και 11(a) του πρώτου άρθρου στο παράρτημα Δ.

Όσον αφορά εξέταση για δυνατότητα εντοπισμού του κύματος στο παραπάνω σύστημα, υπολογίστηκαν οι παράμετροι $(kl)_i = \omega l_i / c_i^{ph}$ και $(kl)_t = \omega l_t / c_t^{ph}$. Τιμές μικρότερες από μονάδα των $(kl)_i$ και $(kl)_t$ βρέθηκαν για συχνότητες $\omega a / c_{i_o} \approx 0.29$ (a : ακτίνα σφαιρών). Το χάσμα στο αντίστοιχο f_{ce} περιοδικό πρόβλημα εμφανίζεται για συχνότητες $\omega a / c_{i_o}$ ανάμεσα σε 0.31 και 0.36. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι όσον αφορά εντοπισμό του ελαστικού κύματος, ο οποίος μπορεί να υπάρξει μόνο σε περιοχές ισχυρής σκέδασης συντονισμού, η αποσύζευξη διαμήκους κι εγκάρσιου κύματος που εισάγει η εξέταση ξεχωριστά της $(kl)_i$ και $(kl)_t$, μπαίνει κάτω από τα ίδια ερωτηματικά που συζητήθηκαν σε σχέση με την ταχύτητα ενέργειας (βλέπε παράγραφο 3.4).

Θα πρέπει να αναφερθεί τέλος ότι η σύγκλιση (δυνατότητα ύπαρξης λύσης, q_{ie}, q_{te}) της CPA για την παραπάνω περίπτωση γίνεται εξαιρετικά δύσκολη ιδιαίτερα στις περιοχές κοντά στους συντονισμούς. Το γεγονός αυτό αντανακλά την αδυναμία του ομογενούς μέσου να περιγράψει τις έντονες μεταβολές στη διάδοση που συμβαίνουν σε αυτές τις περιοχές λόγω των έντονων πολλαπλών σκεδάσεων.

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, ένα από τα κίνητρα για την εφαρμογή της CPA στην περίπτωση ελαστικών κυμάτων είναι κάποια παλιότερα πειράματα μέτρησης της ταχύτητας φάσης. Στα πειράματα αυτά μετρήθηκε η ταχύτητα φάσης διαμήκους κύματος σε σύστημα σφαιρών από μόλυβδο ($\rho = 11.3 \text{ g/cm}^3$, $c_l = 2.21 \text{ km/s}$, $c_t = 0.86 \text{ km/s}$) τυχαία τοποθετημένων σε epoxy ($\rho = 1.202 \text{ g/cm}^3$, $c_l = 2.64 \text{ km/s}$, $c_t = 1.2 \text{ km/s}$) το οποίο σχολιάζουμε στη συνέχεια. Ένα χαρακτηριστικό στο σύστημα αυτό είναι οι παραπλήσιες ταχύτητες σκεδαστών και περιβάλλοντος και ο μικρός λόγος πυκνοτήτων, ρ_o / ρ_i , πράγμα που οδηγεί σε ενεργό διατομή σκέδασης χαρακτηριστική της περίπτωσης μεγάλων χασμάτων (βλέπε κεφ. 2.3.4). Στο Σχ.3.7 δείχνονται τα πειραματικά αποτελέσματα (τρίγωνα)



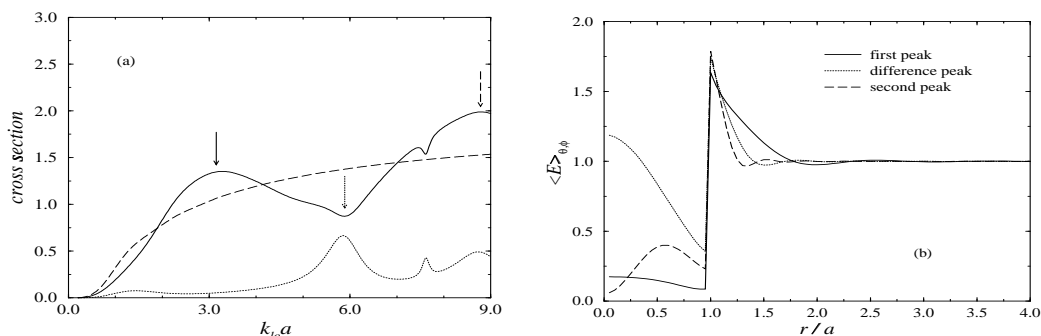
Σχ. 3.7: Ταχύτητες φάσης σαν συνάρτηση της συχνότητας για διαμήκες (c_t^{ph}) και εγκάρσιο (c_t^{ph}) κύμα που διαδίδεται σε σύστημα σφαιρών από μόλυβδο τυχαία τοποθετημένων σε epoxy. Ποσοστό όγκου σφαιρών, $f_s = 0.05$. Τα τρίγωνα δείχνουν το πειραματικό αποτέλεσμα, η συνεχής γραμμή το αποτέλεσμα της coated CPA και η διακεκομμένη της απλής CPA. $k_{l0}a = \omega a / c_{l0}$, a : ακτίνα σφαιρών.

των Kinra et al [40] για ποσοστό όγκου σκεδαστών $f_s = 0.05$, όπως επίσης και οι ταχύτητες φάσης c_t^{ph} και c_t^{ph} υπολογισμένες στα πλαίσια της απλής (διακεκομμένη γραμμή) και της coated (συνεχής γραμμή) CPA (στους υπολογισμούς αυτούς η πυκνότητα του φαινόμενου μέσου υπολογίστηκε αυτοσυνεπώς απαιτώντας μηδενισμό του $\langle f_{it}(\theta = \pi/2) \rangle_c$). Όπως μπορεί να δει κανείς από το σχήμα, το αποτέλεσμα των CPA προσεγγίζει παρά πολύ ικανοποιητικά το αντίστοιχο πειραματικό αποτέλεσμα.

Για το σχολιασμό της μορφής των ταχυτήτων φάσης θα πρέπει να αναφερθεί κατ' αρχήν ότι η συγκέντρωση $f_s = 0.05$ είναι σχετικά χαμηλή συγκέντρωση για το σύστημα (το χάσμα στο αντίστοιχο περιοδικό πρόβλημα εμφανίζεται σε ποσοστό όγκου μολύβδου μεγαλύτερο από 10%). Η ενεργός διατομή σκέδασης για σφαίρα από μόλυβδο θυθισμένη σε epoxy (η οποία δείχνεται στο Σχ.1 του δεύτερου άρθρου του παραρτήματος Δ) αποτελείται από σχετικά υψηλούς αλλά και ευρείς συντονισμούς - πράγμα που συνεπάγεται όχι ισχυρή παγίδευση του κύματος μέσα στη σφαίρα - χωρισμένους από μια περιοχή επίσης σημαντικής σκέδασης (λόγω συνεισφοράς της άπειρα σκληρής σφαίρας).

Η χαμηλή συγκέντρωση, συνδυαζόμενη με την όχι οξεία μορφή των συντονισμών της ενεργού διατομής, κάνουν αναμενόμενο μικρές μόνο αποκλίσεις από τη σύμφωνη διάδοση του κύματος στο σύστημα του σχήματος 3.7. Οι ταχύτητες φάσης οι οποίες όπως φαίνεται από το σχήμα δεν παρουσιάζουν αφύσικες τιμές πιστοποιούν το γεγονός αυτό. Επίσης οι ταχύτητες φάσης φαίνεται να επηρεάζονται μόνο από τον πρώτο συντονισμό της ενεργού διατομής ενώ για $k_{l0}a \geq 1$ είναι σχεδόν σταθερές και κοντά στις ταχύτητες των δύο συστατικών του συστήματος. Θα πρέπει να σημειωθεί τέλος ότι η δυνατότητα της CPA να δώσει αποτελέσματα για το παραπάνω σύστημα σε υψηλότερες συγκεντρώσεις είναι πολύ περιορισμένη - ιδιαίτερα στην περιοχή συχνοτήτων μεταξύ των συντονισμών της ενεργού διατομής¹⁹. Χαρακτηριστικό της

¹⁹Όπως συζητήθηκε στο κεφάλαιο 2 η περιοχή αυτή είναι περιοχή ισχυρής σκέδασης στην οποία μάλιστα το κύμα δεν μπορεί να διαπεράσει εύκολα τις σφαίρες. Άρα υπάρχει μεγάλη απόκλιση από τη σύμφωνη διάδοση.



Σχ. 3.8: (a) : Αδιάστατη ενεργός διατομή σκέδασης σαν συνάρτηση της συχνότητας $k_{l_0} a = \omega a/c_{l_0}$ για σφαίρα από γυαλί (συνεχής γραμμή) σε νερό και για “άπειρα σκληρή” σφαίρα σε νερό (διακεκομμένη γραμμή). Η στικτή γραμμή δείχνει την ενεργό διατομή που προκύπτει αν από το πλάτος σκέδασης της σκληρής σφαίρας αφαιρεθούν τα πλάτη σκέδασης της σφαίρας από γυαλί. (b) : Πυκνότητα ενέργειας σαν συνάρτηση της απόστασης, r , από το κέντρο της σφαίρας για τις τρεις συχνότητες που δείχνουν τα βέλη στο (a) (η συνεχής γραμμή στο (b) αντιστοιχεί στη συχνότητα που δείχνει το βέλος με την συνεχή γραμμή στο (a) κοκ.) a : ακτίνα σφαίρας, c_{l_0} ταχύτητα ήχου στο νερό.

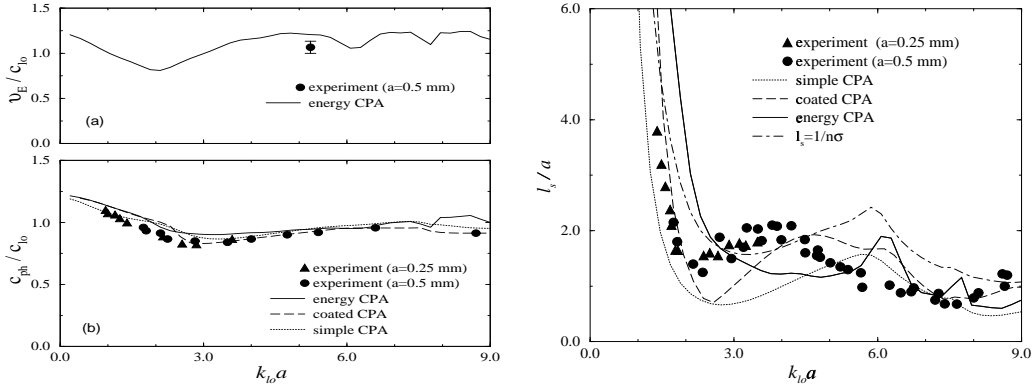
περιοχής αυτής είναι τα προβλήματα σύγκλισης και οι πολλαπλές αφύσικες λύσεις.

Δεύτερο σύστημα το οποίο έχει μελετηθεί πειραματικά και το οποίο παρουσιάζεται αμέσως παρακάτω είναι σύστημα σφαιρών από γυαλί ($\rho = 2.5 \text{ g/cm}^3, c_l = 5.7 \text{ km/s}, c_t = 3.4 \text{ km/s}$), τυχαία θυθισμένων σε νερό ($\rho = 1 \text{ g/cm}^3, c_l = 1.5 \text{ km/s}$) σε ποσοστό όγκου 63% (σημειώνεται ότι σ’αυτή την περίπτωση η ταχύτητα στο περιβάλλον μέσο είναι πολύ χαμηλότερη από εκείνες στον σκεδαστή). Η ενεργός διατομή, σ , για σφαίρα από γυαλί θυθισμένη σε νερό δείχνεται στο σχήμα 3.8(a) (συνεχής γραμμή). Χαρακτηριστικά της είναι η όχι έντονη εξάρτηση από την συχνότητα και οι σχετικά χαμηλοί κι ευρείς συντονισμοί στους οποίους μάλιστα το κύμα δεν έχει τάσεις συγκέντρωσης μέσα στη σφαίρα (συντονισμοί που οφείλονται σε συνεισφορά της “άπειρα σκληρής” σφαίρας). Το τελευταίο φαίνεται από την στικτή γραμμή του σχήματος 3.8(a) όπου εικονίζεται η ενεργός διατομή, σ_{sb} , που προκύπτει αν από το πλάτος σκέδασης της σφαίρας από γυαλί αφαιρεθεί το πλάτος σκέδασης της σκληρής σφαίρας (δες κεφάλαιο 2). Οι κορυφές της σ_{sb} αντιστοιχούν σε περιοχές μέγιστης συγκέντρωσης του κύματος μέσα στη σφαίρα (η έλλειψη ισχυρής συγκέντρωσης του κύματος στους συντονισμούς της σ και η μεγαλύτερη συγκέντρωση στις κορυφές της σ_{sb} πιστοποιούνται και από το διάγραμμα 3.8(b) όπου εικονίζεται η πυκνότητα ενέργειας σαν συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο της σφαίρας).

Με βάση την ασθενή εξάρτηση της ενεργού διατομής από τη συχνότητα, περιμένει κανείς για το τυχαίο σύστημα σφαίρες γυαλιού σε νερό, ασθενή εξάρτηση των ταχυτήτων και των άλλων χαρακτηριστικών της διάδοσης από τη συχνότητα. Περιμένει επίσης ταχύτητες πλησιέστερα σε αυτή του νερού ακόμα και σε μεγάλες συγκεντρώσεις, απόρροια των χαμηλών τιμών της σ_{sb} .

Το πειραματικό αποτέλεσμα για την ταχύτητα φάσης [45], τη μέση ελεύθερη διαδρομή σκέδασης [45] και την ταχύτητα ενέργειας [44] το οποίο δείχνεται στο Σχ.3.9 πιστοποιεί τις παραπάνω προβλέψεις.

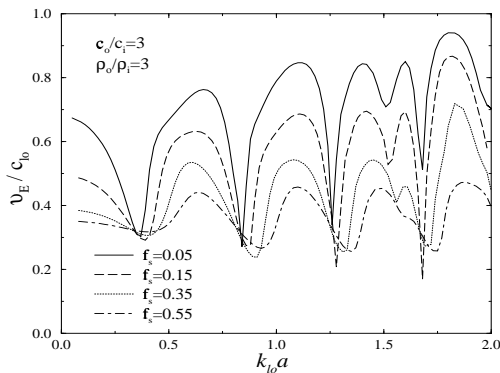
Στο Σχ.3.9 φαίνονται επίσης τα αποτελέσματα των CPA. Παρατηρεί κανείς ότι



Σχ. 3.9: Ταχύτητα ενέργειας v_E (a), ταχύτητα φάσης c_{ph} (b) και μέση ελεύθερη διαδρομή σκέδασης, l_s , (δεξιό πλαίσιο) σαν συνάρτηση της συχνότητας $k_{l_0}a = \omega a/c_{l_0}$ για σφαίρες γυαλιού τυχαία βυθισμένες σε νερό. Ποσοστό όγκου γυαλιού, $f_s = 0.63$. Τα τρίγωνα και οι κύκλοι δείχνουν το πειραματικό αποτέλεσμα για σφαίρες ακτίνας 0.25 mm και 0.5 mm αντίστοιχα. Η συνεχής, διακεκομμένη και στικτή γραμμή δείχνουν αντίστοιχα το αποτέλεσμα της CPA ενέργειας, της coated CPA και της απλής CPA. Η στικτή-διακεκομμένη γραμμή στη μέση ελεύθερη διαδρομή δίνει τη χαμηλής συγκέντρωσης προσέγγιση $l_s = 1/n\sigma$. c_{l_0} είναι η ταχύτητα του ήχου στο νερό.

το αποτέλεσμα της coated CPA (διακεκομμένη γραμμή) προσεγγίζει πάρα πολύ ικανοποιητικά το αντίστοιχο πειραματικό αποτέλεσμα. Οι αποκλίσεις, όπου υπάρχουν, καθώς και αναλυτική σύγκριση των μεθόδων σε αυτή την περίπτωση σχολιάζονται εκτεταμένα στο τέταρτο άρθρο του παραρτήματος Δ. Αξίζει να αναφερθεί εδώ ότι οι αποκλίσεις πειραματικών αποτελεσμάτων κι αποτελεσμάτων της coated CPA για $k_{l_0}a \approx 3$ αποδίδονται σε φαινόμενα αυξημένης πολλαπλής σκέδασης τα οποία δεν μπορούν να περιγραφούν πολύ ικανοποιητικά από την CPA. Η αύξηση της πολλαπλής σκέδασης σ'αυτήν την περιοχή δικαιολογείται από την ισχυρή σκέδαση από ένα σκεδαστή (δες ενεργό διατομή σκέδασης) κι από το γεγονός ότι σε $k_{l_0}a \approx 3$ το μήκος κύματος, $\lambda_{l_0} = 2\pi/k_{l_0}$, γίνεται συγκρίσιμο με την μέση απόσταση γειτονικών σκεδαστών.

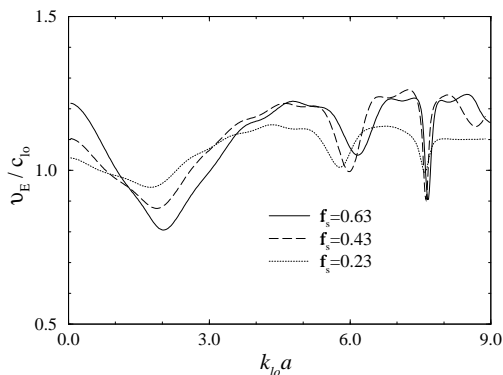
3.5.3 Ταχύτητα ενέργειας



Σχ. 3.10: Ταχύτητα ενέργειας σαν συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας $k_{l_0}a = \omega a/c_{l_0}$ για τυχαίο σύστημα σφαιρών από ρευστό σε ρευστό περιβάλλον μέσο. Οι παράμετροι του συστήματος είναι $\rho_o/\rho_i = 3$ και $c_{l_0}/c_{l_i} = 3$. Οι δείκτες i και o χαρακτηρίζουν αντίστοιχα τις σφαίρες και το περιβάλλον μέσο. a : ακτίνα σφαιρών.

Στο τελευταίο αυτό μέρος των αποτελεσμάτων παρουσιάζονται διαγράμματα της ταχύτητας ενέργειας, v_E , σαν συνάρτηση της συχνότητας. Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στο πως επηρεάζεται αυτή η συνάρτηση από τη συγκέντρωση των σκεδαστών στο σύστημα.

Στο Σχ.3.10 εικονίζεται η v_E σαν συνάρτηση της συχνότητας για ένα τυχαίο σύστημα σφαιρών από υλικό χαμηλής ταχύτητας, χαμηλής πυκνότητας, σε υψηλής ταχύτητας, υψηλής πυκνότητας ρευστό περιβάλλον μέσο. Η αντίστοιχη ενεργός διατομή σκέδασης για το σύστημα αυτό εικονίζεται στο Σχ.2.2. Η ενεργός διατομή θυμίζει κι εδώ την τυπική μορφή που συναντάται σε ΗΜ και βαθμωτά κύματα με τους οξείς συντονισμούς που συνοδεύονται από μεγάλη συγκέντρωση ενέργειας μέσα στη σφαίρα. Ανάλογα, η ταχύτητα ενέργειας v_E , όπως φαίνεται στο Σχ.3.10, ακολουθεί τα όσα έχουν συζητηθεί για την v_E στη διάδοση ΗΜ και βαθμωτών κυμάτων. Χαρακτηριστικά της δηλαδή είναι η έντονη εξάρτηση από τη συχνότητα με τα βαθειά ελάχιστα για χαμηλές συγκεντρώσεις (λόγω της καθυστέρησης του κύματος στους σκεδαστές) κι επίσης η ομαλότερη εξάρτηση από τη συχνότητα για υψηλότερες συγκεντρώσεις (λόγω του ότι το κύμα δραπετεύει τώρα ευκολότερα από τους σκεδαστές μέσω των αλληλοεπικαλυπτόμενων καταστάσεων συντονισμού τους). Η μετακίνηση των ελαχίστων όσο αυξάνει η συγκέντρωση πιστεύουμε ότι οφείλεται σε σύζευξη των καταστάσεων συντονισμού γειτονικών σκεδαστών (ανάλογα με την μετακίνηση των ενεργειακών καταστάσεων στο ηλεκτρονικό πρόβλημα λόγω ισχυρής σύζευξης).



Σχ. 3.11: Ταχύτητα ενέργειας, v_E , σαν συνάρτηση της αδιάστατης συχνότητας $k_{l_0} a = \omega a / c_{l_0}$ για σφαίρες από γυαλί τυχαία δυθισμένες σε νερό. Η v_E έχει υπολογιστεί για τρεις διαφορετικές τιμές του κατ' όγκο ποσοστού, f_s , του γυαλιού στο σύστημα. a : ακτίνα σφαιρών.

Δεύτερο σύστημα που παρουσιάζεται είναι το σύστημα σφαιρών από γυαλί σε νερό που συζητήθηκε προηγουμένως. Το σύστημα αυτό είναι αντιπροσωπευτικό της περίπτωσης σκεδαστών υψηλής ταχύτητας και πυκνότητας σε χαμηλής ταχύτητας και πυκνότητας ρευστό περιβάλλον μέσο. Βασικό χαρακτηριστικό της αντίστοιχης ενεργού διατομής σ' αυτή την περίπτωση (δες Σχ.3.8 και προηγούμενη συζήτηση) είναι το ότι οι συντονισμοί οφείλονται σε συνεισφορά της σκληρής σφαίρας.

Η ταχύτητα ενέργειας σαν συνάρτηση της συχνότητας για το σύστημα γυαλί-νερό και για διάφορες συγκεντρώσεις εικονίζεται στο Σχ.3.11. Η ομαλή εξάρτηση από τη συχνότητα σε χαμηλές συγκεντρώσεις οφείλεται στο ότι δεν υπάρχει εδώ συσσώρευση ενέργειας μέσα στις σφαίρες στους συντονισμούς και άρα δεν υπάρχει έντονη καθυστέρηση του κύματος. Η μόνη καθυστέρηση - στους συντονισμούς - οφείλεται στο σκεδαζόμενο κύμα (στο ότι δηλαδή ένα μεγάλο μέρος του επίπεδου προσπίπτοντος κύματος μετατρέπεται σε σκεδαζόμενο). Έτσι, όσο αυξάνεται η συγκέντρωση αυτό το γεγονός θα εντείνεται και το αποτέλεσμα θα είναι όλο

και βαθύτερα ελάχιστα στην v_E όπως πιστοποιείται από το σχήμα 3.11. Αξίζει να προσέξει κανείς επίσης τα ελάχιστα της v_E στη συχνότητα $k_{l_0}a \approx 6$ όπου, όπως φαίνεται από την ενεργό διατομή σ_{sb} κι από το διάγραμμα πυκνότητας της ενέργειας (δες Σχ.3.8), το κύμα έχει τάσεις συγκέντρωσης μέσα στις σφαίρες κι άρα καθυστέρησης. Αξίζει να αναφερθεί τέλος ότι στο όριο χαμηλών συχνοτήτων και επίσης σε περιοχές πολύ ασθενούς σκέδασης, η αύξηση της ταχύτητας ενέργειας με την αύξηση της συγκέντρωσης οφείλεται στην μεγαλύτερη συμμετοχή του (υψηλής ταχύτητας) γυαλιού στο σύστημα.

Παραρτήματα

A

Στοιχειώδη μεγέθη σε σφαιρικές συντεταγμένες

A.1 Τανυστής παραμόρφωσης, u_{ij} , σε σφαιρικές συντεταγμένες

Συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) σαν συνάρτηση των σφαιρικών συνιστωσών του διανύσματος μετατόπισης, \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, & u_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, & u_{\phi\phi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{u_r}{r}, \\ 2u_{\theta\phi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - u_\phi \cot \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi}, & 2u_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, & (A.1) \\ 2u_{\phi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \end{aligned}$$

A.2 Διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές

Στοιχειώδεις λύσεις $\mathbf{l}_{\varepsilon nm}$, $\mathbf{m}_{\varepsilon nm}$, $\mathbf{n}_{\varepsilon nm}$ (δες κεφάλαιο 1) της ελαστικής κυματικής εξίσωσης (Εξ.1.13) σε σφαιρικές συντεταγμένες (διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές):

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{\varepsilon nm}(R, k_l) &= \frac{1}{k_l} \frac{\partial}{\partial r} R_n(k_l r) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{k_l r} R_n(k_l r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + \frac{m}{k_l r \sin \theta} R_n(k_l r) P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\mathbf{m}_{\varepsilon nm}(R, k_t) = \frac{m}{\sin \theta} R_n(k_t r) P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - R_n(k_t r) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\varepsilon nm}(R, k_t) &= \frac{n(n+1)}{k_t r} R_n(k_t r) P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{k_t r} \frac{\partial}{\partial r} [r R_n(k_t r)] \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \\ &\quad \cos m\phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{m}{k_t r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} [r R_n(k_t r)] P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \quad (A.4)$$

R_n : συνάρτηση Bessel, $P_n^m(\cos \theta)$: πολυώνυμο Legendre.

A.3 Τανυστής τάσης, σ_{ij} , σε σφαιρικές συντεταγμένες

Από τα στοιχεία του τανυστή τάσης εκείνα τα οποία χρησιμοποιούνται στις συνοριακές συνθήκες για τον πλήρη προσδιορισμό του κύματος στο πρόβλημα της σκέδασης από μία σφαίρα είναι τα σ_{rj} με $j = r, \theta, \phi$ ¹. Σε ότι ακολουθεί παραθέτουμε το αποτέλεσμα για τα σ_{rj} όταν το πεδίο, \mathbf{u} , είναι ένα από τα στοιχειώδη διανύσματα $\mathbf{l}_{en_1^0}(R, k_l)$, $\mathbf{m}_{on_1^0}(R, k_t)$ και $\mathbf{l}_{en_1^0}(R, k_t)$ (η τιμή μηδέν (ένα) του τρίτου δείκτη (m) των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών αντιπροσωπεύεται από την πάνω (κάτω) γραμμή των εκφράσεων των σ_{rj}). Οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω διανυσμάτων σαν \mathbf{u} , οδηγεί στον ίδιο γραμμικό συνδυασμό στοιχείων του τανυστή τάσης. Τα σ_{rj} υπολογίζονται με χρήση της εξίσωσης ορισμού του τανυστή τάσης για ισοτροπικά μέσα (Εξ.1.5) και των εξισώσεων A.1.

Για $\mathbf{u} = \mathbf{l}_{en_1^0}(R, k_l)$,

$$\sigma_{rr} = k_l [2\mu R_n''(k_l r) - \lambda R_n(k_l r)] \frac{P_n(\cos \theta)}{P_n^1(\cos \theta) \cos \phi} \quad (\text{A.5})$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu k_l \left[\frac{R_n'(k_l r)}{k_l r} - \frac{R_n(k_l r)}{(k_l r)^2} \right] \frac{\partial P_n(\cos \theta) / \partial \theta}{[P_n^1(\cos \theta) / \partial \theta] \cos \phi} \quad (\text{A.6})$$

$$\sigma_{r\phi} = -2\mu k_l \left[\frac{R_n'(k_l r)}{k_l r} - \frac{R_n(k_l r)}{(k_l r)^2} \right] \frac{0}{[P_n^1(\cos \theta) / \sin \theta] \sin \phi} \quad (\text{A.7})$$

Για $\mathbf{u} = \mathbf{m}_{on_1^0}(R, k_t)$,

$$\sigma_{rr} = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu k_t \left[R_n'(k_t r) - \frac{R_n(k_t r)}{k_t r} \right] \frac{0}{[P_n^1(\cos \theta) / \sin \theta] \cos \phi} \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{r\phi} = -\mu k_t \left[R_n'(k_t r) - \frac{R_n(k_t r)}{k_t r} \right] \frac{0}{[P_n^1(\cos \theta) / \partial \theta] \sin \phi} \quad (\text{A.10})$$

Για $\mathbf{u} = \mathbf{n}_{en_1^0}(R, k_t)$,

$$\sigma_{rr} = 2\mu k_t n(n+1) \left[\frac{R_n'(k_t r)}{k_t r} - \frac{R_n(k_t r)}{(k_t r)^2} \right] \frac{\partial P_n(\cos \theta) / \partial \theta}{P_n^1(\cos \theta) \cos \phi} \quad (\text{A.11})$$

$$\sigma_{r\theta} = \mu k_t [R_n''(k_t r) + [n(n+1) - 2] \frac{R_n(k_t r)}{(k_t r)^2}] \frac{\partial P_n(\cos \theta) / \partial \theta}{[P_n^1(\cos \theta) / \partial \theta] \cos \phi} \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_{r\phi} = -\mu k_t [R_n''(k_t r) + [n(n+1) - 2] \frac{R_n(k_t r)}{(k_t r)^2}] \frac{0}{[P_n^1(\cos \theta) / \sin \theta] \sin \phi} \quad (\text{A.13})$$

Στις παραπάνω εξισώσεις (A.5-A.13) τα λ και μ είναι οι σταθερές Lamé ενώ τα R_n' και R_n'' δηλώνουν αντίστοιχα την πρώτη και δεύτερη παράγωγο ως προς το όρισμα της R_n .

¹Υπενθυμίζεται ότι ο τανυστής τάσης είναι συμμετρικός.

B

Σκέδαση από μια σφαίρα - υπολογισμοί

B.1 Πλήρης προσδιορισμός του πεδίου

Όπως αναφέρθηκε στο κείμενο οι συντελεστές που εμφανίζονται στις εκφράσεις τόσο του σκεδαζόμενου κύματος όσο και του κύματος στο εσωτερικό της σφαίρας στο πρόβλημα της σκέδασης από μία σφαίρα υπολογίζονται από εφαρμογή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών στην επιφάνεια. Για πρόσπτωση διαμήκους κύματος της μορφής που περιγράφεται από την εξίσωση 2.1, οι συνοριακές αυτές συνθήκες οδηγούν στο αμέσως επόμενο γραμμικό σύστημα από τη λύση του οποίου υπολογίζονται οι A_{en0} , C_{en0} , E_{en0} και G_{en0} (δες Εξ.2.3 και Εξ.2.4).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{en0} \\ C_{en0} \\ E_{en0} \\ G_{en0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^l \\ b_2^l \\ b_3^l \\ b_4^l \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Τα a_{ij} και b_i^l ($i, j \in [1, 4]$) αναφέρονται στη συνέχεια του παραρτήματος. Η πρώτη εξίσωση του συστήματος B.1 (η εξίσωση που προκύπτει από την πρώτη γραμμή του 4x4 πίνακα του αριστερού μέλους) προέρχεται από απαίτηση συνέχειας της κάθετης στην επιφάνεια της σφαίρας συνιστώσας της μετατόπισης, η δεύτερη από απαίτηση συνέχειας της εφαπτομενικής συνιστώσας ενώ η τρίτη και η τέταρτη από απαίτηση συνέχειας της κάθετης κι εφαπτομενικής αντίστοιχα συνιστώσας της τάσης.

Για πρόσπτωση εγκάρσιου κύματος (της μορφής που περιγράφεται από την εξίσωση 2.5) οι συνοριακές συνθήκες αποσυνδέουν τον υπολογισμό των B_{on1} και F_{on1} από τον υπολογισμό των υπόλοιπων συντελεστών. Οι συντελεστές A_{en1} , B_{on1} , C_{en1} , E_{en1} , F_{on1} και G_{en1} (δες εξισώσεις 2.6 και 2.7) σ' αυτή την περίπτωση υπολογίζονται από τη λύση των συστημάτων

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{en1} \\ C_{en1} \\ E_{en1} \\ G_{en1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^t \\ b_2^t \\ b_3^t \\ b_4^t \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{on1} \\ F_{on1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^t \\ c_2^t \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Τα a_{ij} , b_i^l , b_i^t , e_{ij} και c_i^t δίδονται από

$$\begin{aligned}
a_{11} &= h'_n(Z_{l_o}) & a_{21} &= h_n(Z_{l_o})/Z_{l_o} \\
a_{12} &= n(n+1)h_n(Z_{t_o})/Z_{t_o} & a_{22} &= h'_n(Z_{t_o}) + h_n(Z_{t_o})/Z_{t_o} \\
a_{13} &= -j'_n(Z_{l_i}) & a_{23} &= -j_n(Z_{l_i})/Z_{l_i} \\
a_{14} &= -n(n+1)j_n(Z_{t_i})/Z_{t_i} & a_{24} &= -j'_n(Z_{t_i}) - j_n(Z_{t_i})/Z_{t_i} \\
b_1^l &= \imath j'_n(Z_{l_o}) & b_2^l &= \imath j_n(Z_{l_o})/Z_{l_o} \\
b_1^t &= m(n+1)j_n(Z_{t_o})/Z_{t_o} & b_2^t &= \imath[j'_n(Z_{t_o}) + j_n(Z_{t_o})/Z_{t_o}]
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= Z_{l_o}[2\mu_o h''_n(Z_{l_o}) - \lambda_o h_n(Z_{l_o})] \\
a_{32} &= 2n(n+1)\mu_o[h'_n(Z_{t_o}) - h_n(Z_{t_o})/Z_{t_o}] \\
a_{33} &= -Z_{l_i}[2\mu_i j''_n(Z_{l_i}) - \lambda_i j_n(Z_{l_i})] \\
a_{34} &= -2n(n+1)\mu_i[j'_n(Z_{t_i}) - j_n(Z_{t_i})/Z_{t_i}] \\
b_3^l &= \imath Z_{l_o}[2\mu_o j''_n(Z_{l_o}) - \lambda_o j_n(Z_{l_o})] \\
b_3^t &= 2\imath n(n+1)\mu_o[j'_n(Z_{t_o}) - j_n(Z_{t_o})/Z_{t_o}]
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
a_{41} &= 2\mu_o[h'_n(Z_{l_o}) - h_n(Z_{l_o})/Z_{l_o}] \\
a_{42} &= \mu_o[Z_{t_o}h''_n(Z_{t_o}) + (n-1)(n+2)h_n(Z_{t_o})/Z_{t_o}] \\
a_{43} &= -2\mu_i[j'_n(Z_{l_i}) - j_n(Z_{l_i})/Z_{l_i}] \\
a_{44} &= -\mu_i[Z_{t_i}j''_n(Z_{t_i}) + (n-1)(n+2)j_n(Z_{t_i})/Z_{t_i}] \\
b_4^l &= 2\imath\mu_o[j'_n(Z_{l_o}) - j_n(Z_{l_o})/Z_{l_o}] \\
b_4^t &= \imath\mu_o[Z_{t_o}j''_n(Z_{t_o}) + (n-1)(n+2)j_n(Z_{t_o})/Z_{t_o}]
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
e_{11} &= h_n(Z_{t_o}) & e_{21} &= \mu_o[Z_{t_o}h'_n(Z_{t_o}) - h_n(Z_{t_o})] \\
e_{12} &= -j_n(Z_{t_i}) & e_{22} &= -\mu_i[Z_{t_i}j'_n(Z_{t_i}) - j_n(Z_{t_i})] \\
c_1^t &= -j_n(Z_{t_o}) & c_2^t &= -\mu_o[Z_{t_o}j'_n(Z_{t_o}) - j_n(Z_{t_o})]
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Στις παραπάνω εκφράσεις, $Z_{lj} = kl_j a = \omega a/c_{lj}$ ($j = i, o$) και $Z_{tj} = kt_j a = \omega a/c_{tj}$ με c_{li}, c_{ti} να δηλώνουν αντίστοιχα την ταχύτητα διάδοσης της διαμήκους και της εγκάρσιας συνιστώσας του κύματος μέσα στη σφαίρα και c_{lo}, c_{to} στο περιβάλλον μέσο. a είναι η ακτίνα της σφαίρας και j_n, h_n είναι αντίστοιχα η σφαιρική συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και σφαιρική Hankel επίσης πρώτου είδους [24]. Τέλος, δύο χρήσιμα για την εξαγωγή των συστημάτων B.1 και B.2 ολοκληρώματα είναι τα [3]

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{dP_n^m}{d\theta} \frac{dP_{n'}^m}{d\theta} + \frac{m^2 P_n^m P_{n'}^m}{\sin^2 \theta} \right) \sin \theta d\theta &= \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} n(n+1) \delta_{nn'} \\
\int_0^\pi \frac{d}{d\theta} (P_n^m P_{n'}^m) d\theta &= 0
\end{aligned} \tag{B.7}$$

με $P_n^m(\cos \theta)$: πολυώνυμα Legendre και $\delta_{nn'} = 1$ για $n = n'$ και 0 για $n \neq n'$.

B.2 Πυκνότητα ενέργειας

Στο πρόβλημα της σκέδασης επίπεδου κύματος από μια σφαίρα, τόσο στην περίπτωση διαμήκους προσπίπτοντος κύματος όσο και στην περίπτωση εγκάρσιου, το πεδίο, \mathbf{u} , σε κάθε περιοχή του χώρου και το ίχνος, u_{ii}^{sum} , του ταυστή παραμόρφωσης u_{ij} (όπως μπορεί να δει κανείς εύκολα αντικαθιστώντας στους τύπους 2.2-2.7, A.5 και A.11 τις αντίστοιχες εκφράσεις των $\mathbf{l}_{\epsilon nm}$, $\mathbf{m}_{\epsilon nm}$ και $\mathbf{n}_{\epsilon nm}$) μπορούν να γραφούν σαν¹

$$u_r(\mathbf{r}) = \sum_n N(n) i^n u_{r,n}(r) \Theta_{r,n}(\theta) \Phi_{r,n}(\phi) \quad (\text{B.8})$$

$$u_\theta(\mathbf{r}) = \sum_n N(n) i^n [u_{\theta,n}^{\{1\}}(r) \Theta_{\theta,n}^{\{1\}}(\theta) + u_{\theta,n}^{\{2\}}(r) \Theta_{\theta,n}^{\{2\}}(\theta)] \Phi_{\theta,n}(\phi) \quad (\text{B.9})$$

$$u_\phi(\mathbf{r}) = -\sum_n N(n) i^n [u_{\theta,n}^{\{1\}}(r) \Theta_{\theta,n}^{\{2\}}(\theta) + u_{\theta,n}^{\{2\}}(r) \Theta_{\theta,n}^{\{1\}}(\theta)] \Phi_{\phi,n}(\phi) \quad (\text{B.10})$$

$$u_{ii}^{sum} = \sum_i u_{ii}(\mathbf{r}) = \sigma_{rr}(\lambda = 1, \mu = 0) = \sum_n N(n) i^n u_{ii,n}^{sum}(r) \Theta_{r,n}(\theta) \Phi_{r,n}(\phi) \quad (\text{B.11})$$

όπου για προσπίπτον διαμήκες κύμα, $N(n) = (2n + 1)$, $\Theta_{r,n}(\theta) = P_n(\cos \theta)$, $\Phi_{r,n}(\phi) = 1$, $\Theta_{\theta,n}^{\{1\}}(\theta) = \partial P_n(\cos \theta) / \partial \theta = -P_n^1(\cos \theta)$, $\Theta_{\theta,n}^{\{2\}}(\theta) = 0$, $\Phi_{\theta,n}(\phi) = 1$, $\Phi_{\phi,n}(\phi) = 0$, $u_{\theta,n}^{\{2\}} = 0$

ενώ για προσπίπτον εγκάρσιο, $N(n) = (2n + 1) / n(n + 1)$, $\Theta_{r,n}(\theta) = P_n^1(\cos \theta)$, $\Phi_{r,n}(\phi) = \cos \phi$, $\Theta_{\theta,n}^{\{1\}}(\theta) = \partial P_n^1(\cos \theta) / \partial \theta$, $\Theta_{\theta,n}^{\{2\}}(\theta) = P_n^1(\cos \theta) / \sin \theta$, $\Phi_{\theta,n}(\phi) = \cos \phi$, $\Phi_{\phi,n}(\phi) = \sin \phi$.

Όπως συζητήθηκε στο κεφάλαιο 2 η πυκνότητα ενέργειας, παίρνοντας μέση τιμή ως προς χρόνο, μπορεί να γραφεί σαν

$$\langle E(\mathbf{r}) \rangle = \langle E_T + E_{V_1} + E_{V_2} \rangle = \frac{1}{4} \rho \omega^2 \sum_i u_i u_i^* + \frac{1}{4} \lambda \sum_i u_{ii} u_{ii}^* + \frac{1}{2} \mu \sum_{i,j} u_{ij} u_{ij}^* \quad (\text{B.12})$$

Συμβολίζοντας με \tilde{E}_j ($j = T, V_1, V_2$) τη μέση τιμή του $\langle E_j \rangle$ ως προς όλες τις διευθύνσεις ($\tilde{E}_j = (1/4\pi) \int \langle E_j \rangle \sin \theta d\theta d\phi$), οι ενέργειες \tilde{E}_T , \tilde{E}_{V_1} και \tilde{E}_{V_2} τόσο για πρόσπτωση διαμήκους κύματος όσο και για πρόσπτωση εγκάρσιου δίδονται από

$$\tilde{E}_T = \beta \frac{1}{4} \rho \omega^2 \sum_n N(n) [|u_{r,n}|^2 + n(n+1)(|u_{\theta,n}^{\{1\}}|^2 + |u_{\theta,n}^{\{2\}}|^2)] \quad (\text{B.13})$$

$$\tilde{E}_{V_1} = \beta \frac{1}{4} \lambda \sum_n N(n) |u_{ii,n}^{sum}|^2 \quad (\text{B.14})$$

$$\tilde{E}_{V_2} = \beta \frac{1}{2} \mu \sum_n N(n) [|u_{rr,n}|^2 + \frac{1}{2r^2} n(n+1)(n-1)(n+2)(|u_{\theta,n}^{\{1\}}|^2 + |u_{\theta,n}^{\{2\}}|^2) + \frac{1}{2} |u_{\theta\phi,n}|^2 + 2n(n+1)(|u_{r\theta,n}^{\{1\}}|^2 + |u_{r\theta,n}^{\{2\}}|^2)] \quad (\text{B.15})$$

¹Στους τύπους αυτού του παραρτήματος δεν θεωρούμε άθροιση ως προς τους επαναλαμβανόμενους δείκτες.

όπου $\beta = 1$ για διαμήγες προσπίπτον και $\beta = 1/2$ για εγκάρσιο κι επίσης

$$\begin{aligned}
 u_{rr,n} &= \frac{\partial u_{r,n}}{\partial r} & u_{r\theta,n}^{\{1\}} &= \frac{\partial u_{\theta,n}^{\{1\}}}{\partial r} - \frac{u_{\theta,n}^{\{1\}}}{r} + \frac{u_{r,n}}{r} \\
 u_{r\theta,n}^{\{2\}} &= \frac{\partial u_{\theta,n}^{\{2\}}}{\partial r} - \frac{u_{\theta,n}^{\{2\}}}{r} & u_{\theta\phi,n} &= u_{ii,n}^{sum} - u_{rr,n}
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

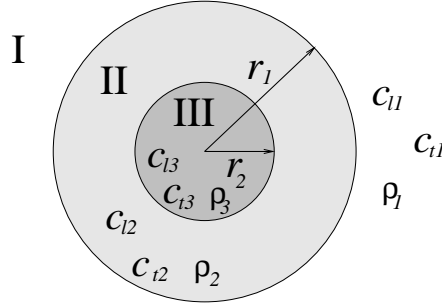
Γ

Σκέδαση από σύστημα δύο ομόκεντρων σφαιρών

Γ.1 Πεδίο - Ενεργός διατομή σκέδασης

Ο υπολογισμός της σκέδασης από ένα σύστημα δύο ομόκεντρων σφαιρών όπως εκείνο του παρακάτω σχήματος ακολουθεί την ίδια πορεία με τον υπολογισμό της σκέδασης από μια απλή σφαίρα. Αφετηρία είναι ο υπολογισμός του πεδίου παντού στο χώρο με εφαρμογή κατάλληλων οριακών και συνοριακών συνθηκών.

Σχ. Γ.1 : Σφαίρα ακτίνας r_2 καλυμμένη με σφαιρικό κέλυφος ακτίνας r_1 μέσα σε ομογενές μέσο (περιοχή I). Τα ρ , c_1 , c_2 χαρακτηρίζουν αντίστοιχα την πυκνότητα και τη διαμήκη κι εγκάρσια ταχύτητα.



Για προσπίπτον τόσο διαμήκες κύμα όσο και εγκάρσιο (πολωμένο στον \hat{x} άξονα) που διαδίδονται κατά τον άξονα \hat{z} το πεδίο στην περιοχή I (έξω από τις σφαίρες) και στην περιοχή III (στην εσωτερική σφαίρα) θα δίδεται από τις αντίστοιχες εκφράσεις για το πεδίο μέσα κι έξω από τη σφαίρα στο πρόβλημα της σκέδασης από μια μόνο σφαίρα (με τα κυματανύσματα να έχουν αντικατασταθεί από τα κυματανύσματα στα αντίστοιχα υλικά). Συγκεκριμένα για πρόσπτωση διαμήκους κύματος το σκεδαζόμενο κύμα θα δίδεται από την έκφραση

$$\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) [A_{en0} \mathbf{l}_{en0}(h, k_{l1}) + C_{en0} \mathbf{n}_{en0}(h, k_{t1})] \quad (\Gamma.1)$$

ενώ το κύμα στην εσωτερική σφαίρα από την

$$\mathbf{u}^{III}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) [E_{en0} \mathbf{l}_{en0}(j, k_{l3}) + G_{en0} \mathbf{n}_{en0}(j, k_{t3})] \quad (\Gamma.2)$$

Ανάλογα, για πρόσπτωση εγκάρσιου, το σκεδαζόμενο και το κύμα στην εσωτερική σφαίρα θα δίδονται από τις εκφράσεις

$$\mathbf{u}^{sc}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [A_{en1} \mathbf{l}_{en1}(h, k_{l1}) + B_{on1} \mathbf{m}_{on1}(h, k_{t1}) + C_{en1} \mathbf{n}_{en1}(h, k_{t1})] \quad (\Gamma.3)$$

$$\mathbf{u}^{\text{III}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [E_{en1} \mathbf{l}_{en1}(j, k_{t3}) + F_{on1} \mathbf{m}_{on1}(j, k_{t3}) + G_{en1} \mathbf{n}_{en1}(j, k_{t3})] \quad (\Gamma.4)$$

Το κύμα στην περιοχή II (μεταξύ των δύο σφαιρών) θα είναι άθροισμα του κύματος που θα υπήρχε αν δεν υπήρχε η εσωτερική σφαίρα και του σκεδαζόμενου από την επιφάνεια ακτίνας r_2 κύματος. Έτσι το πεδίο στην περιοχή II για διαμήκεις προσπίπτον κύμα μπορεί να γραφεί σαν

$$\mathbf{u}^{\text{II}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) [H_{en0} \mathbf{l}_{en0}(j, k_{t2}) + J_{en0} \mathbf{n}_{en0}(j, k_{t2}) + L_{en0} \mathbf{l}_{en0}(h, k_{t2}) + N_{en0} \mathbf{n}_{en0}(h, k_{t2})] \quad (\Gamma.5)$$

ενώ για εγκάρσιο προσπίπτον σαν

$$\mathbf{u}^{\text{II}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [H_{en1} \mathbf{l}_{en1}(j, k_{t2}) + I_{on1} \mathbf{m}_{on1}(j, k_{t2}) + J_{en1} \mathbf{n}_{en1}(j, k_{t2}) + L_{en1} \mathbf{l}_{en1}(h, k_{t2}) + M_{on1} \mathbf{m}_{on1}(h, k_{t2}) + N_{en1} \mathbf{n}_{en1}(h, k_{t2})] \quad (\Gamma.6)$$

Σε όλες τις παραπάνω σχέσεις $k_{li} = \omega/c_{li}$ και $k_{ti} = \omega/c_{ti}$ ($i = 1, 2, 3$). Οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} ορίζονται στο παράρτημα Α ενώ οι συντελεστές που τις πολλαπλασιάζουν υπολογίζονται από εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών 2.8 και 2.9 στις επιφάνειες ακτίνας r_1 και r_2 .

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες καταλήγουμε για πρόσπτωση διαμήκους κύματος σε ένα 8x8 γραμμικό σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$a_{ij} X_j^l = b_j^l \quad \text{με} \quad \tilde{X}^l = [A_{en0}, C_{en0}, H_{en0}, J_{en0}, L_{en0}, N_{en0}, E_{en0}, G_{en0}] \quad (\Gamma.7)$$

Για πρόσπτωση εγκάρσιου καταλήγουμε σε ένα 8x8 κι ένα 4x4 σύστημα. Από τη λύση του πρώτου υπολογίζονται οι συντελεστές που πολλαπλασιάζουν τις \mathbf{l} και \mathbf{n} διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές ενώ από τη λύση του δεύτερου οι συντελεστές που πολλαπλασιάζουν την \mathbf{m} . Το 8x8 σύστημα είναι της μορφής

$$a_{ij} X_j^t = b_j^t \quad \text{με} \quad \tilde{X}^t = [A_{en1}, C_{en1}, H_{en1}, J_{en1}, L_{en1}, N_{en1}, E_{en1}, G_{en1}] \quad (\Gamma.8)$$

ενώ το 4x4 της μορφής

$$e_{ij} Y_j^t = c_j^t \quad \text{με} \quad \tilde{Y}^t = [B_{on1}, I_{on1}, M_{on1}, F_{on1}] \quad (\Gamma.9)$$

Το σύμβολο $\tilde{\cdot}$ στις παραπάνω εκφράσεις δηλώνει τον ανάστροφο πίνακα. Οι αναλυτικές εκφράσεις των στοιχείων a_{ij} , e_{ij} , b_j^l , b_j^t και c_j^t αναφέρονται στο τελευταίο μέρος του παραρτήματος.

Ενεργός διατομή : Η ενεργός διατομή σκέδασης υπολογίζεται κι εδώ με τον ίδιο τρόπο όπως στο πρόβλημα της σκέδασης από μία μόνο σφαίρα. Οι εκφράσεις που

προκύπτουν είναι ανάλογες των τύπων 2.13 και 2.14. Η τελική έκφραση για την ενεργό διατομή, σ_l , όταν το προσπίπτον κύμα είναι διαμήκες είναι η

$$\hat{\sigma}_l = \frac{\sigma_l}{\pi a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 4(2n+1) \left[\frac{|A_{en0}|^2}{|Z_{l11}|^2} + n(n+1) \left(\frac{Z_{l11}}{Z_{t11}} \right) \frac{|C_{en0}|^2}{|Z_{t11}|^2} \right] \quad (\Gamma.10)$$

με $Z_{l11} = k_{l1}r_1$ και $Z_{t11} = k_{t1}r_1$. Για εγκάρσιο προσπίπτον η αντίστοιχη έκφραση για την σ_t είναι η

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\sigma_t}{\pi a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2(2n+1) \left[\frac{1}{n(n+1)} \left(\frac{Z_{t11}}{Z_{l11}} \right) \frac{|A_{en1}|^2}{|Z_{l11}|^2} + \frac{|B_{on1}|^2}{|Z_{t11}|^2} + \frac{|C_{en1}|^2}{|Z_{t11}|^2} \right] \quad (\Gamma.11)$$

Γ.2 Ενέργεια

Όπως εύκολα παρατηρεί κανείς το πεδίο, \mathbf{u} , σε κάθε περιοχή του χώρου έχει την ίδια μορφή με εκείνη που περιγράφεται στις εκφράσεις B.8-B.11 του παραρτήματος Β. Το γεγονός αυτό δίνει σαν ολική πυκνότητα ενέργειας το άθροισμα των εκφράσεων B.13, B.14 και B.16 του ίδιου παραρτήματος (B).

Γ.3 Αναλυτικός υπολογισμός του πεδίου

Στο τελευταίο αυτό μέρος του παραρτήματος αναφέρονται οι αναλυτικές εκφράσεις των a_{ij} , e_{ij} , b_j^l , b_j^t και c_j^t όπως προκύπτουν από εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στις επιφάνειες ακτίνας r_1 και r_2 .

$$\begin{aligned} a_{11} &= h'_n(Z_{l11}) & a_{21} &= h_n(Z_{l11})/Z_{l11} \\ a_{12} &= n(n+1)h_n(Z_{t11})/Z_{t11} & a_{22} &= h'_n(Z_{t11}) + h_n(Z_{t11})/Z_{t11} \\ a_{13} &= -j'_n(Z_{l21}) & a_{23} &= -j_n(Z_{l21})/Z_{l21} \\ a_{14} &= -n(n+1)j_n(Z_{t21})/Z_{t21} & a_{24} &= -j'_n(Z_{t21}) - j_n(Z_{t21})/Z_{t21} \\ a_{15} &= -h'_n(Z_{l21}) & a_{25} &= -h_n(Z_{l21})/Z_{l21} \\ a_{16} &= -n(n+1)h_n(Z_{t21})/Z_{t21} & a_{26} &= -h'_n(Z_{t21}) - h_n(Z_{t21})/Z_{t21} \\ a_{17} &= 0 & a_{27} &= 0 \\ a_{18} &= 0 & a_{28} &= 0 \\ b_1^l &= \imath j'_n(Z_{l11}) & b_2^l &= \imath j_n(Z_{l11})/Z_{l11} \\ b_1^t &= \imath n(n+1)j_n(Z_{t11})/Z_{t11} & b_2^t &= \imath [j'_n(Z_{t11}) + j_n(Z_{t11})/Z_{t11}] \end{aligned} \quad (\Gamma.12)$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= Z_{l11}[2\mu_1 h_n''(Z_{l11}) - \lambda_1 h_n(Z_{l11})] \\ a_{32} &= 2n(n+1)\mu_1 [h'_n(Z_{t11}) - h_n(Z_{t11})/Z_{t11}] \\ a_{33} &= -Z_{l21}[2\mu_2 j_n''(Z_{l21}) - \lambda_2 j_n(Z_{l21})] \\ a_{34} &= -2n(n+1)\mu_2 [j'_n(Z_{t21}) - j_n(Z_{t21})/Z_{t21}] \\ a_{35} &= -Z_{l21}[2\mu_2 h_n''(Z_{l21}) - \lambda_2 h_n(Z_{l21})] \\ a_{36} &= -2n(n+1)\mu_2 [h'_n(Z_{t21}) - h_n(Z_{t21})/Z_{t21}] \\ a_{37} &= 0 \end{aligned} \quad (\Gamma.13)$$

$$\begin{aligned}
a_{38} &= 0 \\
b_3^l &= \imath Z_{l11}[2\mu_1 j_n''(Z_{l11}) - \lambda_1 j_n(Z_{l11})] \\
b_3^t &= 2\imath n(n+1)\mu_1[j_n'(Z_{t11}) - j_n(Z_{t11})/Z_{t11}] \\
\\
a_{41} &= 2\mu_1[h_n'(Z_{l11}) - h_n(Z_{l11})/Z_{l11}] \\
a_{42} &= \mu_1[Z_{t11}h_n''(Z_{t11}) + (n-1)(n+2)h_n(Z_{t11})/Z_{t11}] \\
a_{43} &= -2\mu_2[j_n'(Z_{l21}) - j_n(Z_{l21})/Z_{l21}] \\
a_{44} &= -\mu_2[Z_{t21}j_n''(Z_{t21}) + (n-1)(n+2)j_n(Z_{t21})/Z_{t21}] \\
a_{45} &= -2\mu_2[h_n'(Z_{l21}) - h_n(Z_{l21})/Z_{l21}] \\
a_{46} &= -\mu_2[Z_{t21}h_n''(Z_{t21}) + (n-1)(n+2)j_n(Z_{t21})/Z_{t21}] \\
a_{47} &= 0 \\
a_{48} &= 0 \\
b_4^l &= 2\imath\mu_1[j_n'(Z_{l11}) - j_n(Z_{l11})/Z_{l11}] \\
b_4^t &= \imath\mu_1[Z_{t11}j_n''(Z_{t11}) + (n-1)(n+2)j_n(Z_{t11})/Z_{t11}]
\end{aligned} \tag{Γ.14}$$

$$\begin{aligned}
a_{51} &= 0 & a_{61} &= 0 \\
a_{52} &= 0 & a_{62} &= 0 \\
a_{53} &= j_n'(Z_{l22}) & a_{63} &= j_n(Z_{l22})/Z_{l22} \\
a_{54} &= n(n+1)j_n(Z_{t22})/Z_{t22} & a_{64} &= j_n'(Z_{t22}) + j_n(Z_{t22})/Z_{t22} \\
a_{55} &= h_n'(Z_{l22}) & a_{65} &= h_n(Z_{l22})/Z_{l22} \\
a_{56} &= n(n+1)h_n(Z_{t22})/Z_{t22} & a_{66} &= h_n'(Z_{t22}) + h_n(Z_{t22})/Z_{t22} \\
a_{57} &= -j_n'(Z_{l32}) & a_{67} &= -j_n(Z_{l32})/Z_{l32} \\
a_{58} &= -n(n+1)j_n(Z_{t32})/Z_{t32} & a_{68} &= -(j_n'(Z_{t32}) + j_n(Z_{t32})/Z_{t32}) \\
b_5^l &= 0 & b_6^l &= 0 \\
b_5^t &= 0 & b_6^t &= 0
\end{aligned} \tag{Γ.15}$$

$$\begin{aligned}
a_{71} &= 0 \\
a_{72} &= 0 \\
a_{73} &= Z_{l22}[2\mu_2 j_n''(Z_{l22}) - \lambda_2 j_n(Z_{l21})] \\
a_{74} &= 2n(n+1)\mu_2[j_n'(Z_{t22}) - j_n(Z_{t22})/Z_{t22}] \\
a_{75} &= Z_{l22}[2\mu_2 h_n''(Z_{l22}) - \lambda_2 h_n(Z_{l22})] \\
a_{76} &= 2n(n+1)\mu_2[h_n'(Z_{t22}) - h_n(Z_{t22})/Z_{t22}] \\
a_{77} &= -Z_{l32}[2\mu_3 j_n''(Z_{l32}) - \lambda_3 j_n(Z_{l32})] \\
a_{78} &= -2n(n+1)\mu_3[j_n'(Z_{t32}) - j_n(Z_{t32})/Z_{t32}] \\
b_7^l &= 0 \\
b_7^t &= 0
\end{aligned} \tag{Γ.16}$$

$$\begin{aligned}
a_{81} &= 0 \\
a_{82} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{83} &= 2\mu_2[j'_n(Z_{122}) - j_n(Z_{122})/Z_{122}] \\
a_{84} &= \mu_2[Z_{t22}j''_n(Z_{t22}) + (n-1)(n+2)j_n(Z_{t22})/Z_{t22}] \\
a_{85} &= 2\mu_2[h'_n(Z_{122}) - h_n(Z_{122})/Z_{122}] \\
a_{86} &= \mu_2[Z_{t22}h''_n(Z_{t22}) + (n-1)(n+2)j_n(Z_{t22})/Z_{t22}] \\
a_{87} &= -2\mu_3[j'_n(Z_{132}) - j_n(Z_{132})/Z_{132}] \\
a_{88} &= -\mu_3[Z_{t32}j''_n(Z_{t32}) + (n-1)(n+2)j_n(Z_{t32})/Z_{t32}] \\
b_8^l &= 0 \\
b_8^t &= 0
\end{aligned} \tag{Γ.17}$$

$$\begin{aligned}
e_{11} &= h_n(Z_{t11}) & e_{21} &= \mu_1[Z_{t11}h'_n(Z_{t11}) - h_n(Z_{t11})] \\
e_{12} &= -j_n(Z_{t21}) & e_{22} &= -\mu_2[Z_{t21}j'_n(Z_{t21}) - j_n(Z_{t21})] \\
e_{13} &= -h_n(Z_{t21}) & e_{23} &= -\mu_2[Z_{t21}h'_n(Z_{t21}) - h_n(Z_{t21})] \\
e_{14} &= 0 & e_{24} &= 0 \\
c_1^t &= -j_n(Z_{t11}) & c_2^t &= -\mu_1[Z_{t11}j'_n(Z_{t11}) - j_n(Z_{t11})]
\end{aligned} \tag{Γ.18}$$

$$\begin{aligned}
e_{31} &= 0 & e_{41} &= 0 \\
e_{32} &= j_n(Z_{t22}) & e_{42} &= \mu_2[Z_{t22}j'_n(Z_{t22}) - j_n(Z_{t22})] \\
e_{33} &= h_n(Z_{t22}) & e_{43} &= \mu_2[Z_{t22}h'_n(Z_{t22}) - h_n(Z_{t22})] \\
e_{34} &= -j_n(Z_{t32}) & e_{44} &= -\mu_3[Z_{t32}j'_n(Z_{t32}) - j_n(Z_{t32})] \\
c_3^t &= 0 & c_4^t &= 0
\end{aligned} \tag{Γ.19}$$

Στις παραπάνω εκφράσεις $Z_{lij} = k_{li}r_j$, $Z_{tij} = k_{ti}r_j$ ($i = 1, 2, 3$), ($j = 1, 2$) και $i = \sqrt{-1}$. Οι $\lambda (= \rho(c_l^2 - 2c_t^2))$, $\mu (= \rho c_t^2)$ είναι οι σταθερές Lamé ενώ οι δείκτες 1, 2, 3 στα κυματανύσματα και στις σταθερές Lamé χαρακτηρίζουν τις περιοχές I, II και III αντίστοιχα του σχήματος Γ.1.



Δημοσιεύσεις (Publications)

- Δ.1 Interpretation of the Band Structure Results for Elastic and Acoustic Waves by Analogy with the LCAO Approach**
- Δ.2 Elastic Wave Band Gaps in 3-D Periodic Polymer Matrix Composites**
- Δ.3 Elastic Waves in Periodic Composite Materials**
- Δ.4 Acoustic Waves in Random Media**
- Δ.5 Spectral gaps for Electromagnetic and Scalar waves: Possible explanation for certain differences**

Βιβλιογραφία

- [1] Landau and Lifshitz, *Theory of Elasticity*, 3rd Edition, (Pergamon Press, Oxford, 1986).
- [2] N. Einspruch and R. Truell, *J. Appl. Phys.* **31**, 806 (1960).
- [3] J. A. Straton, *Electromagnetic Theory*, (McGraw-Hill, New York, 1941).
- [4] Morse and Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York, 1953) p.142-150.
- [5] M. M. Sigalas and E. N. Economou, *J. Sound Vibr.* **158**, 377 (1992).
- [6] M. M. Sigalas and E. N. Economou, *Sol. St. Comm.* **86**, 141 (1993).
- [7] E. N. Economou and M. M. Sigalas, in *Photonic Band Gaps and Localization*, edited by C. M. Soukoulis (Plenum, New York, 1993), pp.317-338.
- [8] M. M. Sigalas, E. N. Economou, and M. Kafesaki, *Phys. Rev. B* **50**, 3393 (1994).
- [9] E. N. Economou and M. M. Sigalas, *J. Acoust. Soc. Am.* **95**, 1734 (1994).
- [10] M. Kafesaki, M. M. Sigalas and E. N. Economou, *Sol. St. Commun.* **96**, 285 (1995).
- [11] M. Kafesaki, E. N. Economou and M. M. Sigalas, in *Photonic Band Gap Materials*, edited by C. M. Soukoulis (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996), pp.143-164.
- [12] J. O. Vasseur, B. Djafari-Rohani, L. Dobrzynski, M. S. Kushwaha and P. Halevi, *J. Phys. : Cond. Mat.* **6**, 8759 (1994).
- [13] M. Kafesaki and E. N. Economou, *Phys. Rev. B* **52**, 13317 (1995).
- [14] S. Datta, C. T. Chan, K. M. Ho, C. M. Soukoulis, E. N. Economou, in *Photonic Band Gaps and Localization*, edited by C. M. Soukoulis, (Plenum, New York, 1993), p.289.
- [15] C. F. Yiang and R. Truell, *J. Appl. Phys.* **27**, 1086 (1956).
- [16] G. Johnson and R. Truell, *J. Appl. Phys.* **36**, 3467 (1965).
- [17] D. W. Kraft and M. C. Franzblau, *J. Appl. Phys.* **42**, 3019 (1971).
- [18] G. Gaunard and H. Uberall, *J. Appl. Phys.* **50**, 4642 (1979).
- [19] G. Gaunard and H. Uberall, *J. Acoust. Soc. Am.* **67**, 1432 (1980).

- [20] D. Brill, G. Gaunaurd and H. Uberall, *J. Acoust. Soc. Am.* **67**, 414 (1980).
- [21] D. Brill, G. Gaunaurd and H. Uberall, *J. Appl. Phys.* **52**, 3205 (1981).
- [22] D. Brill and G. Gaunaurd, *J. Acoust. Soc. Am.* **81**, 1 (1987).
- [23] L. Flax, G. Gaunaurd and H. Uberall, in *Physical Acoustics*, edited by W. P. Mason (Academic, New York, 1981), vol. XV.
- [24] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, Inc., New York, 1970).
- [25] V. V. Varadan, V. K. Varadan, in *Acoustic Electromagnetic and Elastic Wave Scattering - Focus on the T-Matrix Approach*, edited by V. K. Varadan, V. V. Varadan (Pergamon Press, New York, 1979), p.3.
- [26] P. Sheng, editor, *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media* (World Scientific, Singapore, 1990).
- [27] C. M. Soukoulis, editor, *Photonic Band Gaps and Localization* (Plenum, New York, 1993).
- [28] C. M. Soukoulis, editor, *Photonic Band Gap Materials* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996).
- [29] P. Sheng, *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena* (Academic Press, San Diego, 1995).
- [30] E. N. Economou, *Green's Functions in Quantum Physics* (Springer-Verlag, Berlin, 1983).
- [31] Ad Lagendijk, B. A. van Tiggelen, *Physics Reports* **270** 145 (1996).
- [32] M. P. van Albada, B. A. van Tiggelen, Ad Lagendijk, A. Tip, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 3132 (1991).
- [33] A. Z. Genack, J. H. Li, N. Garcia, A. A. Lisyansky, in [27], pp.23-55.
- [34] B. A. van Tiggelen, Ad Lagendijk, M. P. van Albada and A. Tip, *Phys. Rev. B* **45**, 12233 (1992).
- [35] B. A. van Tiggelen, Ad Lagendijk, *Eur. Phys. Lett.* **23**, 311 (1993).
- [36] C. M. Soukoulis, S. Datta and E. N. Economou, *Phys. Rev. B* **49**, 3800 (1994).
- [37] K. Bush, C. M. Soukoulis and E. N. Economou, *Phys. Rev. B* **52**, 10834 (1995).
- [38] K. Bush and C. M. Soukoulis, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3442 (1995).
- [39] K. Bush, *Transport Properties of Classical Waves in Disordered Media* (PhD thesis, Karlsruhe, 1996).
- [40] V. K. Kinra, E. L. Ker and S. K. Datta, *Mech. Res. Commun* **9**, 109 (1982).

- [41] V. K. Kinra and E. L. Ker, *Int. J. Solids Structures* **19**, 393 (1983).
- [42] V. K. Kinra and P. Li, *Int. J. Solids Structures* **22**, 1 (1986).
- [43] L. Schwartz and T. J. Plona, *J. Appl. Phys.* **55**, 3971 (1984).
- [44] J. H. Page, H. P. Schriemer, A. E. Bailey and D. A. Weitz, *Phys. Rev. E* **52**, 3106 (1995).
- [45] J. H. Page, P. Sheng, H. P. Schriemer, I. Jones, X. Jing and D. A. Weitz, *Science* **271**, 634 (1996).
- [46] E. N. Economou and C. M. Soukoulis, *Phys. Rev. B* **40**, 7977 (1989).
- [47] K. Bush, C. M. Soukoulis and E. N. Economou, *Phys. Rev. B* **50**, 93 (1994).
- [48] E. N. Economou, C. M. Soukoulis and A. Zdetsis, *Phys. Rev. B* **30**, 1686 (1984).
- [49] E. N. Economou, C. M. Soukoulis, M. H. Cohen and A. Zdetsis, *Phys. Rev. B* **31**, 6172 (1985).
- [50] E. N. Economou and C. M. Soukoulis, in [26], pp.404-421.
- [51] J. E. Gubernatis, E. Domany and J. A. Krumhansl, *J. Appl. Phys.* **48**, 2804 (1977).
- [52] A. J. Devaney, *J. Math. Phys.* **21**, 2603 (1980).
- [53] J-Y Kim, J-G Ih and B-H Lee, *J. Acoust. Soc. Am.* **97**, 1380 (1995).
- [54] J. G. Berryman, *J. Acoust. Soc. Am.* **68**, 1809 (1980).
- [55] P. N. Sen and D. L. Johnson, *Phys. Rev. B* **27**, 3133 (1983).