Κεφάλαιο 2: Διατάξεις και Συνδυασμοί.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή – Βασική αρχή απαρίθμησης – Διατάξεις με και χωρίς επανατοποθέτηση – Συνδυασμοί – Ασκήσεις

Εισαγωγή

Μέχρι το τέλος αυτού του κεφαλαίου θα θεωρούμε πειράματα τύχης των οποίων τα στοιχειώδη γεγονότα (τα στοιχεία του δειγματοχώρου Ω) είναι ισοπίθανα. Τότε, αν ο αριθμός των σημείων του Ω είναι s, ένα γεγονός A το οποίο περιλαμβάνει j σημεία έχει πιθανότητα j/s να πραγματοποιηθεί.

Γενικότερα, η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα γεγονός A είναι $P(A) = N(A)/s$, όπου $N(A)$ το πλήθος των σημείων του A. Το πρόβλημα λοιπόν του υπολογισμού της $P(A)$ ανάγεται σε πολλές περιπτώσεις, σ' αυτό του υπολογισμού του $N(A)$. Όπως είδαμε και στα προηγούμενα, η συνηθισμένη διαδικασία για τον υπολογισμό της $P(A)$ είναι να ¨μετρήσουμε¨ το πλήθος των σημείων του A, $N(A)$, και να διαιρέσουμε με το s. Ωστόσο, ο υπολογισμός του $N(A)$ είναι εύκολος μόνο αν το A έχει λίγα σημεία. Ακόμα και για μέτριο πλήθος σημείων, η μέθοδος της ευθείας απαρίθμησης είναι πρακτικά ανεφάρμοστη. Έτσι, η ανάγκη για απλούς κανόνες απαρίθμησης γίνεται επιτακτική. Θα παρουσιάσουμε παρακάτω τεχνικές απαρίθμησης που είναι στοιχειώδεις, έχουν ευρύ φάσμα εφαρμογών, και είναι πολύ χρήσιμες στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Παράδειγμα 1: Πηγαίνετε να γευματίσετε σ' ένα εστιατόριο πολυτελείας, και ο σερβιτόρος σας πληροφορεί ότι έχετε:

α) δύο επιλογές για ορεκτικό (σούπα ή χυμό),

β) τρείς επιλογές για κύριο πιάτο (κρέας, ψάρι, και πιάτο λαχανικών),

γ) δύο για επιδόρπιο (παγωτό ή γλυκό).

Ποιες είναι οι δυνατές επιλογές σας για το πλήρες γεύμα;

Το μενού αποφασίζεται σε τρία στάδια, και στο κάθε στάδιο ο αριθμός των δυνατών επιλογών σας δεν εξαρτάται από το τι διαλέξατε στο προηγούμενο. Δύο επιλογές για το πρώτο στάδιο, τρεις για το δεύτερο και δύο για το τρίτο. Προφανώς ο συνολικός αριθμός επιλογών είναι το γινόμενο του αριθμού των επιλογών σε κάθε στάδιο. Εδώ έχουμε $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ διαφορετικά μενού, για να διαλέξουμε.

Παράδειγμα 2: Σε ένα πείραμα τύχης ρίχνουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι. Ποιος είναι ο δειγματοχώρος αυτού του πειράματος·

Προφανώς αυτό είναι ένα πείραμα που εκτελείται σε δύο στάδια. Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε πρώτα το νόμισμα (Π_1). Έχουμε δύο δυνατά αποτελέσματα, κεφάλι (Κ) ή γράμματα (Γ). Κατόπιν ρίχνουμε το ζάρι (Π_2). Γι' αυτό έχουμε έξι δυνατά αποτελέσματα, τα 1,2,3,4,5,6. Τώρα, κάθε σημείο του δειγματοχώρου του Π_1 μπορεί να συνδυαστεί με καθένα από τα 6 σημεία του δειγματοχώρου του Π_2, για να δώσει

$2 \cdot 6$ το πλήθος διατεταγμένα ζεύγη. Ο δειγματοχώρος του σύνθετου πειράματος θα είναι λοιπόν
$\Omega =$ { (Κ,1), (Κ,2),...,(Κ,6),(Γ,1),(Γ,2),...,(Γ,6) } ,
όπου το σημείο (Κ, 4), λόγου χάρη, σημαίνει 'να έρθει Κ στη ρίψη του νομίσματος, και 4 στη ρίψη του ζαριού'.

Θα διατυπωσουμε τώρα μιά μάλλον προφανή πρόταση, η οποία είναι γνωστή ως η βασική αρχή της απαρίθμησης.

Πρόταση: Υποθέτουμε ότι ένα έργο (π.χ. μια εργασία, ένα πείραμα τύχης, κ.τ.λ.) μπορεί να ολοκληρωθεί σε n στάδια (ή βαθμίδες ή στοιχειώδη πειράματα τύχης). Υπάρχουν m_1 τρόποι να εκτελέσουμε το πρώτο στάδιο (ή m_1 επιλογές για το πρώτο στάδιο, ή m_1 δειγματοσημεία στον δειγματοχώρο του πρώτου σταδίου). Για καθέναν από αυτούς τους m_1 τρόπους υπάρχουν m_2 τρόποι να εκτελέσουμε το δεύτερο στάδιο. Για καθέναν από αυτούς τους m_2 τρόπους υπάρχουν m_3 τρόποι να εκτελέσουμε το τρίτο στάδιο, κ.ο.κ. Τότε ο ολικός αριθμός των διαφορετικών τρόπων, με τους οποίους μπορεί να ολοκληρωθεί το έργο αυτό, δίνεται από το γινόμενο $N \equiv m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$.

Ας εξειδικεύσουμε το παραπάνω σε πειράματα τύχης. Θεωρούμε n πειράματα τύχης (ή n στάδια ενός σύνθετου πειράματος τύχης), Π_1, Π_2,...,Π_n, και τους αντίστοιχους δειγματοχώρους, Ω_1, Ω_2,...,Ω_n, με πλήθος δειγματοσημείων $N(\Omega_j) = m_j,\ j = 1, 2, ..., n$. Ακολούθως θεωρούμε το σύνθετο πείραμα τύχης Π, που συνίσταται στην ταυτόχρονη εκτέλεση των n παραπάνω πειραμάτων τύχης. Πόσα είναι τα δυνατά αποτελέσματα του Π; (ή, ισοδύναμα, πόσες είναι οι δυνατές $n-$άδες που μπορούμε να κατασκευάσουμε παίρνοντας ένα στοιχείο από Ω_1, ένα στοιχείο από τον Ω_2, κ.τ.λ.).

Η απάντηση, η οποία δίνεται από την προηγούμενη πρόταση, είναι $N(\Omega) = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$, όπου Ω ο δειγματοχώρος του Π. Αυτό είναι και το πλήθος των $n-$άδων $x_1, x_2, ..., x_n$ που μπορούμε να σχηματίσουμε παίρνοντας ένα στοιχείο x_1 από το Ω_1, ένα στοιχείο x_2 από το Ω_2, κ.τ.λ.

Μια σημαντική ειδική περίπτωση του παραπάνω παραδείγματος παίρνουμε αν ο καθένας από τους δειγματοχώρους Ω_j είναι το ίδιο πάντα σύνολο, έστω S, το οποίο έχει s στοιχεία. Τότε υπάρχουν s^n το πλήθος $n-$άδες $x_1, x_2, ..., x_n$, για τις οποίες κάθε x_j είναι ένα από τα στοιχεία του S. Για παράδειγμα, αν ρίξουμε ένα ζάρι τρεις φορές, οι τριάδες (x_1, x_2, x_3) που μπορούν να σχηματιστούν είναι 6^3, όπου τα x_1, x_2, και x_3 είναι στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Οι τριάδες αυτές είναι τα σημεία του δειγματοχώρου Ω του πειράματος της ρίψης τριών ζαριών, όπου η τριάδα (2,4,5), π.χ. παριστάνει το ενδεχόμενο ¨να έρθει 2 το πρώτο ζάρι, 4 το δεύτερο, και 5 το τρίτο¨.

Διατάξεις

Η παραπάνω περίπτωση μπορεί να ιδωθεί και από άλλη οπτική γωνιά, όπως φαίνεται στο εξής παράδειγμα:

Παράδειγμα 3: Ένα δοχείο περιέχει s όμοιους βόλους, που φέρουν αριθμούς από το 1 ως το s. Επιλέγουμε τυχαία ένα βόλο από το δοχείο, σημειώνουμε τον αριθμό του και τον ξανατοποθετούμε στο δοχείο. Αν η διαδικασία αυτή επαναληφθεί n φορές, ποιος είναι ο δειγματοχώρος (σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων) του πειράματος;

Κάθε μία από τις επιλογές δίνει έναν αριθμό από το 1 ως το s. Το αποτέλεσμα των n επιλογών περιγράφεται από τη $n-$άδα $x_1, x_2, ..., x_n$, όπου το x_1 είναι ο αριθμός πάνω στον πρώτο βόλο που επιλέξαμε, το x_2 είναι ο αριθμός πάνω στον δεύτερο βόλο που επιλέξαμε, κ.τ.λ. Συνολικά υπάρχουν s^n δυνατές $n-$άδες, οι οποίες αποτελούν τα σημεία του δειγματοχώρου Ω του πειράματος.

Η παραπάνω διαδικασία λέγεται **δειγματοληψία με επανατοποθέτηση** από έναν πληθυσμό s διακεκριμένων αντικειμένων. Το αποτέλεσμα $x_1, x_2, ..., x_n$ λέγεται **διατεταγμένο δείγμα** μεγέθους n από έναν πληθυσμό μεγέθους s αντικειμένων με επανατοποθέτηση, ή **διάταξη** των s αντικειμένων ανά n. Εδώ βέβαια υποθέτουμε ότι όλα τα s^n δυνατά δείγματα έχουν την ίδια πιθανότητα. Για παράδειγμα, στη ρίψη των τριών ζαριών, όπου έχουμε $6^3 = 216$ δυνατά αποτελέσματα, καθένα από αυτά θεωρούμε ότι έχει πιθανότητα $1/216$ να βγεί.

Παράδειγμα 4: Έστω τα γράμματα a, b, c. Πόσα είναι τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη που θα μπορούσαμε να φτιάξουμε από τα γράμματα αυτά χρησιμοποιώντας δειγματοληψία με επανατοποθέτηση;

Σύμφωνα με τα παραπάνω, τα διατεταγμένα δεύγη (δείγματα μεγέθους 2) που μπορούμε να φτιάξουμε από πληθυσμό τριών αντικειμένων (δηλαδή οι διατάξεις των τριών στοιχείων ανά δύο) είναι $3^2 = 9$. Οι διατάξεις αυτές είναι οι $\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$.

Ας δούμε τώρα μια λίγο διαφορετική διαδικασία. Έστω S ένα σύνολο με s διακεκριμένα αντικείμενα, αριθμημένα από το 1 ως το s. Επιλέγουμε ένα από αυτά και σημειώνουμε τον αριθμό του, χωρίς να το ξανατοποθετήσουμε στο S. Αν επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία, θα έχουμε να επιλέξουμε κάποιο από τα υπόλοιπα $s-1$ αντικείμενα. Γενικά, αν εκτελέσουμε τη διαδικασία αυτή n φορές, επιλέγονται συνολικά n αντικείμενα από το S, όπου προφανώς $n \leq s$ (π.χ. επιλογή 6 χαρτιών από μια τράπουλα). Το αποτέλεσμα αυτού του σύνθετου τυχαίου πειράματος περιγράφεται και πάλι από μιά $n-$άδα $x_1, x_2, ..., x_n$, της οποίας όμως οι αριθμοί πρέπει να είναι διαφορετικοί, αφού δεν έχουμε διπλές εμφανίσεις στο δείγμα μας. Το πρώτο αντικείμενο που επιλέξαμε μπορεί να είναι οποιοδήποτε από τα s (άρα υπάρχουν s τρόποι για την επιλογή του πρώτου αντικειμένου), το δεύτερο οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα $s-1$, κ.ο.κ. Άρα υπάρχουν, σύμφωνα με την πρόταση της προηγούμενης παραγράφου,

$$(s)_n = s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1) = s!/(s-n)!$$

διαφορετικά δυνατά αποτελέσματα για το πείραμα αυτό.

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **δειγματοληψία n αντικειμένων χωρίς επανατοποθέτηση**, αν υποθέσουμε ότι όλα τα $(s)_n$ αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.

Παράδειγμα 5: Έστω τα γράμματα a, b, c. Πόσα είναι τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη που θα μπορούσαμε να φτιάξουμε από τα γράμματα αυτά χρησιμοποιώντας δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση;

Δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση σημαίνει ότι στο κάθε διατεταγμένο ζεύγος ένα γράμμα θα εμφανίζεται μόνο μία φορά. Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο αριθμός τέτοιων ζευγών είναι $(3)_2 = 3!/(3-2)! = 6$. (Τα διατεταγμένα αυτά ζεύγη είναι τα $\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$.)

Στην ειδική περίπτωση όπου $n = s$, δηλαδή ζητάμε τα διατεταγμένα δείγματα μεγέθους s που μπορούμε να φτιάξουμε από πληθυσμό s αντικειμένων χωρίς επανατοποθέτηση, ο αριθμός των δυνατών αποτελεσμάτων ειναι

$$(s)_s = s \cdot (s-1) \cdot (s-2) \cdots 2 \cdot 1 = s!.$$

Τα αποτελέσματα αυτά λέγονται **μεταθέσεις** των s αριθμών. Λέμε λοιπόν ότι το σύνολο των δυνατών μεταθέσεων s αριθμών είναι $s!$.

Π.χ., οι δυνατές μεταθέσεις των τριών γραμμάτων a, b, c του προηγούμενου παραδείγματος είναι 3!=6 (είναι οι $(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a)$).

Παράδειγμα 6: Το περίφημο πρόβλημα των γενεθλίων.
Πόσους ανθρώπους χρειάζεται να έχουμε σε ένα δωμάτιο ώστε η πιθανότητα δύο από αυτούς να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα να είναι ευνοική; (Δηλαδή να είναι μεγαλύτερη από 1/2;)

Για να το βρούμε, θα υπολογίσουμε την πιθανότητα P σε ένα δωμάτιο με n ανθρώπους να μην υπάρχουν δύο που έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία. Δεχόμαστε ότι ένα έτος έχει 365 ημέρες (αγνοούμε τα δίσεκτα έτη), και ότι όλες οι ημέρες ενός έτους έχουν την ίδια πιθανότητα να είναι ημέρες γενεθλίων. Αριθμούμε τους ανθρώπους από το 1 εως το n. Τα σημεία του δειγματοχώρου είναι $n-$άδες της μορφής $(x_1, x_2, ..., x_n)$, όπου τα x_i, $i = 1, 2, ..., n$ είναι μιά από τις 365 ημέρες του έτους. Όλες οι δυνατές $n-$άδες είναι 365^n, ενώ αυτές στις οποίες καμία ημερομηνία δεν εμφανίζεται πάνω από μιά φορά είναι

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1) = (365)_n.$$

Υποθέτοντας ότι κάθε μία από αυτές έχει την ίδια πιθανότητα να εμφανιστεί, έχουμε

$$P = \frac{(365)_n}{365^n}.$$

Τότε, το n που απαιτείται ώστε η πιθανότητα να έχουν δύο από τους n ανθρώπους γενέθλια την ίδια ημερομηνία να είναι ευνοική, βρίσκεται από τη σχέση

$$P < \frac{1}{2} \Rightarrow= (365)_n < 365^n.$$

Το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό. Ακόμα και για $n = 23$ έχουμε ότι $P < 1/2$, ενώ για $n = 56$ έχουμε $P = 0.01$. Δηλαδή, σε μιά ομάδα 56 ατόμων είναι σχεδόν βέβαιο ότι δύο από αυτούς έχουν γεννηθεί την ίδια ημερομηνία.

Είδαμε ότι αν έχουμε έναν πληθυσμό s αντικειμένων, μπορούμε να επιλέξουμε s^n δείγματα μεγέθους n με επανατοποθέτηση, και $(s)_n$ δείγματα χωρίς επανατοποθέτηση. Αν όμως το s είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το n ($s \gg n$), τότε η διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων τυχαίας δειγματοληψίας είναι πολύ μικρή.

Συνδυασμοί (μη διατεταγμένα δείγματα)

Υπάρχουν περιπτώσεις (πειράματα τύχης) στις οποίες η σειρά των στοιχείων ενός δείγματος δεν ενδιαφέρει. Π.χ., στο πόκερ. Ένα χέρι του πόκερ αποτελείται από 5 χαρτιά τα οποία επιλέγονται τυχαία από μια συνηθισμένη τράπουλα με 52 χαρτιά. Είδαμε ότι για ένα τέτοιο σύνολο υπάρχουν $(52)_5$ δυνατές διατάξεις (χωρίς επανατοποθέτηση) 5 χαρτιών. Αν όμως κάνουμε έτσι τον υπολογισμό, διαφορετικές διατάξεις των ίδιων 5 χαρτιών θεωρούνται διαφορετικά χέρια. Όμως στο πόκερ η πεντάδα 2,3,4,5,6 σπαθιά (με αυτή τη διάταξη) είναι ίδια με την πεντάδα 3,2,4,5,6 σπαθιά (με αυτή τη διάταξη). Για την ακρίβεια, όλες οι 5! μεταθέσεις των 5 χαρτιών είναι ισοδύναμες στο πόκερ. Έτσι, από τα $(52)_5$ δυνατά χέρια, τα 5! από αυτά είναι απλώς μεταθέσεις αυτών των ίδιων 5 χαρτιών. Άρα το συνολικό πλήθος των χεριών του πόκερ, αν αγνοήσουμε τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα χαρτιά, είναι $(52)_5/5!$.

Γενικά, από ένα σύνολο S που περιέχει s διακεκριμένα αντικείμενα, μπορούμε να επιλέξουμε $(s)_n$ διαφορετικά δείγματα μεγέθους n χωρίς επανατοποθέτηση. Κάθε διακεκριμένο υποσύνολο $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ από n στοιχεία του S μπορεί να διαταχθεί με $n!$ διαφορετικούς τρόπους. Αν αποφασίσουμε να αγνοήσουμε τη σειρά με την οποία τα αντικείμενα εμφανίζονται στο δείγμα, τότε αυτές οι $n!$ αναδιατάξεις ή μεταθέσεις πρέπει να θεωρηθούν ταυτόσημες. Υπάρχουν λοιπόν $(s)_n/n!$ διαφορετικά δείγματα μεγέθους n που μπορούμε να επιλέξουμε χωρίς επανατοποθέτηση και χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξη από ένα σύνολο S που περιέχει s διακεκριμένα αντικείμενα. Τα δείγματα αυτά λέγονται **συνδυασμοί** των s στοιχείων ανά n.

Η ποσότητα $(s)_n/n!$ γράφεται συνήθως με τη βοήθεια του συμβόλου του λεγόμενου διωνυμικού συντελεστή

$$\frac{(s)_n}{n!} = \binom{s}{n}$$

και μπορούμε να δούμε ότι ισούται με $s!/(s-n)!n!$

$$\binom{s}{n} = \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!} = \frac{[1\cdot 2\cdots(s-n)][(s-n+1)\cdots(s-1)s]}{[1\cdot 2\cdots(s-n)]n!} = \frac{s!}{(s-n)!n!}.$$

Η ορολογία "διωνυμικός συντελεστής" προέρχεται από μιά εφαρμογή της άλγεβρας, και συγκεκριμένα το ανάπτυγμα του διωνύμου,

$$(x+y)^s = \sum_{n=0}^{s} \binom{s}{n} x^{s-n}y^n = x^s + \binom{s}{1} x^{s-1}y + \binom{s}{2} x^{s-2}y^2 + \cdots + \binom{s}{s} y^s,$$

όπου το πλήθος των συνδυασμών $\binom{s}{n}$ εμφανίζεται στους συντελεστές του αναπτύγματος. Οι συντελεστές αυτοί έχουν πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες, όπως για παράδειγμα

1)

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{j-1},$$

2)

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1},$$

3)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n,$$

κ. ά.,

οι οποίες αποδεικνύονται πολύ εύκολα. Σημειώστε ότι το σύμβολο $\binom{a}{n}$ είναι καλά ορισμένο για κάθε πραγματικό αριθμό a και μη αρνητικό n, και ότι τα $0!$ και $(a)_0$ είναι εξ ορισμού ίσα με 1.

Παράδειγμα 7: Πόσα είναι τα δυνατά μη διατεταγμένα ζεύγη που μπορούμε να φτιάξουμε από τα γράμματα a, b, c;

Τα ζεύγη αυτά είναι οι δυνατοί συνδυασμοί των τριών αριθμών ανά δύο, άρα $\binom{3}{2}$ $= 3!/2!1! = 3$ (είναι τα $(a, b), (a, c), (b, c)$).

Παράδειγμα 8: Σύνθεση επιτροπής.
Το τμήμα Υλικών έχει 3 καθηγητές πρώτης βαθμίδας, 6 αναπληρωτές καθηγητές, και 8 επίκουρους καθηγητές. Μια τριμελής επιτροπή εκλέγεται τυχαία από τα παραπάνω μέλη ΔΕΠ. Βρείτε την πιθανότητα όλα τα μέλη της επιτροπής να είναι επίκουροι καθηγητές.

Αν ορίσουμε ως A το γεγονός ‘και τα τρία μέλη της επιτροπής είναι επίκουροι’, τότε η πιθανότητα του A δίνεται από το πλήθος των στοιχείων του A προς το συνολικό πλήθος των δειγματοσημείων του πειράματος (που το πλήθος των δυνατών μη διατεταγμένων τριάδων που μπορούμε να φτιάξουμε από τα υπάρχοντα μέλη ΔΕΠ). Συνολικά, το τμήμα έχει 17 μέλη ΔΕΠ. Η επιτροπή των τριών μπορεί να εκλεγεί από τους 17 με $\binom{17}{3}$ τρόπους. Υπάρχουν 8 επίκουροι καθηγητές, και οι 3 της επιτροπής μπορούν να επιλεγούν από αυτούς με $\binom{8}{3}$ τρόπους. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$P = \binom{8}{3} / \binom{17}{3} \simeq 0.082.$$

Σε πολλές περιπτώσεις οδηγούμαστε στον υπολογισμό παραγοντικών. Όταν όμως ο αριθμός, έστω n, είναι ακόμα και μέτριου μεγέθους (για παράδειγμα $n = 15$), τότε το $n!$ είναι πάρα πολύ μεγάλος αριθμός. Στις περιπτώσεις αυτές, μια προσεγγιστική τιμή του $n!$ δίνεται από τον τύπο του Stirling, σύμφωνα με τον οποίο

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

όπου e είναι η βάση των νεπέρειων λογαρίθμων (σταθερά του Euler), $e = 2.71828...$. Μια τελευταία παρατήρηση που αφορά τον συμβολισμό: Οι ποσότητες $(s)_n$ και $(s)_n/n!$ συμβολίζονται επίσης με ${}_sP_n$ (P από το Permutations (μεταθέσεις)) και ${}_sC_n$ (C από το Combinations (συνδυασμοί)), αντίστοιχα

Ασκήσεις

1. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθήσουν στη σειρά 10 άνθρωποι σε 4 καρέκλες;

2. Διαλέγουμε τυχαία 5 αριθμούς από το σύνολο $\{1, 2, 3, ..., 15\}$, με επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα:

   α) ο μεγαλύτερος να είναι 9;

   β) ο μικρότερος να είναι 3 και ο μεσαίος (σε μέγεθος) να είναι 8;

   γ) οι δύο να είναι άρτιοι και οι τρείς περιττοί;

3. Ένα δοχείο περιέχει 8 αριθμημένους βόλους από το 1 ως το 8. Επιλέγουμε 4 βόλους στην τύχη, χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα ο μικρότερος αριθμός να είναι το 3·

4. Δέκα χαρτιά επιλέγονται στην τύχη από μιά τράπουλα 52 χαρτιών. Σε πόσες περιπτώσεις περιλαμβάνεται τουλάχιστον ένας άσσος· Σε πόσες περιπτώσεις περιλαμβάνεται ακριβώς ένας άσσος·

5. Τρεις γυναίκες και πέντε άνδρες σχηματίζουν μιά τετραμελή ομάδα. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να συμβεί αυτό, έτσι ώστε να υπάρχει τουλάχιστον μία γυναίκα στην ομάδα·

6. Πόσες διαφορετικές επιτροπές με 3 άνδρες και 4 γυναίκες μπορούν να σχηματιστούν από 8 άνδρες και 6 γυναίκες·

7. Κατά πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν 10 άνθρωποι σε δύο ομάδες από 7 και 3 ανθρώπους·

8. Υπολογίστε την πιθανότητα να εμφανιστούν 3 εξάρια σε 5 ρίψεις ενός ζαριού.

9. Παίρνουμε τυχαία 3 αριθμούς χωρίς επανατοποθέτηση από ένα δοχείο που περιέχει τους αριθμούς 1,2,...,20. Να βρεθεί η πιθανότητα των παρακάτω γεγονότων:

   α) το άθροισμα τους να είναι 11

   β) το γινόμενό τους είναι άρτιο

   γ) ο μικρότερος είναι 4 ή 5.