

Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών

Πρόχειρες σημειώσεις στις Πιθανότητες

Νίκος Λαζαρίδης

Για το μάθημα 'Εφαρμοσμένα Μαθηματικά' (ΤΕΤΥ 116)

Αναθεώρηση, συμπληρώσεις: Μαρία Καφεσάκη

Κεφάλαιο 1: Η έννοια της πιθανότητας

Περιεχόμενα

Εισαγωγή – Πειράματα τύχης και δειγματοχώροι – Σύνθετα, στοιχειώδη και ασυμβίβαστα γεγονότα
– Ορισμός της πιθανότητας (κλασσικός, στατιστικός και αξιωματικός) – Το προσθετικό θεώρημα
– Δεσμευμένη πιθανότητα – Θεώρημα ολικής πιθανότητας – Ανεξαρτησία ενδεχομένων – Ιστορικά στοιχεία – Ασκήσεις – Βιβλιογραφία

Εισαγωγή

Η Θεωρία Πιθανοτήτων (ΘΠ) είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τα τυχαία φαινόμενα. Η μελέτη της κέρδισε πολλούς μαθηματικούς, τόσο για το θεωρητικό της ενδιαφέρον όσο και για τις επιτυχημένες εφαρμογές της σε πολλές περιοχές των φυσικών, βιολογικών και κοινωνικών επιστημών, στη μηχανική και στον επιχειρηματικό κόσμο.

Πειράματα τύχης και Δειγματοχώροι

Πολλά φαινόμενα έχουν την ιδιότητα η επανειλημμένη παρατήρησή τους κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες να οδηγεί πάντα στο ίδιο αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, αν αφήσουμε μια μπάλα που ήταν αρχικά ακίνητη να πέσει από ύψος d μέτρων μέσα σε έναν κύλινδρο χωρίς αέρα, θα φτάνει στο έδαφος πάντα μετά από $t = \sqrt{2d/g}$ δευτερόλεπτα, όπου το g είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας σε m/s^2 . Αυτά ανήκουν στα λεγόμενα **αιτιοκρατικά φαινόμενα**. Υπάρχουν όμως άλλα φαινόμενα, των οποίων η επανειλημμένη παρατήρηση κάτω από τις ίδιες συνθήκες δεν οδηγεί πάντα στο ίδιο αποτέλεσμα. Λόγου χάρη, αν ρίξουμε ένα νόμισμα 1000 φορές, οι εμφανίσεις γραμμάτων (Γ) ή κεφαλής (Κ) εναλλάσσονται με έναν φαινομενικά ακανόνιστο και απρόβλεπτο τρόπο. Τέτοιου είδους φαινόμενα τα θεωρούμε ως τυχαία, και ένα πείραμα όπως αυτό που μόλις περιγράφηκε το ονομάζουμε **πείραμα τύχης (ΠΤ)**. Τα πειράματα τύχης (ΠΤ), ή αλλιώς τυχαία πειράματα, είναι λοιπόν εκείνα για τα οποία η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελούνται απλά καθορίζει ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων για το κάθε πείραμα. Ένα πιο απλό παράδειγμα είναι η ρίψη ενός νομίσματος. Αν και δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, γνωρίζουμε ότι θα είναι Κ ή Γ, θα ανήκει δηλαδή στο σύνολο {Κ, Γ}.

Παρόλο που σε πρώτη ματιά φαίνεται αδύνατο να διατυπώσουμε αξιολογικά συμπεράσματα για τυχαία φαινόμενα, η εμπειρία έχει δείξει ότι πολλά από τα φαινόμενα αυτά παρουσιάζουν μια στατιστική κανονικότητα που αξίζει να μελετηθεί. Π.χ. αν ρίξουμε ένα νόμισμα μία φορά δεν μπορούμε να κάνουμε κάποια μη τετριμμένη πρόβλεψη για το αποτέλεσμα. Αν ρίξουμε όμως το ίδιο νόμισμα πάρα πολλές φορές θα δούμε ότι η συχνότητα εμφάνισης Κ και Γ είναι περίπου η ίδια και άρα το Κ εμφανίζεται περίπου στο 50% των ρίψεων.

Άλλα απλά παραδείγματα πειραμάτων τύχης είναι

- α) η ρίψη ενός ζαριού,
- β) το τράβηγμα ενός χαρτιού από μιά συνηθισμένη τράπουλα με 52 χαρτιά,
- γ) η καταγραφή της διάρκειας ζωής μιάς μπαταρίας ή ενός ηλεκτρικού λαμπτήρα,

- δ) η καταγραφή των υψών των ατόμων ενός δοθέντος πληθυσμού,
- ε) η επιλογή ενός βόλου από ένα δοχείο το οποίο περιέχει s βόλους, οι οποίοι φέρουν τους αριθμούς $1, 2, \dots, s$, αλλά είναι όμοιοι κατά τα άλλα,
- στ) ο χρόνος διάσπασης ισotόπου κάποιου ραδιενεργού στοιχείου, κ.ά.

Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης λέγεται **δειγματοχώρος (ΔX)**, και συμβολίζεται με Ω , και τα στοιχεία του λέγονται **δειγματοσημεία** ή απλά σημεία. Έτσι, το κάθε δυνατό αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι ένα σημείο του Ω .

Υπάρχουν ωστόσο πολλοί τρόποι περιγραφής των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης. Έτσι, σε δοθέν ΠΤ αντιστοιχούν περισσότεροι του ενός δειγματοχώροι.

Παράδειγμα 1: Στο ρίξιμο του ζαριού, ένας ΔX είναι ο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ένας άλλος είναι ο $\Omega' = \{\text{άρτιος, περιττός}\}$.

Στο Παράδειγμα 1, καθώς και στο παράδειγμα της ρίψης ενός νομίσματος (όπου ο ΔX είναι $\Omega = \{K, \Gamma\}$), οι δειγματοχώροι έχουν πεπερασμένο πλήθος σημείων, και λέγονται **πεπερασμένοι δειγματοχώροι**. Εάν τα σημεία του δειγματοχώρου ενός τυχαίου πειράματος είναι άπειρα, αλλά αριθμήσιμα, δηλ. μπορούν να αντιστοιχισθούν με τους φυσικούς αριθμούς $1, 2, 3, 4, \dots$ έναν προς έναν, τότε αυτός λέγεται **άπειρος αριθμήσιμος ΔX** . Εάν τα άπειρα σημεία του δειγματοχώρου δεν μπορούν να αντιστοιχισθούν με τους φυσικούς αριθμούς $1, 2, 3, 4, \dots$ έναν προς έναν, τότε ο ΔX λέγεται **άπειρος μη αριθμήσιμος**.

Ένας πεπερασμένος ή άπειρος αριθμήσιμος ΔX λέγεται **διακριτός ΔX** , ενώ ένας άπειρος μη αριθμήσιμος ΔX λέγεται **συνεχής ΔX** .

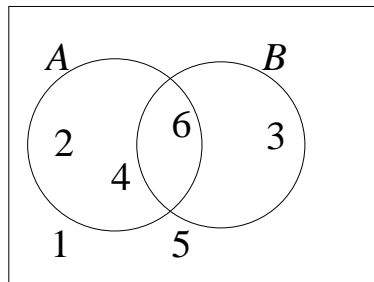
Παράδειγμα 2: Ο χρόνος που χρειάζεται ένα ισotόπο κάποιου ραδιενεργού στοιχείου για να διασπαστεί μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός πραγματικός αριθμός. Στην περίπτωση αυτή, λοιπόν, παίρνουμε ως Ω το διάστημα $[0, \infty)$ στην πραγματική ευθεία.

Σύνθετα, στοιχειώδη και ασυμβίβαστα γεγονότα

Πολλές φορές, σε ένα πείραμα τύχης συμβαίνει να μην ενδιαφέρει αυτό καθαυτό το αποτέλεσμα, αλλά το αν το αποτέλεσμα αυτό ανήκει σε ένα δεδομένο υποσύνολο του Ω , έστω A (π.χ. αν το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού είναι άρτιος ή περιττός αριθμός). Ένα τέτοιο υποσύνολο A του Ω , δηλαδή ένα σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης, λέγεται **ενδεχόμενο ή γεγονός**. Εάν το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι στοιχείο του A , λέμε ότι συνέβη ή πραγματοποιήθηκε το γεγονός A .

Παράδειγμα 3: Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά. Ο ΔX του πειράματος αυτού είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Το γεγονός $A = \{2, 4, 6\}$ αντιστοιχεί στην πρόταση 'το αποτέλεσμα είναι άρτιος'. Η πρόταση 'το αποτέλεσμα διαιρείται ακριβώς με το 3' αντιστοιχεί στο γεγονός $B = \{3, 6\}$.

Μια συνήθης γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης είναι ένα διάγραμμα γνωστό ως **διάγραμμα Venn**. Ένα διάγραμμα Venn (βλ. Σχ. 1) συνήθως συνίσταται από ένα ορθογώνιο, το οποίο αναπαριστά τον ΔX του πειράματος, στο



Σχήμα 1: Διάγραμμα Venn για το πείραμα τύχης του Παραδείγματος 3.

οποίο εμπεριέχεται μία ή περισσότερες κλειστές καμπύλες. Το εσωτερικό κάθε καμπύλης αναπαριστά ένα γεγονός.

Ένα γεγονός το οποίο περιλαμβάνει ένα μόνο σημείο του Ω λέγεται **απλό ή στοιχειώδες γεγονός**. Το ίδιο το Ω είναι ένα γεγονός που λέγεται **βέβαιο γεγονός**, επειδή οπωσδήποτε ένα από τα στοιχεία του πραγματοποιείται. Το κενό σύνολο \emptyset είναι επίσης ένα γεγονός που λέγεται αδύνατο, επειδή κανένα στοιχείο του δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Δύο γεγονότα τα οποία αποκλείονται αμοιβαία, αν δηλαδή συμβεί το ένα αποκλείεται να συμβεί και το άλλο, λέγονται **ασυμβίβαστα γεγονότα**.

Επειδή τα γεγονότα είναι σύνολα, συμπεράσματα που αναφέρονται σε γεγονότα μπορούν να διατυπωθούν στη γλώσσα της θεωρίας συνόλων και αντίστροφα. Παρακάτω θα υπενθυμίσουμε κάποιες έννοιες, ορισμούς και ιδιότητες από τη Θεωρία Συνόλων που χρησιμοποιούνται συχνά στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

Στοιχεία από τη Θεωρία Συνόλων

Ένα **σύνολο** A είναι μια (καλώς) ορισμένη συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων. Έστω a ένα από τα αντικείμενα αυτά. Το γεγονός ότι το a είναι μέλος του A ή στοιχείο του A ή ότι ανήκει στο A συμβολίζεται με $a \in A$. Η άρνηση του γεγονότος αυτού συμβολίζεται με $a \notin A$. Λέμε ότι το σύνολο B είναι **υποσύνολο** του A ή ότι ανήκει στο A , και γράφουμε $B \subseteq A$, αν για κάθε $a \in B$ ισχύει $a \in A$. Λέμε ότι το B είναι γνήσιο υποσύνολο του A , και γράφουμε $B \subset A$, αν $B \subseteq A$ και υπάρχει a τέτοιο ώστε $a \notin B$. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{a, i, u\}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\{a, e, i, o, u\}$.

Σε ό,τι ακολουθεί θα θεωρούμε ένα βασικό σύνολο Ω το οποίο θα είναι, εν γένει, διαφορετικό σε κάθε πρόβλημα που συναντάμε (θα είναι ο δειγματοχώρος του συγκεκριμένου προβλήματος). Όλα τα υπόλοιπα σύνολα θα είναι υποσύνολα του Ω . Δύο υποσύνολα του Ω , A και B , λέγονται ίσα, και γράφουμε $A = B$, αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Οι σημαντικότερες πράξεις συνόλων είναι οι παρακάτω:

1. **Ένωση**. Το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν ή στο A ή στο B ή και στα δύο λέγεται ένωση των A και B και συμβολίζεται με $A \cup B$.
2. **Τομή**. Το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν και στο A και στο B λέγεται τομή των A και B και συμβολίζεται με $A \cap B$.
Δύο σύνολα A και B για τα οποία $A \cap B = \emptyset$ λέγονται **ξένα σύνολα**.
3. **Διαφορά**. Το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B λέγεται διαφορά των A και B και συμβολίζεται με $A - B$.

4. **Συμπλήρωμα.** Εάν $B \subset A$, τότε το $A - B$ λέγεται συμπλήρωμα του B ως προς το A , και συμβολίζεται με B_A^c . Εάν $A = \Omega$, το $\Omega - B$ λέγεται απλά συμπλήρωμα του B και συμβολίζεται με B^c .

Παραθέτουμε τώρα μερικές βασικές ιδιότητες των πράξεων μεταξύ συνόλων.

1. $\Omega^c = \emptyset$, $\emptyset^c = \Omega$, $(A^c)^c = A$.
2. $\Omega \cup A = \Omega$, $\emptyset \cup A = A$, $A \cup A^c = \Omega$, $A \cup A = A$.
3. $\Omega \cap A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$, $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cap A = A$.

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι προφανείς, όπως επίσης είναι και η ιδιότητα $\emptyset \subseteq A$ για κάθε υποσύνολο A του Ω . Επίσης, έχουμε

4. τους αντιμεταθετικούς νόμους,

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= A_2 \cup A_1 \\ A_1 \cap A_2 &= A_2 \cap A_1, \end{aligned}$$

5. τους προσεταιριστικούς νόμους,

$$\begin{aligned} A_1 \cup (A_2 \cap A_3) &= (A_1 \cup A_2) \cap A_3 \\ A_1 \cap (A_2 \cup A_3) &= (A_1 \cap A_2) \cup A_3, \end{aligned}$$

6. και τους επιμεριστικούς νόμους,

$$\begin{aligned} A \cap \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) &= \bigcup_{j=1}^n (A \cap A_j) \\ A \cup \left(\bigcap_{j=1}^n A_j \right) &= \bigcap_{j=1}^n (A \cup A_j), \end{aligned}$$

όπου $\bigcup_{j=1}^n A_j = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, και $\bigcap_{j=1}^n A_j = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

Έτσι, εάν A και B είναι δύο γεγονότα, τότε

$A \cup B$ είναι το γεγονός (που αντιστοιχεί στην πρόταση) 'ή A ή B ή και τα δύο',

$A \cap B$ είναι το γεγονός 'και A και B ',

A^c είναι το γεγονός 'όχι A ', και

$A - B$ είναι το γεγονός ' A αλλά όχι και B '.

Αν τα σύνολα που αντιστοιχούν στα γεγονότα A και B είναι ξένα, τότε τα γεγονότα αυτά είναι ασυμβίβαστα.

Μέχρι στιγμής περιγράψαμε πειράματα τύχης και συζητήσαμε τα πιθανά αποτελέσματα τους ή γεγονότα. Δεν αναφέραμε τίποτα για τη σχετική συχνότητα ή πιθανότητα εμφάνισης κάθε αποτελέσματος, πράγμα το οποίο θα κάνουμε στο επόμενο εδάφιο. Στο επόμενο εδάφιο, σε κάθε γεγονός A θα αντιστοιχίσουμε μια αριθμητική ποσότητα, $P(A)$, η οποία θα κληθεί πιθανότητα του A , δηλ. πιθανότητα να συμβεί το γεγονός A .

Ορισμός της Πιθανότητας

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό της πιθανότητας, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα περισσότερα από τα πειράματα τύχης δείχνουν κάποια κανονικότητα. Με αυτό εννοούμε ότι η σχετική συχνότητα ενός γεγονότος είναι προσεγγιστικά η ίδια σε κάθε περίπτωση που πραγματοποιείται ένα σύνολο δοκιμών, δηλαδή ένα σύνολο επαναλήψεων ενός δεδομένου πειράματος τύχης. Η κανονικότητα αυτή είναι ο λόγος που γίνεται δυνατός ο ορισμός της πιθανότητας.

Υπάρχουν δύο αξιοσημείωτες μέθοδοι για τον ορισμό (ουσιαστικά την εκτίμηση) της πιθανότητας ενός γεγονότος. Θα τους παρουσιάσουμε ξεκινώντας με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 4: Ρίψη ενός ζαριού.

Στο πείραμα τύχης της ρίψης ενός ζαριού, ο ΔX είναι το σύνολο των αριθμών $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Αν ορίσουμε με A το γεγονός 'το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι αριθμός άρτιος', τότε το γεγονός A θα περιλαμβάνει τα σημεία $\{2, 4, 6\}$.

Εστω ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα ρίψης ζαριού n φορές, και συμβολίζουμε με $N_n(1)$ το πλήθος εκείνων από τις n δοκιμές στις οποίες το αποτέλεσμα της ρίψης ήταν 1, με $N_n(2)$ το πλήθος εκείνων όπου το αποτέλεσμα ήταν 2, κ.ο.κ.

Το ποσοστό των εμφανίσεων των αποτελεσμάτων 1, 2, ..., 6, είναι λοιπόν

$$\frac{N_n(1)}{n}, \frac{N_n(2)}{n}, \dots, \frac{N_n(6)}{n}.$$

Καθώς το πλήθος των δοκιμών αυξάνεται, θα περιμέναμε τα παραπάνω πηλίκια, τα οποία λέγονται και σχετικές συχνότητες των 1, 2, ..., 6, αντίστοιχα, να σταθεροποιούνται σε κάποιους αριθμούς p_1, p_2, \dots, p_6 , οι οποίοι σύμφωνα με τη διαίσθησή μας θα πρέπει να είναι όλοι ίσοι με $1/6$ στην περίπτωση αυτή.

Δεδομένου ότι το γεγονός A περιλαμβάνει τα σημεία $\{2, 4, 6\}$, μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό ότι η σχετική συχνότητα του γεγονότος A θα είναι το άθροισμα

$$\frac{N_n(2)}{n} + \frac{N_n(4)}{n} + \frac{N_n(6)}{n} = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{3}{6}.$$

Ο απλούστερος ορισμός της πιθανότητας $P(A)$ είναι ο γνωστός ως **κλαστικός ορισμός**, και έχει τις ρίζες του στα τυχερά παιχνίδια. Σύμφωνα με αυτόν, η πιθανότητα ενός γεγονότος A ορίζεται ως

$$P(A) = (\text{πλήθος σημείων του γεγονότος } A) / (\text{πλήθος σημείων του } \Omega).$$

Περιφραστικά, η πιθανότητα ενός γεγονότος A είναι το πηλίκιο των διαφόρων τρόπων με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί το A (των "ευνοϊκών" περιπτώσεων για το A) δια του πλήθους των δειγματοσημείων του Ω .

Για να ισχύει όμως ο κλαστικός ορισμός, θα πρέπει να υπάρχουν οι εξής προϋποθέσεις:

- (1) το πείραμα τύχης που μελετάμε να έχει πεπερασμένο δειγματοχώρο.
- (2) όλα τα απλά (στοιχειώδη) γεγονότα να έχουν την ίδια ακριβώς δυνατότητα (ευκαιρία) να συμβούν.

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας παρουσιάζει αδυναμίες. Κατ' αρχήν χρησιμοποιεί εκφράσεις όπως 'ίδιες δυνατότητες' ή 'ίδιες ευκαιρίες', οι οποίες δεν μπορούν να ορισθούν επαρκώς από μαθηματικής πλευράς, αλλά επαφίενται στη διαίσθηση. Επίσης, συχνά εμφανίζονται στην πράξη δειγματοχώροι Ω με άπειρο πλήθος στοιχείων, οπότε η προυπόθεση (1) δεν συντρέχει.

Παράδειγμα 5: Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει κεφάλι (Κ) σε μία ρίψη νομίσματος; Υπάρχουν δύο εξίσου πιθανά αποτελέσματα, Κ και Γ, και επειδή το ευνοϊκό αποτέλεσμα είναι ένα από αυτά (Κ), συμπεραίνουμε ότι η πιθανότητα να έρθει Κ σε μία ρίψη είναι $1/2$.

Παράδειγμα 6: Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει κεφάλι (Κ) στην πρώτη ρίψη και γράμματα (Γ) στη δεύτερη;

Εδώ $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$, ενώ το σύνολο που αντιστοιχεί στο γεγονός που περιγράφηκε είναι το $\{K\Gamma\}$, οπότε $P(K\Gamma) = 1/4$.

Παράδειγμα 7: Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά. Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει 4; Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει άρτιος;

Ο ΔΧ του προβλήματος είναι ο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Έστω A και B τα ενδεχόμενα 'να έρθει 4' και 'να έρθει άρτιος', αντίστοιχα. Τότε $A = \{4\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$, οπότε $P(A) = 1/6$ και $P(B) = 3/6 = 1/2$.

Ένας άλλος ορισμός της πιθανότητας ο οποίος δεν θέτει περιορισμούς στον ΔΧ Ω είναι εκείνος που βασίζεται στην έννοια της σχετικής συχνότητας, και ο οποίος βασίζεται σε πολλές επαναλήψεις ενός δεδομένου πειράματος τύχης. Θεωρήστε έναν οποιονδήποτε δειγματοχώρο Ω ο οποίος αναφέρεται σε ένα συγκεκριμένο πείραμα τύχης, και έστω A ένα γεγονός. Το εν λόγω πείραμα τύχης επαναλαμβάνεται n φορές, και έστω $N_n(A)$ ο αριθμός των φορών που πραγματοποιείται το γεγονός A . Ο αριθμός $N_n(A)$ λέγεται συχνότητα του A , και το πηλίκο $N_n(A)/n$ σχετική συχνότητα του A .

Θεωρούμε την ακολουθία των σχετικών συχνοτήτων του A , $\{N_n(A)/n\}$, με $n \geq 1$, και υποθέτουμε ότι καθώς $n \rightarrow \infty$ υπάρχει το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} (N_n(A)/n)$. Το όριο αυτό ορίζεται ως η πιθανότητα του A , $P(A)$. Ο ορισμός αυτός είναι γνωστός ως **στατιστικός ορισμός**, και ικανοποιεί την αντίληψη που διαισθητικά έχει κανείς για την έννοια της πιθανότητας.

Αδυναμίες παρουσιάζει και αυτός ο ορισμός, που σχετίζονται με την απαίτηση του πολύ μεγάλου n . Αποφεύγουμε τις αδυναμίες των δύο παραπάνω ορισμών με τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας (Kolmogorov), ο οποίος είναι προϊόν μακροχρόνιων και διαδοχικών βελτιώσεων προγενέστερων του ορισμών. Ενσωματώνει και επεκτείνει τις ιδιότητες του κλασικού και του στατιστικού ορισμού, και προσφέρεται για τη σε βάθος μαθηματική μελέτη της Θεωρίας Πιθανοτήτων. Αν και δεν θα αναλύσουμε εδώ αυτόν τον ορισμό, αναφέρουμε επιγραμματικά τις ιδιότητες/αξιώματα μέσω των οποίων ορίζεται η πιθανότητα:

(i) $P(\Omega) = 1$.

(ii) $P(A) \geq 0$.

(iii) Αν $A_j, j = 1, 2, 3, \dots$, είναι ξένα ανά δύο σύνολα, τότε

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j).$$

Παράδειγμα 8: Ρίχνουμε ένα ζάρι μία φορά. Θεωρήστε τα γεγονότα $A = \{1, 2\}$, $B = \{4, 5, 6\}$ και $\Gamma = \{3, 4\}$, τα οποία είναι υποσύνολα του δειγματοχώρου $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ του προβλήματος. Ποια η πιθανότητα των γεγονότων $A \cup B$ και $A \cup \Gamma$;

Τα A και B είναι ξένα, καθώς και τα A και Γ . Από το αξίωμα (iii) του τελευταίου ορισμού της πιθανότητας, έχουμε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 2/6 + 3/6 = 5/6$, και $P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) = 2/6 + 2/6 = 2/3$.

Παράδειγμα 9: Βγάζουμε στην τύχη μία σφαίρα από ένα κουτί που περιέχει 6 κόκκινες, 4 άσπρες και 5 μπλέ σφαίρες, κατά τα άλλα όμοιες. Ποια είναι η πιθανότητα να βγει σφαίρα α) κόκκινη, β) άσπρη, γ) μπλε, δ) όχι κόκκινη, ε) κόκκινη ή άσπρη;

α) Συμβολίζουμε με K , A , και M τα γεγονότα να βγει κόκκινη, άσπρη, και μπλέ σφαίρα, αντίστοιχα. Ο ΔΧ του πειράματος περιέχει 15 σημεία. Εάν το καθένα έχει πιθανότητα $1/15$, έχουμε ότι $P(K) = 6/15$, επειδή το γεγονός K περιέχει 6 σημεία του ΔΧ.

β) Με το ίδιο σκεπτικό, $P(A) = 4/15$, και

γ) $P(M) = 5/15$.

δ) Η πιθανότητα να μη βγει κόκκινη σφαίρα είναι ίση με την πιθανότητα να βγει άσπρη ή μπλε. Έτσι, $P(\text{όχι } K) = P(A \text{ ή } M) = P(A \cup M)$. Επειδή όμως τα γεγονότα A και M είναι ασυμβίβαστα, θα έχουμε ότι $P(A \cup M) = P(A) + P(M) = 4/15 + 5/15 = 3/5$.

ε) Το γεγονός ' K ή A ' παριστάνεται από την ένωση των γεγονότων K και A , $K \cup A$. Αλλά αφού τα K και A είναι ασυμβίβαστα, τότε $P(K \cup A) = P(K) + P(A) = 6/15 + 4/15 = 2/3$.

Άλλες Ιδιότητες της Πιθανότητας

Θα αποδείξουμε τώρα κάποιες επιπλέον ιδιότητες της συνάρτησης πιθανότητας P , οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό της, και χρησιμοποιούνται ευρέως στη Θεωρία Πιθανοτήτων.

1. Το αδύνατο γεγονός έχει πιθανότητα μηδέν, δηλαδή $P(\emptyset) = 0$.

Απόδειξη: Αφού $\Omega = \Omega + \emptyset$, τότε $P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$. Από τον ορισμό της P έχουμε όμως ότι $P(\Omega) = 1$ και $P(\emptyset) \geq 0$. Οπότε $P(\emptyset) = 0$.

2. Το συμπλήρωμα A^c ενός γεγονότος A έχει πιθανότητα $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Απόδειξη: Από την ιδιότητα $A \cup A^c = \Omega$ και την ιδιότητα iii έχουμε $P(A \cup A^c) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(A^c) = 1 \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$.

3. Μια οποιαδήποτε συνάρτηση πιθανότητας P είναι μη φθίνουσα, δηλαδή $A_1 \subseteq A_2$ συνεπάγεται $P(A_1) \leq P(A_2)$.

Απόδειξη: Προφανώς $A_2 = A_1 + (A_2 - A_1)$. Από την ιδιότητα iii της P έχουμε τότε $P(A_2) = P(A_1 + (A_2 - A_1)) = P(A_1) + P(A_2 - A_1)$. Επειδή $P(A_2 - A_1) \geq 0$, προκύπτει ότι $P(A_1) \leq P(A_2)$.

4. Για οποιοδήποτε γεγονός ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$.

Απόδειξη: Πράγματι, αφού $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$, από την ιδιότητα 3 θα έχουμε $P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$. Αλλά $P(\emptyset) = 0$ και $P(\Omega) = 1$, οπότε παίρνουμε $0 \leq P(A) \leq 1$.

Παράδειγμα 10: Ρίχνουμε δύο ζάρια. Να βρεθεί η πιθανότητα να βγει το άθροισμα της πρώτης και της δεύτερης ρίψης διάφορο από 7 και 11.

Ο δειγματοχώρος του προβλήματος είναι

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \dots & \dots & (1, 6) \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \dots & \dots & (2, 6) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (6, 1) & (6, 2) & \dots & \dots & \dots & (6, 6) \end{array} \right\}$$

όπου λόγω χάρη το σημείο (5,2) παριστάνει το γεγονός "5 το πρώτο ζάρι και 2 το δεύτερο".

Αν A είναι το γεγονός 'άθροισμα 7 ή 11', τότε υπάρχουν οκτώ ευνοικά αποτελέσματα για το γεγονός αυτό. Αν δεχτούμε ότι τα απλά αυτά γεγονότα έχουν ίσες πιθανότητες, τότε καθένα από αυτά έχει πιθανότητα $1/36$. Τότε, αφού το A περιέχει 8 τέτοια απλά γεγονότα, $P(A) = 8/36 = 2/9$. Άρα η πιθανότητα να μην έχουμε άθροισμα 7 ή 11 είναι $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 2/9 = 7/9$.

Το Προσθετικό Θεώρημα

Το αξίωμα (iii) του ορισμού της πιθανότητας μας λέει ότι αν τα σύνολα A και B είναι ξένα, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Αν τα A και B δεν είναι αναγκαστικά ξένα, τότε ισχύει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (1)$$

Η εξ. (1) μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητή, επικαλούμενοι τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας και παρατηρώντας ότι το σύνολο $A \cup B$ έχει πλήθος στοιχείων το άθροισμα των στοιχείων των A και B , μείον τα στοιχεία της τομής $A \cap B$, τα οποία στο παραπάνω άθροισμα καταμετρήθηκαν δύο φορές.

Η γενίκευσή της (1) για οποιοδήποτε πεπερασμένο αριθμό συνόλων (υποσυνόλων του Ω) είναι το λεγόμενο προσθετικό θεώρημα:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) &= \sum_{j=1}^n P(A_j) + (-1)^{2+1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} P(A_{j_1} \cap A_{j_2}) \\ &\quad + (-1)^{3+1} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n} P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}) \\ &\quad + \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος γίνεται επαγωγικά.

Για $n = 3$ το προσθετικό θεώρημα δίνει

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned} \quad (3)$$

Δεσμευμένη Πιθανότητα

Θεωρούμε δύο γεγονότα A και B με $P(A) > 0$, και θέτουμε το εξής ερώτημα: Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί το B , δεδομένου ότι συνέβη (πραγματοποιήθηκε) το A . Για να απαντήσουμε, πρέπει πρώτα να δώσουμε τον ακριβή ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου με δεδομένο κάποιο άλλο.

Ορισμός: Έστω A και B δύο ενδεχόμενα τέτοια ώστε $P(A) > 0$. Τότε η **δεσμευμένη πιθανότητα** του B με δεδομένο το A , η οποία συμβολίζεται με $P(B|A)$, ορίζεται από τη σχέση

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}. \quad (4)$$

Αν $P(A) = 0$, τότε η $P(B|A)$ δεν ορίζεται. (Η σχέση (4), γραμμένη ισοδύναμα ως $P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$, μπορεί να μεταφραστεί ως 'η πιθανότητα να συμβεί και το A και το B είναι ίση με την πιθανότητα να συμβεί το A επί την πιθανότητα να συμβεί το B δεδομένου του ότι συνέβη το A).

Η $P(B|A)$ λέγεται επίσης και πιθανότητα υπό συνθήκη του B δεδομένου του A . Το νόημα της εισαγωγής της δεσμευμένης πιθανότητας είναι η παροχή δυνατότητας ενσωμάτωσης τυχόν διαθέσιμων πληροφοριών κατά τον υπολογισμό της πιθανότητας ενός γεγονότος.

Στην πράξη, αν γνωρίζουμε ότι το A έχει πραγματοποιηθεί, τότε αυτό αντικαθιστά το Ω στον υπολογισμό της πιθανότητας του B , δηλαδή η δεσμευμένη πιθανότητα του B $P(B|A)$ είναι στην ουσία η πιθανότητα του B στον δειγματοχώρο A . Αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του $P(B|A)$.

Συνοψίζοντας: Ο υπολογισμός της δεσμευμένης πιθανότητας $P(B|A)$ μπορεί να γίνει είτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό (4) είτε υπολογίζοντας την πιθανότητα του B στον νέο δειγματοχώρο A .

Παράδειγμα 11: Διαλέγουμε στην τύχη μια οικογένεια με δύο παιδιά, από ένα σύνολο τέτοιων οικογενειών. Ο ΔΧ αυτού του πειράματος τύχης, όσον αφορά το φύλο των παιδιών, είναι $\Omega = \{AA, AK, KA, KK\}$, όπου λόγου χάρη, AK είναι το σημείο που σημαίνει ότι το πρώτο παιδί είναι αγόρι και το δεύτερο κορίτσι.

(α) Ποια είναι η πιθανότητα η οικογένεια αυτή να έχει δύο αγόρια;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα η οικογένεια αυτή να έχει δύο αγόρια αν γνωρίζουμε ότι ένα από τα παιδιά είναι αγόρι;

Έστω B το γεγονός 'η οικογένεια έχει δύο αγόρια' και A το γεγονός 'ένα από τα παιδιά αγόρι'. Τότε το B περιέχει το δειγματοσημείο $B=\{AA\}$ και το A τα σημεία $A=\{AA, KA, AK\}$.

(α) Λαμβάνοντας υπόψη τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, βλέπουμε ότι η πιθανότητα του B είναι $P(B) = 1/4$.

(β) Με δεδομένο ότι ένα από τα παιδιά είναι αγόρι, ο ΔΧ του πειράματος τύχης είναι πλέον ο $A = \{AA, AK, KA\}$. Η πιθανότητα του B στον νέο ΔΧ είναι $P(B) = 1/3$, σύμφωνα και με τη σχέση (4) (σημειώστε ότι $P(B \cap A) = P(B)$, αφού $B \subset A$).

Παράδειγμα 12: Υποθέτουμε ότι ο πληθυσμός κάποιας πόλης είναι 40% άνδρες και 60% γυναίκες. Υποθέτουμε ακόμη ότι το 50% των ανδρών και το 30% των γυναικών είναι καπνιστές. Να βρεθεί η πιθανότητα ένας καπνιστής να είναι άνδρας.

Συμβολίζουμε με A (Γ) το ενδεχόμενο να επιλέξουμε άνδρα (γυναίκα), και K (Λ) το ενδεχόμενο να επιλέξουμε καπνιστή (μη καπνιστή). Η πληροφορία που μας δόθηκε είναι ότι

$$P(K|A) = 0.5, \quad P(K|\Gamma) = 0.3, \quad P(A) = 0.4 \quad \& \quad P(\Gamma) = 0.6.$$

Το πρόβλημα είναι να υπολογιστεί η $P(A|K)$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, έχουμε ότι

$$P(A|K) = \frac{P(A \cap K)}{P(K)}.$$

Για τον υπολογισμό του αριθμητή παρατηρούμε ότι

$$P(A \cap K) = P(K \cap A) = P(A)P(K|A) = (0.4)(0.5) = 0.2.$$

Για τον υπολογισμό του παρονομαστή παρατηρούμε ότι το K είναι η ένωση των ξένων συνόλων $K \cap A$ και $K \cap \Gamma$, οπότε

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K \cap A) + P(K \cap \Gamma) = P(A)P(K|A) + P(\Gamma)P(K|\Gamma) \\ &= 0.2 + (0.6)(0.3) = 0.38. \end{aligned}$$

Επομένως, $P(A|K) = 0.2/0.38 \simeq 0.53$.

Θα παρατηρήσατε ότι ο ΔX δεν αναφέρθηκε ποτέ σαφώς σε αυτό το παράδειγμα. Ωστόσο είναι πολύ εύκολο να κατασκευαστεί.

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

Στενά συνδεδεμένα με την έννοια της δεσμευμένης πιθανότητας είναι το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.

Υποθέτουμε ότι A_1, A_2, \dots, A_n είναι n ξένα ανά δύο ενδεχόμενα των οποίων η ένωση ισούται με το Ω , είναι δηλαδή μια **διαμέριση**, όπως λέγεται, του Ω . Υποθέτουμε επίσης ότι είναι γνωστές οι πιθανότητες $P(B|A_k)$ και $P(A_k)$ για $1 \leq k \leq n$. Τότε αν B είναι ένα ενδεχόμενο του Ω , ποια είναι η $P(B)$? Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα παρατηρούμε ότι αφού τα A_k είναι μια διαμέριση του Ω , θα είναι

$$B = B \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \bigcup_{k=1}^n (B \cap A_k).$$

Άρα, η προσθετική ιδιότητα της πιθανότητας δίνει $P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k)$. Όμως $P(B \cap A_k) = P(B|A_k)P(A_k)$, οπότε έχουμε τελικά

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B|A_k)P(A_k). \quad (5)$$

Η σχέση (5) είναι το **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**.

Ανεξαρτησία γεγονότων

Για δύο γεγονότα A και B , με $P(A) > 0$, ορίσαμε τη δεσμευμένη πιθανότητα του B δεδομένου του A , $P(B|A)$. Συγκρίνοντας τώρα τις πιθανότητες $P(B|A)$ και $P(B)$, είναι δυνατόν να ισχύει μία από τις τρεις σχέσεις:

$$P(B|A) > P(B), \quad P(B|A) = P(B), \quad P(B|A) < P(B).$$

Το ποια από αυτές θα ισχύει, καθορίζεται από τις επιλογές των A και B .

Στην περίπτωση που είναι $P(B|A) = P(B)$, λέμε ότι το γεγονός B είναι ανεξάρτητο¹ (στοχαστικά ή στατιστικά ή υπό την έννοια της πιθανότητας) από το γεγονός A . Δηλαδή, η γνώση του ότι το γεγονός A πραγματοποιήθηκε δεν δίνει καινούριες πληροφορίες για την επανεκτίμηση της πιθανότητας του γεγονότος B . Αν τώρα υποθέσουμε ότι και $P(B) > 0$, τότε το ότι το B είναι ανεξάρτητο του A συνεπάγεται και το ότι το A είναι ανεξάρτητο του B .

Πράγματι,

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B)P(A)}{P(B)} = P(A).$$

Λόγω της συμμετρίας αυτής, λέμε ότι τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα. Από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, που έχει έννοια ακόμα κι αν $P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$. Έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό της ανεξαρτησίας γεγονότων:

Ορισμός: Δύο γεγονότα A_1 και A_2 λέγονται (στοχαστικά ή στατιστικά ή υπό την έννοια της πιθανότητας) ανεξάρτητα, αν $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Πιο γενικά, λέμε ότι $n \geq 3$ γεγονότα A_1, A_2, \dots, A_n είναι ανεξάρτητα, αν

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n),$$

και οποιοδήποτε υποσύνολό τους που περιέχει τουλάχιστον δύο αλλά λιγότερα από n ενδεχόμενα, αποτελείται από ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Παράδειγμα 14: Θεωρούμε ένα δοχείο που περιέχει 4 πανομοιότυπους βόλους, εκτός του ότι είναι αριθμημένοι από το 1 ως το 4. Θέτουμε $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, και υποθέτουμε ότι η πιθανότητα κάθε σημείου του Ω είναι $1/4$. Αποφασίστε για το αν τα γεγονότα A και B είναι ανεξάρτητα, όταν

α) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, και

β) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$.

α) Προφανώς είναι $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$, και $P(A \cap B) = P(\{1\}) = 1/4$. Επομένως

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(B),$$

άρα τα A και B είναι ανεξάρτητα.

¹ Δεν πρέπει να συγχέονται τα στατιστικά ανεξάρτητα γεγονότα με τα ασυμβίβαστα γεγονότα.

β) Προφανώς είναι $P(A) = 3/4$, $P(B) = 3/4$, και $P(A \cap B) = P(\{1, 2\}) = 1/2$.
Επομένως

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3} \neq \frac{3}{4} = P(B).$$

Άρα τα A και B δεν είναι ανεξάρτητα.

Τελειώνουμε το κεφάλαιο αυτό με μερικά σχόλια που αφορούν πειράματα τύχης των οποίων ο δειγματοχώρος είναι άπειρος. Σε τέτοια περίπτωση, ο ορισμός της πιθανότητας διαφόρων ενδεχομένων εξαρτάται από το αν ο ΔX είναι αριθμήσιμος ή όχι. Μη αριθμήσιμοι δειγματοχώροι απαιτούν εν γένει την εισαγωγή νέων εννοιών. Αν όμως ο ΔX είναι αριθμήσιμος, τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση πιθανότητας σύμφωνα με τον αξιωματικό ορισμό που δώσαμε, αρκεί να μην ορίσουμε ίση πιθανότητα για κάθε στοιχειώδες γεγονός του Ω . Ο περιορισμός αυτός προκύπτει από την απαίτηση σύγκλισης του άπειρου αθροίσματος του αξιώματος (iii).

Παράδειγμα 15: Πίχνουμε ένα νόμισμα μέχρι να έρθει κεφάλι (Κ). Έστω ότι το αποτέλεσμα του πειράματος είναι ο αριθμός των ρίψεων που χρειάστηκαν μέχρι να έρθει Κ. Τότε ο ΔX του πειράματος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Η πιθανότητα να έρθει Κ σε μία ρίψη είναι $1/2$. Η πιθανότητα να έρθει γράμματα (Γ) στην πρώτη ρίψη και Κ στη δεύτερη ρίψη είναι $1/4$. Η πιθανότητα να έρθει Γ στις δύο πρώτες ρίψεις και Κ στην τρίτη είναι $1/8$, κ.ο.κ. Αυτό μας υποβάλλει την ιδέα να αντιστοιχίσουμε πιθανότητα $1/2^n$ στο στοιχειώδες γεγονός n του Ω .

Συμβολίζοντας με A_n το σημείο n του Ω , από το αξίωμα (ii) έχουμε

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Το παραπάνω άθροισμα υπολογίζεται με τη βοήθεια της ταυτότητας που δίνει το άπειρο άθροισμα μιάς γεωμετρικής σειράς:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r}.$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω ταυτότητα με r , και θέτοντας $r = 1/2$, παίρνουμε $P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, οπότε $P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\Omega) = 1$, όπως πρέπει για μία συνάρτηση πιθανότητας.

Ποια είναι η πιθανότητα να έρθει πρώτη φορά Κ μετά από άρτιο αριθμό ρίψεων;

Έστω E το γεγονός που περιγράφηκε. Τότε $E = \{2, 4, 6, \dots\}$, και

$$P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$$

Οπότε η πιθανότητα να έρθει πρώτη φορά κεφάλι μετά από περιττό αριθμό ρίψεων είναι $2/3$.

Ιστορικά Στοιχεία

Η σοβαρή μελέτη των πιθανοτήτων και ο υπολογισμός της πιθανότητας διαφόρων τυχαίων γεγονότων δεν έγινε παρά μόνο το 16^ο αιώνα μ.Χ. Τότε, τα προβλήματα που σχετίζονταν με τυχερά παιχνίδια έκαναν τους ανθρώπους να σκεφτούν σχετικά με τις πιθανότητες. Ωστόσο, το γιατί δεν αναπτύχθηκε νωρίτερα μία θεωρία πιθανοτήτων, είναι ένα ενδιαφέρον ερώτημα στην ιστορία της επιστήμης, αφού τέτοιου είδους παιχνίδια είναι τόσο παλιά όσο και ο ίδιος ο πολιτισμός.

Στην αρχαία Αίγυπτο, τον καιρό της Πρώτης Δυναστείας (3500 π.Χ.), παιζόταν ένα παιχνίδι με τη βοήθεια ενός “ζαριού” τεσσάρων πλευρών. Ζάρια εξάπλευρα φτιαγμένα από ποικιλία υλικών έχουν καταγραφεί από τον 16^ο αιώνα π.Χ. Τα τυχερά παιχνίδια ήταν επίσης διαδεδομένα τόσο στην αρχαία Ελλάδα, όσο και στην αρχαία Ρώμη. Πράγματι, στη Ρωμαϊκή αυτοκρατορία στάθηκε πολλές φορές απαραίτητο να νομοθετήσουν ενάντια στα τυχερά παιχνίδια. Γιατί λοιπόν πήρε τόσο χρόνο για να μελετηθούν οι πιθανότητες σοβαρά;

Διάφορες εξηγήσεις έχουν προταθεί γι’ αυτήν την αργοπορία. Η μία είναι ότι τα σχετικά μαθηματικά δεν ήταν ανεπτυγμένα και δεν ήταν εύκολο να αναπτυχθούν. Ο αρχαίος μαθηματικός συμβολισμός έκανε τους αριθμητικούς υπολογισμούς πολύ δύσκολους, και ο οικείος σε μας αλγεβρικός συμβολισμός δεν καθιερώθηκε παρά μόνο τον 16^ο αιώνα μ.Χ. Ωστόσο, πολλές από τις ιδέες της συνδυαστικής, απαραίτητες για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων είχαν συζητηθεί πολύ νωρίτερα. Αφού πολλά από τα τυχαία γεγονότα εκείνους τους καιρούς είχαν να κάνουν με λοταρίες που σχετίζονταν με θρησκευτικά θέματα, έχει προταθεί ότι μπορεί να υπήρχαν θρησκευτικοί φραγμοί στη μελέτη της τύχης και των τυχερών παιχνιδιών. Προτάθηκε επίσης ότι υπήρχαν τότε ισχυρότερες ανάγκες, όπως η ανάπτυξη του εμπορίου. Καμία από τις παραπάνω εξηγήσεις δεν είναι πλήρως ικανοποιητική.

Ο πρώτος που υπολόγισε πιθανότητες συστηματικά ήταν ο Gerolamo Cardano (GC) (1501-1576) στο βιβλίο του “Liber de Ludo Aleae”. Ο GC, ο οποίος είναι επίσης γνωστός από την διαμάχη του με τον Tartaglia για τη λύση της κυβικής εξίσωσης, ήταν άνθρωπος με ευρύτερα ενδιαφέροντα, όπως η ιατρική, η αστρολογία και τα μαθηματικά. Στο βιβλίο του ασχολήθηκε με την ειδική περίπτωση ισοπίθανων γεγονότων, όπου κατάλαβε ότι η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός είναι ο λόγος του αριθμού των ευνοϊκών αποτελεσμάτων προς τον ολικό αριθμό αποτελεσμάτων. Πολλά από τα παραδείγματα του GC ασχολούνταν με τη ρίψη ζαριού. Εδώ κατάλαβε ότι τα αποτελέσματα δύο ρίψεων είναι τα 36 διατεταγμένα ζεύγη (i, j) και όχι τα 21 μη διατεταγμένα. Αυτό είναι ένα λεπτό σημείο, το οποίο προκαλούσε προβλήματα σε άλλους συγγραφείς για πιθανότητες ακόμα και πολύ αργότερα. Για παράδειγμα, τον 18^ο αιώνα ο διάσημος γάλλος μαθηματικός d’Alembert, συγγραφέας αρκετών βιβλίων για πιθανότητες, ισχυρίστηκε ότι όταν ένα νόμισμα ρίχνεται δύο φορές, ο αριθμός των K που εμφανίζεται θα είναι 0,1,2, και έτσι θα έπρεπε να αποδώσουμε ίσες πιθανότητες σ’ αυτά τα τρία δυνατά αποτελέσματα. Ο GC διάλεξε το σωστό δειγματοχώρο για τα δικά του προβλήματα με ζάρια, και υπολόγισε σωστά τις πιθανότητες για μία ποικιλία ενδεχομένων. Έκανε και ο ίδιος λάθη, αλλά, παρόλα αυτά η δουλειά του ήταν μία αξιοσημείωτη πρώτη προσπάθεια καταγραφής των νόμων της πιθανότητας.

Όμως το έναυσμα για μια συστηματική μελέτη του αντικειμένου των πιθανοτήτων δεν ήταν η δουλειά του GC, αλλά η αλληλογραφία των Pascal και Fermat. Ο Blaise Pascal (1623-1662) υπήρξε παιδί-θαύμα, αφού στα δεκαέξι του δημοσίευσε μία διατριβή για τις

κωνικές τομές, ενώ στα δεκαοκτώ του εφεύρε μια υπολογιστική μηχανή. Την εποχή που αλληλογραφούσε με τον Fermat, η επίδειξή του για το βάρος της ατμόσφαιρας τον είχε ήδη θέσει στην πρώτη γραμμή της σύγχρονης φυσικής. Ο Pierre de Fermat (1601-1665), μελετούσε μαθηματικά στον ελεύθερο χρόνο του, και από πολλούς θεωρήθηκε ως ένας από τους μεγαλύτερους "καθαρούς" μαθηματικούς όλων των εποχών. Η αλληλογραφία μεταξύ τους άρχισε από τον Pascal, ο οποίος ήθελε να συμβουλευτεί τον Fermat σχετικά με προβλήματα που του δόθηκαν από τον Chevalier de Meré, έναν ευγενή της αυλής του Λουδοβίκου του 14^{ου}, γνωστό συγγραφέα και παίκτη τυχερών παιχνιδιών.

Ασκήσεις

1. Έστω $\Omega = \{a, b, c\}$ ο δειγματοχώρος ενός πειράματος τύχης. Αν $P(a) = 1/2$, $P(b) = 1/3$ και $P(c) = 1/6$, να βρείτε τις πιθανότητες όλων των δυνατών υποσυνόλων του Ω .
2. Ρίχνουμε ένα τίμιο ζάρι δύο φορές. Βρείτε την πιθανότητα να έρθει 4,5 ή 6 στην πρώτη ρίψη και 1,2,3 ή 4 στη δεύτερη.
3. Τραβάμε στην τύχη ένα χαρτί από μία συνηθισμένη τράπουλα 52 χαρτιών. Να βρεθεί η πιθανότητα το χαρτί αυτό να είναι
 - α) άσσος,
 - β) βαλές κούπα,
 - γ) τρία σπαθί ή έξι καρρό,
 - δ) κούπα,
 - ε) όχι κούπα,
 - στ) δέκα ή μπαστούνι,
 - ζ) ούτε τέσσερα ούτε σπαθί.
4. Έστω δύο ενδεχόμενα A και B ενός τυχαίου πειράματος.
 - α) Αν $P(A) = 2/5$, $P(B) = 2/5$ και $P(A \cup B) = 1/2$, βρείτε την $P(A \cap B)$.
 - β) Αν $P(A) = 1/3$, $P(A \cup B) = 1/2$ και $P(A \cap B) = 1/4$, βρείτε την $P(B)$.
 - γ) Αν $P(A^c) = 1/3$, $P(B) = 1/2$ και $P(A \cap B) = 1/4$, βρείτε την $P(A \cup B)$.
 - δ) Αν $P(B^c) = 1/2$, και $P(A|B) = 1/2$, βρείτε την $P(A \cap B)$.
5. Ένα δοχείο περιέχει r κόκκινους και b μαύρους βόλους. Επιλέγουμε τυχαία ένα βόλο από το δοχείο, και στη συνέχεια ένα δεύτερο από αυτούς που είχαν απομείνει στο δοχείο. Βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
 - α) και οι δύο βόλοι είναι κόκκινοι
 - β) ο πρώτος βόλος είναι κόκκινος και ο δεύτερος μαύρος
 - γ) ο πρώτος βόλος είναι μαύρος και ο δεύτερος κόκκινος
 - δ) και οι δύο βόλοι είναι μαύροι.

6. Ποια είναι η πιθανότητα μιά οικογένεια με δύο παιδιά να έχει
- α) δύο αγόρια δεδομένου ότι έχει τουλάχιστον ένα αγόρι;
 - β) δύο αγόρια δεδομένου ότι το πρώτο παιδί είναι αγόρι;
7. Σε ένα πανεπιστήμιο, το 70% είναι άνδρες και 30% είναι γυναίκες. Είναι γνωστό ότι το 40% των ανδρών και το 60% των γυναικών είναι καπνιστές. Ποια είναι η πιθανότητα ένας φοιτητής που καπνίζει να είναι άνδρας;
8. Από 10 κάρτες, αριθμημένες από το ένα ως το 10, επιλέγονται δύο τυχαία και χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα οι αριθμοί που εμφανίστηκαν να έχουν άθροισμα:
- α) ίσο με 10;
 - β) μικρότερο του 10;
 - γ) μεγαλύτερο του 10;
9. Δύο τίμια ζάρια ρίχνονται μία φορά. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες των γεγονότων:
- $$A = \{ \text{εμφανίζονται ίδιοι αριθμοί και στις δύο όψεις} \},$$
- $$B = \{ \text{ο εμφανιζόμενος αριθμός στο ένα ζάρι είναι μεγαλύτερος του εμφανιζόμενου στο άλλο ζάρι} \},$$
- $$\Gamma = \{ \text{το άθροισμα των εμφανιζόμενων αριθμών και στα δύο ζάρια είναι άρτιος} \}.$$
10. Υποθέστε ότι A και B είναι δύο γεγονότα με θετική πιθανότητα να πραγματοποιηθούν. Δείξτε ότι αν $P(A|B) = P(A)$, τότε $P(B|A) = P(B)$.
11. Ένα κουτί περιέχει 6 κόκκινες, 4 άσπρες και 5 μπλέ σφαίρες, κατά τ' άλλα όμοιες. Επιλέγουμε διαδοχικά τρεις σφαίρες (α) με επανατοποθέτηση, (β) χωρίς επανατοποθέτηση. Βρείτε την πιθανότητα να βγούν οι σφαίρες στη σειρά κόκκινη, άσπρη και μπλέ.
12. Εάν $A_j, j = 1, 2, \dots, n$ είναι γεγονότα ενός πειράματος τύχης, δείξτε ότι
- $$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$
13. Ρίχνουμε ένα τίμιο ζάρι δύο φορές, και θεωρούμε τα γεγονότα $A_j, j = 1, 2, 3$, όπου
- $$A_1 = \text{"περιττός αριθμός εμφανίζεται στην πρώτη ρίψη"},$$
- $$A_2 = \text{"περιττός αριθμός εμφανίζεται στην δεύτερη ρίψη"},$$
- $$A_3 = \text{"το άθροισμα των δύο αριθμών που εμφανίστηκαν είναι περιττός αριθμός"}.$$
- Να εξεταστούν τα γεγονότα αυτά από την άποψη ανεξαρτησίας.
14. Ρίχνουμε ένα νόμισμα δύο φορές. Θεωρήστε τα παρακάτω γεγονότα:
- $$A = \text{"κεφάλι στην πρώτη ρίψη"}$$
- $$B = \text{"κεφάλι στη δεύτερη ρίψη"}$$
- $$\Gamma = \text{"και οι δύο ρίψεις δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα"}.$$
- α) Δείξτε ότι τα A, B , και Γ είναι ανά δύο ανεξάρτητα αλλά δεν είναι ανεξάρτητα.
 - β) Δείξτε ότι το Γ είναι ανεξάρτητο των A και B , αλλά δεν είναι ανεξάρτητο του $A \cap B$.

15. Υποθέτουμε ότι A , B , και Γ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα και $P(A \cap B) \neq 0$. Δείξτε ότι $P(\Gamma|A \cap B) = P(\Gamma)$.
16. Ρίχνουμε τρεις φορές ένα αμερόληπτο ("τίμιο") ζάρι. Αν ξέρουμε ότι το 1 εμφανίστηκε τουλάχιστον μία φορά, ποια είναι η πιθανότητα να εμφανίστηκε ακριβώς μία φορά;
17. Δύο τίμια ζάρια ρίχνονται μία φορά. Δεδομένου ότι το άθροισμα των εμφανισθέντων αριθμών είναι 7, ποια είναι η πιθανότητα σ' ένα τουλάχιστον από τα ζάρια να εμφανιστεί ένα 3;
18. Ένα κουτί περιέχει 4 άσπρες και 2 μαύρες σφαίρες, ενώ ένα δεύτερο 3 άσπρες και 5 μαύρες. Επιλέγουμε μία σφαίρα από κάθε κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι
 - α) και οι δύο άσπρες,
 - β) και οι δύο μαύρες,
 - γ) η μία άσπρη και η άλλη μαύρη;
19. Τραβάμε στην τύχη ένα χαρτί από μία τράπουλα 52 χαρτιών, και μετά ένα δεύτερο (α) με επανατοποθέτηση του πρώτου, (β) χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια είναι η πιθανότητα να τραβήξουμε δύο άσσους;
20. Ένα εργοστάσιο έχει δύο μηχανήματα A και B , τα οποία κατασκευάζουν το 60% και 40% της συνολικής παραγωγής, αντίστοιχα. Το ποσοστό των ελαττωματικών κομματιών είναι 3% για το μηχάνημα A και 5% για το μηχάνημα B . Βρείτε την πιθανότητα ένα ελαττωματικό κομμάτι της παραγωγής να κατασκευάστηκε από το μηχάνημα B .

Βιβλιογραφία

- M. R. Spiegel, Πιθανότητες και Στατιστική, (ΕΣΠΙ, Αθήνα 1977). Μετάφραση του Probability and Statistics, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, New York, 1975.
- Φ. Κολυβά - Μαχαίρα, και Ε. Μπόρα - Σέντα, Στατιστική, Θεωρία και Εφαρμογές, (Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1998).
- Σημειώσεις Θεωρίας Πιθανοτήτων (βασισμένες στο βιβλίο Introduction to Probability Theory, των Hoel, Port, και Stone), Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών, Φθινόπωρο 1999.
- Θεωρία Πιθανοτήτων, Γ. Γ. Ρούσσα, (Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη 1992).
- Introduction to Probability, Charles M. Grinstead, and J. Laurie Snell. Διαθέσιμο on-line στη διεύθυνση:
http://www.dartmouth.edu/chance/teaching_aids/books_articles/probability_book