Κεφάλαιο 3: Τυχαίες μεταβλητές και κατανομές πιθανότητας.

Διακριτές τυχαίες μεταβλητές

Θεωρούμε ένα πείραμα τύχης στο οποίο ρίχνουμε ένα νόμισμα τρείς φορές, με πιθανότητα p να εμφανιστούν γράμματα (Γ) σε κάθε ρίψη (σε ένα 'τίμιο' νόμισμα η πιθανότητα αυτή θα είναι 1/2). Υποθέστε ότι αν σε μια ρίψη εμφανιστούν Γ κερδίζουμε 1 ευρώ, ενώ αν εμφανιστεί κεφάλι (Κ) χάνουμε 1 ευρώ. Προφανώς η ποσότητα που μας ενδιαφέρει εδώ, και την οποία συμβολίζουμε με X, είναι το συνολικό μας κέρδος. Είναι φανερό ότι η X μπορεί να πάρει μόνο μία από τις τιμές: 3, 1, -3, και -1. Το ποια από αυτές θα πάρει εξαρτάται από το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος. Αν, για παράδειγμα, το αποτέλεσμα είναι ΓΓΓ η X παίρνει την τιμή 3, ενώ αν είναι ΓΚΓ η X παίρνει την τιμή 1. Στον παρακάτω πίνακα καταγράφουμε τις τιμές της X που αντιστοιχούν στα οκτώ δυνατά αποτελέσματα, ω, του τυχαίου πειράματος, καθώς και την πιθανότητα να εμφανιστεί καθένα από τα αποτελέσματα αυτά (σημειώστε ότι ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων είναι ο αριθμός των δυνατών τριάδων που μπορούμε να φτιάξουμε από τα δύο στοιχεία, Γ, Κ, οι οποίες, σύμφωνα με τη θεωρία του προηγούμενου κεφαλαίου, είναι $2 \times 2 \times 2$).

ω	X	$P(\omega)$
ΓΓΓ	3	p^3
ΓΚΓ	1	$p^2(1-p)$
ΓΓΚ	1	$p^2(1-p)$
ΚΓΓ	1	$p^2(1-p)$
ΓΚΚ	-1	$p(1-p)^2$
ΚΓΚ	-1	$p(1-p)^2$
ΚΚΓ	-1	$p(1-p)^2$
ΚΚΚ	-3	$(1-p)^3$

(Στον παραπάνω πίνακα, η πιθανότητα του αποτελέσματος ΓΓΓ υπολογίστηκε ως γινόμενο των πιθανοτήτων των τριών ανεξάρτητων ενδεχομένων $A =$'στην πρώτη ρίψη Γ', $B =$'στη δεύτερη ρίψη Γ', $D =$'στην τρίτη ρίψη Γ', λαμβάνοντας υπόψη ότι η πιθανότητα της τομής ανεξάρτητων ενδεχομένων ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων τους. Ανάλογα για τα άλλα αποτελέσματα.)

Μπορούμε να σκεφτόμαστε τη X ως μια πραγματική μεταβλητή η οποία για κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο ω του Ω παίρνει μια ορισμένη τιμή (εδώ μια από τις τιμές -3,-1,1,3). Η πιθανότητα η X να πάρει μια ορισμένη τιμή, έστω 1, είναι η πιθανότητα του γεγονότος $A = \{\omega : X(\omega) = 1\}$ το οποίο περιλαμβάνει όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα ω του Ω που οδηγούν στην τιμη $X = 1$ (στο παράδειγμά μας τα ΓΓΚ, ΓΚΓ και ΚΓΓ). Από τον πίνακα βλέπουμε ότι το A έχει πιθανότητα $P(A) = 3p^2(1-p)$ να πραγματοποιηθεί (το A είναι η ένωση των ανεξάρτητων ενδεχομένων ΓΓΚ, ΓΚΓ και ΚΓΓ). Ανάλογα μπορούμε να χειριστούμε και τις υπόλοιπες τιμές της X. Έτσι, για κάθε τιμή που μπορεί να πάρει η X, έστω x_i (που εδώ θα είναι κάποιο από τα $-3, -1, 1, 3$), η πιθανότητα με την οποία παίρνει αυτή την τιμή, $P(X = x_i)$, είναι πλήρως καθορισμένη (π.χ. $P(X = 1) = 3p^2(1 - p)$). Θα δούμε ότι η X είναι ένα παράδειγμα διακριτής τυχαίας μεταβλητής (ή στοχαστικής συνάρτησης, όπως επίσης λέγεται).

Ορισμός: Διακριτή τυχαία μεταβλητή X σε ένα δειγματοχώρο Ω είναι μια μεταβλητή X που ορίζεται για κάθε δυνατό αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος και για κάθε τέτοιο αποτέλεσμα παίρνει μια ορισμένη τιμή από ένα πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.
Ορισμός: Η πραγματική συνάρτηση f που ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς από την $f(x) = P(X = x)$, λέγεται **διακριτή συνάρτηση πυκνότητας** ή **συνάρτηση πιθανότητας** ή **κατανομή πιθανότητας** της X (Δίνει την πιθανότητα η X να πάρει μια ορισμένη τιμή από το πεδίο τιμών της. Π.χ., για την τυχαία μεταβλητή X που ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου $f(1) = P(X = 1)$ δίνει την πιθανότητα η μεταβλητή X (το κέρδος) να πάρει την τιμή 1 (να είναι 1 ευρώ).)

Ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή X που ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου, και ας υποθέσουμε ότι $p = 0.5$. Τότε η X έχει τη διακριτή συνάρτηση πυκνότητας που ορίζεται από τις

$$f(-3) = 0.125,\ f(-1) = 0.375,\ f(1) = 0.375,\ f(3) = 0.125.$$

και $f(x) = 0$, αν $x \neq -3, -1, 1, 3$. Η συνάρτηση πυκνότητας ή απλά πυκνότητα f μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής έχει τις ακόλουθες **ιδιότητες**:

(1) $f(x) \geq 0, \quad x \in R$

(2) Το σύνολο $\{x : f(x) \neq 0\}$ (δηλαδή το σύνολο των τιμών της Q που έχουν μη μηδενική πιθανότητα) είναι ένα πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του R. Έστω $\{x_1, x_2, ...,\}$ αυτό το σύνολο. Τότε

(3) $\sum_i f(x_i) = 1$.

Οι ιδιότητες (1) και (2) προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της f. Για να δούμε αν ισχύει η (3) παρατηρούμε ότι τα ενδεχόμενα $\{\omega : X(\omega) = x_i\}$ (δηλαδή τα ενδεχομενα του Ω που δίδουν για τη Q την τιμή x_i) είναι ξένα και η ένωσή τους είναι το Ω. Άρα

$$\sum_i f(x_i) = \sum_i P(X = x_i) = P\left(\bigcup_i \{X = x_i\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε εναλλακτικά την πυκνότητα f ως εξής:
Ορισμός: Μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο R λέγεται διακριτή συνάρτηση πυκνότητας ή απλά διακριτή πυκνότητα αν ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες (1) – (3).

Παράδειγμα 1: Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές, και ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως το πλήθος των Κ που εμφανίστηκαν. Να υπολογιστεί η πυκνότητα f της X.

Η αντιστοιχία μεταξύ των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος και των τιμών της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X δίνεται στον παρακάτω πίνακα, μαζί με την

ω	X	$P(\omega)$
ΚΚ	2	1/4
ΓΓ	0	1/4
ΚΓ	1	1/4
ΓΚ	1	1/4

πιθανότητα των σημείων του δειγματοχώρου Ω του πειράματος. Η πυκνότητα που αντιστοιχεί στη X είναι

$$f(0) = P(X=0) = \frac{1}{4},\ f(1) = P(X=1) = \frac{1}{2},\ f(2) = P(X=2) = \frac{1}{4},$$

και $f(x) = 0$ για $x \neq 0, 1, 2$. Προσέξτε ότι $f(0) + f(1) + f(2) = 1$. Η γραφική παράσταση της f δίνεται είτε με ένα ραβδόγραμμα, είτε με ένα ιστόγραμμα. Σε ένα ραβδόγραμμα το άθροισμα των τεταγμένων είναι 1, ενώ σέ ένα ιστόγραμμα το άθροισμα των εμβαδών είναι 1, όπως προκύπτει από την ιδιότητα (3). Σε ένα ιστόγραμμα μπορούμε να φανταστούμε ότι η τυχαία μεταβλητή X γίνεται συνεχής, λόγου χάρη $X = 1$ σημαίνει ότι η X είναι μεταξύ 0.5 και 1.5.

Σημειώστε ότι και άλλες τυχαίες μεταβλητές μπορούν να οριστούν στον ίδιο δειγματοχώρο Ω. Λόγου χάρη, στο προηγούμενο παράδειγμα θα μπορούσαμε να ορίσουμε μια τυχαία μεταβλητή Y ως το πλήθος των Κ που εμφανίζονται μείον το πλήθος των Γ που εμφανίζονται. Τότε, οι δυνατές τιμές της Y θα ήταν -2,0,2, ενώ η αντίστοιχη πυκνότητα θα έπαιρνε τις τιμές $f(-2) = 1/4,\ f(0) = 1/2,\ f(2) = 1/4$ και $f(x) = 0$ για $x \neq -2, 0, 2$.

Κάθε διακριτή συνάρτηση πυκνότητας, δηλαδή κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1) – (3), είναι η πυκνότητα κάποιας τυχαίας μεταβλητής X. Με άλλα λόγια, αν μας δοθεί η f μπορούμε πάντα να κατασκευάσουμε ένα δειγματοχώρο Ω και μια τυχαία μεταβλητή ορισμένη στον Ω, της οποίας η διακριτή πυκνότητα να είναι f. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιούμε εκφράσεις όπως 'έστω X μια τυχαία μεταβλητή με διακριτή πυκνότητα f' χωρίς να διευκρινίζουμε τον δειγματοχώρο f στον οποίο ορίζεται η X. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι επιλέγουμε ένα χαρτί από μια δεσμίδα με n χαρτιά, και θέτουμε $X = i$ αν επιλεγεί το $i-$οστο χαρτί. Τότε, $P(X = i) = 1/n$, άρα μπορούμε να περιγράψουμε το πείραμα λέγοντας ότι παρατηρούμε μια τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει ακέραιες τιμές $1, 2, 3, ..., n$ και έχει πυκνότητα $f(x) = 1/n$ αν $x = 1, 2, 3, ..., n$ και $f(x) = 0$ αλλιώς.

Γενικά, κάθε τυχαίο πείραμα που έχει πεπερασμένα ή άπειρα αριθμήσιμα το πλήθος δυνατά αποτελέσματα μπορεί να περιγραφεί ως η παρατήρηση της τιμής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X. Για την ακρίβεια, το πείραμα πολλές φορές μας δίνεται ήδη μ' αυτή τη μορφή.

Στα δύο επόμενα παραδείγματα παρουσιάζονται δύο τυπικές διακριτές πυκνότητες.

Παράδειγμα 2: Η **γεωμετρική πυκνότητα**.
Έστω $0 < p < 1$. Τότε η πραγματική συνάρτηση f που ορίζεται στο R από την

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^x, & x = 0, 1, 2, 3, ... \\ 0, & x \neq 0, 1, 2, 3, ..., \end{cases}$$

είναι μια διακριτή πυκνότητα και λέγεται γεωμετρική πυκνότητα με παράμετρο p.

Για να δούμε αν η f είναι πυκνότητα, το μόνο που χρειάζεται να ελέγξουμε είναι ότι ισχύει η ιδιότητα (3), αφού οι (1) και (2) ικανοποιούνται προφανώς. Όμως,

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(x_i) = \sum_{i=0}^{\infty} p(1-p)^i = p\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i = p \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

αφού το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς $\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i$ είναι ίσο με $1/p$.

Παράδειγμα 3: Η **πυκνότητα Poisson**.
Έστω λ ένας θετικός αριθμός. Η πυκνότητα Poisson με παράμετρο λ ορίζεται από τη σχέση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x = 0, 1, 2, ... \\ 0, & x \neq 0, 1, 2, 3, ... \end{cases}$$

Η συνάρτηση f προφανώς ικανοποιεί τις (1) και (2) του ορισμού της διακριτής συνάρτησης πυκνότητας. Για να δούμε αν ισχύει η (3) θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης

$$e^{\lambda} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

Έτσι,

$$\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Η εμπειρία δείχνει ότι πολλά τυχαία φαινόμενα που έχουν σχέση με το μέτρημα ακολουθούν κατά προσέγγιση την κατανομή Poisson, όπως για παράδειγμα τα εξής:

(α) Το πλήθος των ατόμων μιας ραδιενεργού ουσίας που αποσυντίθενται στη μονάδα του χρόνου.

(β) Το πλήθος των κλήσεων που δέχεται ένα τηλεφωνικό κέντρο στη μονάδα του χρόνου. (Δηλαδή η πιθανότητα το πλήθος των κλήσεων που δέχεται το τηλεφωνικό κέντρο να είναι $x = 0, 1, 2, 3, ..$ δίνεται από το $f(x) = \lambda^x e^{-\lambda}/x!$.)

(γ) Το πλήθος των τυπογραφικών λαθών σε μια σελίδα ενός βιβλίου,
κ.τ.λ.

Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής** ή απλά συνάρτηση κατανομής για μια τυχαία μεταβλητή X ορίζεται από τη σχέση

$$F(x) = P(X \leq x),$$

όπου x οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός ($-\infty < x < \infty$). Η συνάρτηση κατανομής μπορεί να υπολογιστεί από την πυκνότητα f, επειδή

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u),$$

όπου το άθροισμα στο δεξιό μέλος νοείται ως προς όλα τα u για τα οποία $u \leq x$. Αντίστροφα, η πυκνότητα μπορεί να προκύψει από τη συνάρτηση κατανομής, όπως θα δούμε και στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4: Προσδιορίστε τη συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X του παραδείγματος 1, και δώστε τη γραφική της παράσταση.

Η $F(x)$ θα είναι:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 0 \\ 1/4, & 0 \leq x < 1 \\ 3/4, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Για παράδειγμα, για $1 \leq x < 2$, η F θα είναι $F(x) = f(0) + f(1) = 3/4$. Βλέπουμε ότι η F είναι μη φθίνουσα, κλιμακωτή συνάρτηση, και ότι για κάθε ακέραιο x, η F παρουσιάζει άλμα (ασυνέχεια) μεγέθους $f(x)$ στο x, ενώ είναι σταθερή στο διάστημα $[x, x+1)$. Έτσι, μπορούμε να προσδιορίσουμε την f από την F και αντιστρόφως.

Παράδειγμα 5: Θεωρήστε τη συνάρτηση πυκνότητας $f(x) = 1/10$ για $x = 1, 2, ..., 10$ και $f(x) = 0$ για οποιοδήποτε άλλο x. Ποιά είναι η συνάρτηση κατανομής F της f·

Είναι $F(x) = 0$ αν $x < 1$, $F(x) = 1$ αν $x > 10$, και $F(x) = \sum_{u \leq x} f(u) = \frac{[x]}{10}$, αν $1 \leq x \leq 10$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα, λόγου χάρη, $P(3 < x \leq 5)$, είτε με τη βοήθεια της f, γράφοντας

$$P(3 < x \leq 5) = f(4) + f(5) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10},$$

είτε με τη βοήθεια της F:

$$P(3 < x \leq 5) = F(5) - F(3) = \frac{2}{10}.$$

Αν θέλω να βρώ την πιθανότητα $P(3 \leq x \leq 5)$ τότε γράφω

$$P(3 \leq x \leq 5) = P(2 < x \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{3}{10},$$

κ.τ.λ.

Γενικά, ισχύει η σχέση

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a),$$

η οποία είναι πολύ χρήσιμη για τον υπολογισμό πιθανοτήτων.

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Στη θεωρία, αλλά και στην πράξη, εμφανίζονται συχνά καταστάσεις στις οποίες οι φυσιολογικές τυχαίες μεταβλητές που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε είναι συνεχείς και όχι διακριτές, δηλαδή μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή σε ένα δεδομένο διάστημα (η τιμή αυτή και εδώ εξαρτάται προφανώς από το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος). Τέτοια παραδείγματα είναι η τυχαία μεταβλητή, έστω T, που παριστάνει το χρόνο διάσπασης ενός ραδιενεργού σωματιδίου ή το χρόνο ζωής ενός ηλεκτρικολυ λαμπτήρα, η τυχαία μεταβλητή X που παριστάνει τη θέση ενός κβαντομηχανικού σωματιδίου παγιδευμένου σε μια περιοχή του χώρου, η τυχαία μεταβλητή που παριστάνει το ύψος ενός ατόμου από ένα δεδομένο δείγμα ατόμων, κ.ο.κ.

Γενικά, τυχαίες μεταβλητές που αφορούν μετρήσεις φυσικών ποσοτήτων, όπως οι συντεταγμένες στο χώρο, το βάρος, ο χρόνος, η θερμοκρασία, η τάση του ρεύματος, κ.τ.λ., περιγράφονται καλύτερα με συνεχείς τυχαίες μεταβλητές.

Στην περίπτωση των συνεχών τυχαίων μεταβλητών η έκφραση 'πιθανότητα η μεταβλητή X να πάρει μια ορισμένη τιμή x' αντικαθίσταται από την 'πιθανότητα η μεταβλητή X να πάρει τιμές σε ένα ορισμένο απειροστό διάστημα γύρω από το σημείο x'. Με βάση αυτό, η **συνάρτηση πυκνότητας** για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές ορίζεται από τη σχέση

$$f(x)dx = P(x < X \leq x + dx).$$

Προσέξτε ότι, αντίθετα με ό,τι συμβαίνει για διακριτές τυχαίες μεταβλητές, η τιμή της $f(x)$ για το ενδεχόμενο x δεν είναι η πιθανότητα να συμβεί το x.[1] Αυτό που παριστάνει πιθανότητα είναι η το γινόμενο $f(x)dx$.

Από τον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας για συνεχείς κατανομές γίνεται φανερό ότι η πιθανότητα το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος να είναι στο διάστημα $[a, b]$ δίνεται από την

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

('άθροισμα' των πιθανοτήτων όλων των απειροστών διαστημάτων dx από το a ως το b), δηλαδή από το εμβαδόν κάτω από την f στο διάστημα $[a, b]$.

Προφανώς, η πυκνότητα f θα είναι μια μη αρνητική συνάρτηση και θα ικανοποιεί την

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

αφού η ολική πιθανότητα θα πρέπει να είναι πάντα μονάδα. Η προηγούμενη σχέση χρησιμοποιείται πολλές φορές και ως σχέση ορισμού της συνάρτησης πυκνότητας f.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε τη συνάρτηση κατανομής για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, η οποία είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό διαφόρων πιθανοτήτων που σχετίζονται με την τυχαία μεταβλητή X.

Ορισμός: Η **συνάρτηση κατανομής** F μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι η συνάρτηση

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy, \quad -\infty < x < \infty.$$

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι

$$P(a < x \leq b) = F(b) - F(a), \quad a \leq b.$$

Παρατηρούμε ότι για να υπολογίσουμε την πυκνότητα μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής αρκεί να παραγωγίσουμε την F, οπότε

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x στο οποίο η F είναι συνεχής. Προφανώς, από την απαίτηση να είναι η πιθανότητα μηδέν όταν η τυχαία μεταβλητή

[1] Σημειώστε ότι για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, όπου ο δειγματοχώρος περιλαμβάνει άπειρα στο πλήθος σημεία, η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να πάρει μια συγκεκριμμένη τιμή είναι μηδέν.

παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή, η F δεν μπορεί να έχει άλματα (ασυνέχειες), άρα θα πρέπει να είναι συνεχής. Επομένως, η X είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή αν και μόνο αν η F είναι συνεχής για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Παράδειγμα 6: Υποθέστε ότι ρίχνουμε ένα βέλος σε ένα στόχο σχήματος κυκλικού δίσκου με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και ακτίνα R, στο επίπεδο. Θεωρούμε ότι ο δειγματοχώρος του πειράματος είναι ομοιόμορφος, δηλαδή η πιθανότητα να καρφωθεί το βέλος σε σημείο μιας περιοχή του στόχου εμβαδού Ε, ορίζεται από το κλάσμα του Ε προς το συνολικό εμβαδόν του στόχου. Αν X είναι η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει την απόσταση του σημείου που ¨επιλέχθηκε¨ από το Ο, τότε να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής της.

Έστω ότι το βέλος καρφώνεται σε σημείο που απέχει x, $0 \leq x \leq R$, από το Ο. Τότε, το ενδεχόμενο $A = \{\omega | X(\omega) \leq x\}$ (δηλαδή το ενδεχόμενο που έχει ως σημεία τα δειγματοσημεία ω του Ω για τα οποία η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές μικρότερες ή ίσες με x) είναι ένας δίσκος με κέντρο Ο και ακτίνα x, και εμβαδόν πx^2. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το A ορίζεται από την

$$P(A) = \frac{\text{area of } A}{\text{target area}} = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2},$$

και η F θα είναι

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/R^2, & 0 \leq x \leq R \\ 1, & x > R \end{cases}$$

Αν $A = \{\omega | a \leq X \leq b\}$, με $0 \leq a \leq b \leq R$, τότε $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{b^2 - a^2}{R^2}$, ή

$$P(a < X \leq b) = 2\frac{b-a}{R^2}\frac{b+a}{2}.$$

Έτσι, η πιθανότητα που αποδίδεται στο διάστημα A δεν εξαρτάται μόνο από το μήκος του, αλλά επίσης και από το πού βρίσκεται, αφού το $(a+b)/2$ είναι το μέσο του διαστήματος $[a, b]$. Μιλώντας χονδρικά, γεγονότα της μορφής $A = \{\omega | a \leq X \leq b\}$ είναι πιο πιθανά αν είναι μακριά από το κέντρο του στόχου.

Παράδειγμα 7: **Κανονική πυκνότητα (Gauss)**.
Έστω η συνάρτηση $f(x) = ce^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$. Υπολογίστε το c ώστε η f να γίνει πυκνότητα.

Για να κάνουμε την f πυκνότητα πρέπει να βρούμε το c έτσι ώστε $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, Έτσι, $c\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = 1$. Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$ υπολογίζεται με το εξής τέχνασμα: Θέτω $\frac{1}{c} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$, οπότε

$$\frac{1}{c^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy.$$

Πηγαίνοντας σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\frac{1}{c^2} = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-r^2/2}rdrd\theta = 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}rdr = -2\pi\left[e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} = 2\pi.$$

Άρα, $c = 1/\sqrt{2\pi}$, και $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. Η f λέγεται τυπική κανονική πυκνότητα. Προφανώς είναι συμμετρική, αφού $f(x) = f(-x)$ για κάθε x.

Μέση τιμή τυχαίων μεταβλητών

Υποθέστε ότι συμμετέχετε σε ένα τυχερό παιχνίδι. Κάθε φορά που παίζετε 'εισπράτετε' ένα ποσό X, όπου X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με πιθανές τιμές $x_1, x_2, ..., x_r$, τόσο θετικές όσο και αρνητικές. Το ερώτημα είναι αν συμφέρει να συμμετάσχετε. Ας υποθέσουμε ότι το παιχνίδι παίζεται N φορές και ότι οι διαφορετικές παρτίδες του παιχνιδιού συνιστούν ανεξάρτητες επαναλήψεις του ίδιου πειράματος, το οποίο παρατηρεί τη μεταβλητή X. Αν συμβολίσουμε με $N(x_i)$ το πλήθος των παρτίδων (στις N) που έδωσαν για τη X την τιμή x_i, τότε η συνολική είσπραξη/απώλεια από το παιχνίδι θα είναι

$$N(x_1)x_1 + N(x_2)x_2 + \cdots + N(x_r)x_r = \sum_{i=1}^{r} x_i N(x_i).$$

Το μέσο ποσό που εισπράτετε (ή χάνετε) τότε είναι

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \frac{N(x_i)}{N}.$$

Ερμηνεύοντας την πιθανότητα ως σχετική συχνότητα, αν το N είναι αρκετά μεγάλο, περιμένουμε ότι

$$\frac{N(x_i)}{N} \simeq P(X = x_i) = f(x_i).$$

Επομένως το μέοο ποσό που εισπράτετε ή χάνετε θα πρέπει να είναι περίπου ίσο με $\mu = \sum_{i=1}^{r} x_i f(x_i)$. Αν το ποσό αυτό είναι θετικό φαίνεται λογικό να περιμένουμε καθαρό κέρδος από το παιχνίδι, αν είναι αρνητικό ζημία και αν είναι μηδέν ούτε κέρδος ούτε ζημία.

Γενικά, έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X που παίρνει τις πεπερασμένες το πλήθος τιμές $x_1, x_2, ..., x_r$. Τότε η μέση τιμή της X, η οποια συμβολίζεται με μ ή $E(X)$ ή $\bar{X}$ ή $< X >$ είναι ο αριθμός

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i f(x_i),$$

όπου $f(x)$ είναι η πυκνότητα της X.

Υποθέστε ότι η X έχει την ομοιόμορφη πυκνότητα $f(x_i) = P(X = x_i) = 1/r$. Τότε από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε ότι $E(X) = (1/r)\sum_{i=1}^{r} x_i = (x_1 + x_2 + \cdots + x_r)/r$, δηλαδή στην περίπτωση αυτή η $E(X)$ είναι απλώς ο μέσος όρος των πιθανών τιμών της X. Γενικά, όπως φαίνεται από τον ορισμό της, η $E(X)$ είναι ένας ¨μέσος όρος¨ με βάρη των πιθανών τιμών της X. Όταν το πλήθος των τιμών της X είναι άπειρο (αριθμήσιμο), η μέση τιμή έχει νόημα αν το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$ είναι καλά ορισμένο.

Για μια συνεχή τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα $f(x)$ η μέση τιμή ορίζεται από τη σχέση

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx,$$

όπου το άθροισμα πάνω σε όλες τις πιθανές τιμές της X έχει αντικατασταθεί με ολοκλήρωμα.

Παρακάτω δίνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες της μέσης τιμής, που προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό της. Για δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y με πεπερασμένη μέση τιμή, έχουμε α) Αν η Q παίρνει μόνο μία τιμή, $c =$σταθερά, και $P(X = c) = 1$, τότε $E(X) = c$.

β) Αν $c =$σταθερά, τότε η cX έχει πεπερασμένη μέση τιμή, και $E(cX) = cE(X)$.

γ) Η $X + Y$ έχει πεπερασμένη μέση τιμή και $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

δ) Υποθέστε ότι $P(X \geq Y) = 1$. Τότε, $E(X) \geq E(Y)$. Επιπλέον, $E(X) = E(Y)$, αν και μόνο αν $P(X = Y) = 1$.

ε) $|E(X)| \leq E(X)$

στ) $E(XY) = E(X)E(Y)$, αν X και Y είναι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Παράδειγμα 8: Υπολογίστε τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί τη (διακριτή) πυκνότητα Poisson του Παραδείγματος 3, δηλαδή $f(j) = P(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \\ \Rightarrow E(X) = \lambda, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = e^{\lambda}$.

Παράδειγμα 9: Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, δηλαδή $f(j) = P(X = j) = p(1-p)^j$. Υπολογίστε την $E(X)$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{j=0}^{\infty} jp(1-p)^j = p(1-p) \sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j-1} \\ &= -p(1-p) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{dp}[(1-p)^j] = -p(1-p) \frac{d}{dp} \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j \end{aligned}$$

Αλλά $\sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^j = 1/p$, οπότε

$$E(X) = -p(1-p) \frac{d}{dp}(1/p) = (1-p)/p.$$

Παράδειγμα 10: Υποθέτουμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει ομοιόμορφη πυκνότητα στο διάστημα (a, b), δηλαδή $f(x) = c$ (c σταθερά) για κάθε $x \in (a, b)$ και $f(x) = 0$ για $x \leq a$ και $x \geq b$. Τότε,

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b+a}{2}.$$

Παράδειγμα 11: Η πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$f(x) = \begin{cases} x/2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Υπολογίστε τη μέση τιμή της X.

Έχουμε

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Ροπές, διασπορά, τυπική απόκλιση τυχαίων μεταβλητών

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, και $r \geq 0$ ακέραιος. Ονομάζουμε **ροπή τάξης** r της X τη μέση τιμή της μεταβλητής X^r (αν υπάρχει, αν δηλαδή είναι πεπερασμένη). Αν η X έχει ροπή τάξης r, τότε η ροπή τάξης r της $(X - \mu)$, όπου μ η μέση τιμή της X, λέγεται **κεντρική ροπή τάξης** r της X. Έτσι, η ροπή τάξης r και η κεντρική ροπή τάξης r για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \sum_{j=1}^{n} x_j^r f(x_j), \\ E[(X-\mu)^r] &= \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^r f(x_j). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, η ροπή τάξης r προσδιορίζεται πλήρως από την πυκνότητα f της τυχαίας μεταβλητής. Μπορούμε λοιπόν να μιλάμε για τη ροπή τάξης r και την κεντρική ροπή τάξης r της f. Για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, οι παραπάνω σχέσεις τροποποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx, \\ E[(X-\mu)^r] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x) \end{aligned}$$

Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει ροπή τάξης r, τότε η X έχει ροπή κάθε τάξης k με $k \leq r$.

Γενικά, όσο περισσότερες ροπές της X γνωρίζουμε, τόσο περισσότερες πληροφορίες έχουμε αποκτήσει για την πυκνότητα της X. Στις εφαρμογές το μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι δύο πρώτες ροπές. Προσέξτε ότι η ροπή πρώτης τάξης ($r = 1$), είναι απλώς η μέση τιμή της X. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη δεύτερη ροπή ($r = 2$). Τότε, η **διασπορά** ή **διακύμανση** ή **μεταβλητότητα** της X, η οποία συμβολίζεται με $\mathrm{Var(X)}$ ή $(\Delta X)^2$ ή $\sigma^2(X)$, ή απλά σ^2, ορίζεται από την

$$\mathrm{Var(X) = E[(X - E(X))^2]}.$$

Προφανώς η διασπορά είναι μη αρνητικός αριθμός, και δείχνει πόσο ¨απλωμένη¨ είναι η κατανομή της πιθανότητας. Είναι δηλαδή ένα μέτρο του πόσο διασπαρμένες είναι οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής γύρω από τη μέση τιμή της, μ. Αν οι διάφορες δυνατές τιμές της X είναι συγκεντρωμένες κοντά στη μέση τιμή μ τότε η διασπορά $\sigma^2(X)$ είναι μικρή, διαφορετικά είναι μεγάλη. Η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς λέγεται **τυπική**

απόκλιση και συμβολίζεται συχνά με ΔX ή $\sigma(X)$ ή σ. Σημειώστε ότι αν η X εκφράζεται σε κάποιες φυσικές μονάδες, τότε η τυπική απόκλιση σ εκφράζεται στις ίδιες μονάδες. Από τον ορισμό της, οι σχέσεις που δίνουν τη διασπορά μιας διακριτής ή συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X είναι

$$\sigma^2(X) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu)^2 f(x_j)$$
$$\sigma^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)$$

αντίστοιχα.

Παράδειγμα 12: Υπολογίστε τη διασπορά σ^2 και την τυπική απόκλιση σ της πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} .$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι $\mu = 4/3$. Έτσι,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{2}xdx = \frac{4}{9},$$

οπότε $\sigma = 2/3$.

Παρακάτω δίνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες της διασποράς για δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y.

α) $\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$.

β) $\mathrm{Var}(cX) = c^2\mathrm{Var}(X)$, όπου $c =$σταθερά.

γ) Αν X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

δ) Αν X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)],$$

όπου μ_X και μ_U η μέση τιμή της X και Y, αντίστοιχα.

Η ποσότητα $E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$ λέγεται **συνδιασπορά** ή **συνδιακύμανση** ή **συμμεταβλητότητα** των τυχαίων μεταβλητων X και Y, και συμβολιζεται με σ_{XY} ή $\mathrm{Cov}(X,Y)$. Δηλαδή

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)].$$

Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε $\sigma_{XY} = 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα. Για X και Y δύο τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες μη μηδενικές διασπορές, ο λεγόμενος **συντελεστής συσχέτισης** ορίζεται από την

$$\rho = \rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Ο συντελεστής συσχέτισης μας δίνει ένα μέτρο για το βαθμό εξάρτησης ανάμεσα στις δύο τυχαίες μεταβλητές. Λέμε ότι οι δύο τυχαίες μεταβλητές είναι ασυσχέτιστες αν $\rho = 0$. Αφού $\sigma_{XY} = 0$ όταν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, βλέπουμε αμέσως ότι δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές είναι πάντα ασυσχέτιστες. Είναι δυνατόν όμως δύο εξαρτημένες τυχαίες μεταβλητές να είναι επίσης ασυσχέτιστες. Για τις εφαρμογές στη Στατιστική είναι σημαντικό να ξέρουμε ότι ο συντελεστής ρ παίρνει πάντα τιμές μεταξύ -1 και 1.

Ασκήσεις

1. Να προσδιοριστεί η σταθερά c ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

να είναι συνάρτηση πυκνότητας. Υπολογίστε τη συνάρτηση κατανομής για την τυχαία μεταβλητή της οποίας η f είναι συνάρτηση πυκνότητας. Κατόπιν υπολογίστε την $P(1 < X < 2)$.

2. Ένα νόμισμα ρίχνεται τρεις φορές. Αν η τυχαία μεταβλητή Z παριστάνει το πλήθος των αποτελεσμάτων Κ, τότε βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας και κατανομής της Z και παραστήστε τις γραφικά.

3. Μια τυχαία μεταβλητή Y έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(y) = \begin{cases} cy^2, & 1 \le y \le 2 \\ cy, & 2 \le y \le 3 \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Να υπολογιστούν: α) η σταθερά c, β) οι πιθανότητες $P(Y > 2)$ και $P(\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{2})$.

4. Υποθέστε ότι διαλέγετε τυχαία έναν πραγματικό αριθμό X από το διάστημα [2,10].

α) Βρείτε την συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$ και την πιθανότητα ενός γεγονότος A για το πείραμα αυτό, όπου A είναι ένα υποδιάστημα $[a, b]$ του [2,10].

β) Από το (α), βρείτε τις πιθανότητες $P(X > 5)$, και $P(5 < X < 7)$.

5. Υποθέστε ότι διαλέγετε έναν πραγματικό αριθμό X από το διάστημα [2,10], με μιά συνάρτηση πυκνότητας της μορφής

$$f(x) = c\,x,$$

όπου c είναι μιά σταθερά.

α) Βρείτε το c .

β) Βρείτε την $P(A)$, όπου $A = [a, b]$ είναι ένα υποδιάστημα του [2,10].

γ) Βρείτε τις $P(X > 5)$ και $P(X < 7)$.

6. Λύστε το προηγούμενο πρόβλημα με $f(x) = c/x$.

7. Υποθέστε ότι παρατηρείτε μια ραδιενεργό πηγή η οποία εκπέμπει σωμάτια με ρυθμό που περιγράφεται από την εκθετική συνάρτηση πυκνότητας
$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$
όπου $\lambda = 1$, έτσι ώστε η πιθανότητα $P(0, T)$ το σωματίδιο να εμφανιστεί στα επόμενα T δευτερόλεπτα είναι
$$P([0, T]) = \int_0^T \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt.$$
Βρείτε την πιθανότητα ένα σωματίδιο (όχι απαραίτητα το πρώτο) να εμφανιστεί

α) εντός του επόμενου δευτερολέπτου,

β) εντός των επόμενων τριών δευτερολέπτων,

γ) μεταξύ του τρίτου και τέταρτου δευτερολέπτου από τώρα,

δ) μετά από τέσσερα δευτερόλεπτα από τώρα.

8. Διαλέξτε έναν αριθμό B τυχαία από το διάστημα $[0, 1]$ με ομοιόμορφη πυκνότητα. Βρείτε την πιθανότητα

α) $P(1/3 < B < 2/3)$.

β) $P(B < 1/4$ ή $1 - B < 1/4)$.

9. Μια τυχαία μεταβλητή έχει πυκνότητα
$$f(x) = \frac{c}{x^2 + 1},$$
όπου $-\infty < x < \infty$. (α) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c. (β) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(1/3 < X^2 < 1)$. (γ) Προσδιορίστε τη συνάρτηση κατανομής για τη δοσμένη $f(x)$.

10. Η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι
$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
Βρείτε (α) την πυκνότητα, (β) την πιθανότητα $P(X > 2)$, και (γ) την πιθανότητα $P(-3 < X \leq 4)$.

14. Η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι
$$F(x) = \begin{cases} cx^3, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
Εάν $P(X = 3) = 0$, να βρεθούν (α) η σταθερά c, (β) η πυκνότητα, (γ) οι πιθανότητες $P(X > 1)$, $P(1 < X < 2)$.

11. Μπορεί η συνάρτηση
$$F(x) = \begin{cases} c(1 - x^2), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$
να παριστάνει συνάρτηση κατανομής; Γιατί;

12. Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή έχει πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{για } x > 0 \\ 0, & \text{για } x \leq 0. \end{cases}$$

Να υπολογιστούν

α) η μέση τιμή της X,

β) η μέση τιμή της X^2, και

γ) η διασπορά και η τυπική απόκλιση της X.