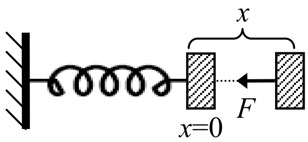
Ο αρμονικός ταλαντωτής

Στην Κλασική Μηχανική



$$F = -kx$$

Εξίσωση Νεύτωνα: $m\ddot{x} = -kx$

$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\qquad \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

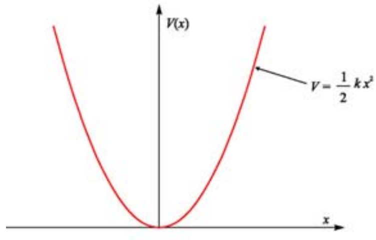
$\Rightarrow x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$

ΒΑΣΙΚΟ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ: Η περίοδος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

είναι ανεξάρτητη του πλάτους της ταλάντωσης

Στην Κβαντομηχανική



$$F = -kx = -\frac{dV}{dx}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}kx^2$$

Εξίσωση Schrödinger

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x)\right)\psi = 0$$

$$\Rightarrow \psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}\underbrace{m\omega^2}_{k} x^2\right)\psi = 0$$

Αντιστοιχία: Εξίσωση Νεύτωνα $\Rightarrow$ Εξίσωση Schrödinger

Λύση της εξίσωσης Schrödinger

Φυσικό Σύστημα μονάδων
$\hbar = m = \omega = 1$

$$\Rightarrow \psi'' + \left(2E - x^2\right)\psi = 0 \underset{(x\to\pm\infty)}{\Rightarrow} \psi''_\infty - x^2\psi_\infty = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi_\infty \sim e^{\pm x^2/2} \Rightarrow \psi(x) = e^{-x^2/2}H(x)$$

Εξασφαλίζει τον μηδενισμό της κυματοσυνάρτησης στο $\pm\infty$

Πολυώνυμο του x που εξασφαλίζει την ύπαρξη του κατάλληλου αριθμού κόμβων στην κυματοσυνάρτηση

$$\psi'' + \left(2E - x^2\right)\psi\Big|_{\psi = e^{-x^2/2}H(x)} = 0 \Rightarrow H'' - 2xH' + (2E-1)H = 0$$: Εξίσωση Hermite

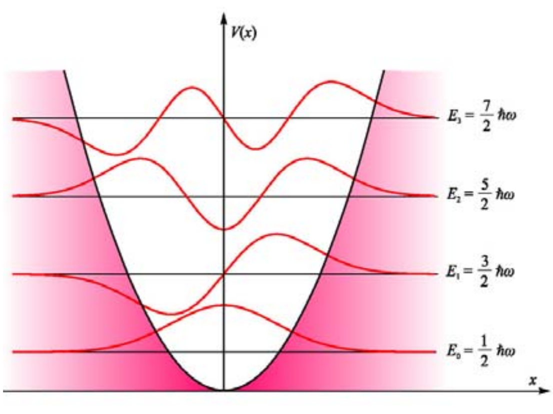
$H(x) \equiv H_n(x)$ πολυώνυμα Hermite: εναλλάξ άρτια και περιττά

$n = 0 \Rightarrow H_0(x) = 1 \Rightarrow (2E-1)\cdot 1 = 0 \Rightarrow E_0 = 1/2$

$n = 1 \Rightarrow H_1(x) = x \Rightarrow 0 - 2x\cdot 1 + (2E-1)\cdot x = 0 \Rightarrow E_1 = 3/2$

$n = 2 \Rightarrow H_2(x) = x^2 + c \Rightarrow 2 - 2x\cdot 2x + (2E-1)\cdot\left(x^2 + c\right) = 0 \Rightarrow E_2 = 5/2,\ c = -1/2$

… και τα αποτελέσματά της



$E_n = n + \dfrac{1}{2}$, $\psi_n(x) = c^{-x^2/2}H_n(x)$

$H_0 = 1$, $H_1 = x$, $H_2 = 2x^2 - 1$, …

Αποκατάσταση των διαστάσεων

$$E_n \to \varepsilon E_n,\quad \psi_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{a}}\psi_n(x/a)$$

ε, a, οι φυσικές μονάδες ενέργειας και μήκους του προβλήματος

$\boxed{\varepsilon = \hbar\omega}$, $\qquad \dfrac{\hbar^2}{ma^2} = \hbar\omega \Rightarrow a = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$

ΜΕΛΕΤΗ: *Σ. Τραχανά, Κβαντομηχανική Ι, σελ. 283 - 298.*