Η στατιστική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης ΙΙΙ

[Μέσες τιμές και αβεβαιότητες για όλα τα φυσικά μεγέθη]

Ο κβαντικός τύπος της μέσης τιμής

Για κάθε δεδομένη κυματοσυνάρτηση ψ η μέση τιμή των αποτελεσμάτων των μετρήσεων ενός τυχόντος φυσικού μεγέθους Α δίδεται από τον τύπο

$$\left\langle \hat{A} \right\rangle = \int \psi^* \left(\hat{A}\psi \right) dx$$

Όπου $\hat{A}$ ένας κατάλληλος για το κάθε φυσικό μέγεθος **τελεστής.**

Τελεστής $\equiv$ κάθε «πράξη» που μπορεί να εκτελεστεί επί μιας συναρτήσεως ψ(x) και να δώσει μια άλλη συνάρτηση φ(x)..

Παραδ. 1: $\hat{A} = x \equiv$ πολλαπλασιασμός των συναρτήσεων επί x

Παραδ. 2: $\hat{A} = \dfrac{d}{dx} \equiv$ παραγώγιση των συναρτήσεων ως προς x

…και οι αντίστοιχοι κβαντικοί τελεστές

Τελεστής θέσης: $\hat{x} = x$

Απόρροια του τύπου $\langle x \rangle = \int x \left| \psi(x) \right|^2 dx \equiv \int x\psi^* \psi dx \equiv \int \psi^* (x\psi) dx$

Τελεστής ορμής: $p = -i\hbar \dfrac{d}{dx}$

Τυχόν άλλο μέγεθος $A = A(x, p)$

$$\boxed{\hat{A} = A(\hat{x}, \hat{p}) \equiv A\left(x, -i\hbar \frac{d}{dx} \right)}$$

Όπου $A=A(x,p)$ η **κλασσική έκφραση** του μεγέθους συναρτήσει των βασικών φυσικών μεγεθών x και p.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (**Τελεστής Ενέργειας**)

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

Μέση ορμή, αβεβαιότητα ορμής και ο μαθηματικός μηχανισμός της αρχής της αβεβαιότητας

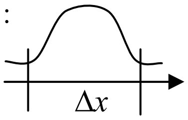
$$\langle p \rangle = \int \psi^* (\hat{p}\psi) dx \equiv \int \psi^* (-i\hbar\psi') dx \Rightarrow \langle p \rangle = 0 \text{ όταν } \psi = \text{πραγματική συνάρτηση}$$

$$\langle p^2 \rangle = \int \psi^* (\hat{p}^2\psi) dx \equiv \int \psi^* (-i\hbar^2 \psi'') dx \underset{\text{ολοκλήρωση}}{\overset{\text{παραγοντική}}{\Rightarrow}} \langle p^2 \rangle = \hbar^2 \int |\psi'|^2 dx$$

$$(\Delta p)^2 = \langle p \rangle - \langle p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle \equiv \hbar^2 \int |\psi'|^2 dx$$

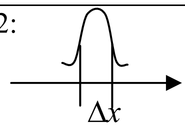
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Η αβεβαιότητα ορμής αποτελεί ένα μέτρο του **πόσο μεγάλες κλίσεις** – πόσο απότομα «σκαμπανεβάσματα» - έχει μια δεδομένη κυματοσυνάρτηση.

Παρ. 1:



Πλατιά $\psi(x)$ [μεγάλο Δx] $\Rightarrow$ μικρές κλίσεις $\Rightarrow$ Μικρό Δp

Παρ. 2:



Στενή $\psi(x)$ [μικρό Δx] $\Rightarrow$ μεγάλες κλίσεις $\Rightarrow$ Μεγάλο Δp

Η αντίστροφη σχέση των Δx και Δp είναι προφανής και αποκαλύπτει τον μαθηματικό μηχανισμό πίσω από την αρχή της αβεβαιότητας $\Delta x \Delta p \geq \hbar / 2$ που φαίνεται πλέον ως μια καθαρά μαθηματική ανισότητα με Δx και Δp που ορίζονται αυστηρά όταν η κυματοσυνάρτηση ψ(x) του σωματιδίου είναι γνωστή.

Κυματοσυναρτήσεις μηδενικής αβεβαιότητας

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν μια κυματοσυνάρτηση ψ ικανοποιεί την «εξίσωση ιδιοτιμών» $\hat{A}\psi = a\psi$ όπου $\hat{A}$ ο κβαντικός τελεστής του μεγέθους A και a ένας αριθμός (ή ιδιοτιμή) τότε η αβεβαιότητα του μεγέθους μηδενίζεται.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν $\hat{A}\psi = a\psi \Rightarrow \langle A \rangle = \int \psi^* (\hat{A}\psi) dx$

$= \int \psi^* (a\psi) dx = a \int \psi^* \psi dx = a \int |\psi|^2 dx = a$

Και παρόμοια, $\langle A^2 \rangle = \int \psi^* (\hat{A}^2 \psi) dx =$

$= \int \psi^* (a^2 \psi) dx = a^2 \int |\psi|^2 dx = a^2$

$\Rightarrow (\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = a^2 - a^2 = 0$

Η μόνη τιμή που μπορεί να προκύψει από τις μετρήσεις του μεγέθους A είναι ιδιοτιμή a.

…και οι λύσεις της εξίσωσης Schrödinger

ΠΟΡΙΣΜΑ: Οι λύσεις της εξισώσεως Schrödinger

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(x) \right)\psi = 0$$

αντιπροσωπεύουν καταστάσεις του σωματιδίου για τις οποίες η αβεβαιότητα της ενέργειάς του μηδενίζεται (ΔE=0).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η εξίσωση Schrödinger δεν είναι παρά η εξίσωση ιδιοτιμών $\hat{H}\psi = E\psi$ του τελεστή ενέργειας

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x).$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Οι ενέργειες που προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης Schrödinger είναι **αυστηρά καθορισμένες**. Η αβεβαιότητα της ενέργειας μηδενίζεται.

ΜΕΛΕΤΗ: *Σ. Τραχανά, Κβαντομηχανική Ι, σελ. 132 – 139, 145 – 148.*