Ενότητα ΙΙ: Γραμμική Άλγεβρα

Ύλη: Διανυσματικοί χώροι και διανύσματα, μετασχηματισμοί διανυσμάτων, τελεστές και πίνακες, ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές πινάκων, επίλυση γραμμικών συστημάτων

Διανυσματικοί χώροι και διανύσματα

1. Εισαγωγή – Τα γνωστά μας διανύσματα

Τι είναι βαθμωτό μέγεθος? Ένα μέγεθος που περιγράφεται μόνο με έναν αριθμό (π.χ. πίεση)

Διάνυσμα (στον γνωστό μας τριδιάστατο ευκλείδιο χώρο): Είναι ένα μέγεθος που για να περιγραφεί πλήρως χρειάζεται όχι μόνο το μέτρο αλλά και η κετεύθυνσή του στον χώρο, δηλ. περισσότεροι από ένας αριθμοί. (π.χ. δύναμη, ταχύτητα).

Διανυσματικοί χώροι: Χώροι που έχουν ως στοιχεία τους διανύσματα (σύνολα διανυσμάτων). Ο πιο οικείος είναι ο R^3 , δηλαδή ο τριδιάστατος ευκλείδιος χώρος, καθώς και ο R^2, δηλαδή το επίπεδο.

Χαρακτηριστικές ιδιότητές του R^3 (R^2)

- Κάθε γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του R^3 (R^2) είναι διάνυσμα του R^3 (R^2)
- Για κάθε διάνυσμα υπάρχει και το αντίθετό του
- Υπάρχει ένα μηδενικό στοιχείο
- Ο πολλαπλασιασμός με τη μονάδα αφήνει το διάνυσμα αναλλοίωτο
- Η πρόσθεση διανυσμάτων είναι αντιμεταθετική και παροσεταιριστική
- Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό είναι επιμεριστικός και ως προς το διάνυσμα και ως προς τον αριθμό.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες αυτές για να ορίσουμε διανυσματικούς χώρους περισσότερων διαστάσεων και πιο γενικευμένα και αφηρημένα διανύσματα (που δεν είναι κατ' ανάγκη γεωμετρικές οντότητες).

Ορίζουμε επιπλέον στους γνωστούς μας διανυσματικούς χώρους R^3 και R^2:

Εσωτερικό γινόμενο: Σε κάθε ζεύγος διανυσμάτων **a** και **b** αντιστοιχίζεται ένας αριθμός $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\theta)$, (όπου θ η γωνία μεταξύ **a** και **b**) ο οποίος λέγεται εσωτερικό γινόμενο. Πόσο είναι το εσωτερικό γινόμενο όταν **a**, **b** κάθετα: Όταν είναι παράλληλα;

Μέτρο διανύσματος: $|\mathbf{a}|=a= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2}$ (το γράφουμε συνήθως $||\mathbf{a}||$ για να μην συγχέεται με την απόλυτη τιμή αριθμού – εδώ για απλότητα θα το γράφουμε $|\mathbf{a}|$).

Ορθοκανονικά διανύσματα: Λέγονται τα ορθογώνια (κάθετα) διανύσματα, με μέτρο μονάδα. Για τα διανύσματα αυτά ισχύει $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$ (δ_{ij} είναι το σύμβολο του Kronecker, το οποίο είναι μονάδα για i=j και μηδέν για i διαφορετικό από το j).

Αν ορίσουμε στον R^2 ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{e}_2$, τότε κάθε διάνυσμα **a** του R^2 μπορεί να γραφεί $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+\alpha_2\mathbf{e}_2$ (γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{e}_2$ –

(τι είναι γραμμικός συνδυασμός;)). Οι αριθμοί $α_1$, $α_2$ λέγονται συντεταγμένες του **a** στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων.

Πώς εκφράζεται το μέτρο και το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσει των συντεταγμένων διανύσματος σε ορθοκανονικό σύστημα;

Σημειώστε ότι οι συντεταγμένες διανύσματος αλλάζουν αν αλλάξει το σύστημα συντεταγμένων (αν π.χ. περιστραφεί). Άρα η γραφή ενός διανύσματος μέσω των συντεταγμένων του αποτελεί απλώς αναπαράσταση του διανύσματος στο δεδομένο σύστημα συντεταγμένων.
Σημειώστε επίσης ότι αν διαλέξουμε οποιαδήποτε μη παράλληλα διανύσματα του R^2 (όχι αναγκαστικά ορθοκανονικά), π.χ. $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, τότε κάθε διάνυσμα **a** του R^2 μπορεί να γραφεί $\mathbf{a}=λ_1\mathbf{x}_1+λ_2\mathbf{ex}_2$ (γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$) (αποδεικνύεται εύκολα εκφράζοντας τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ συναρτήσει των $\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{e}_2$).

2. Γενίκευση σε χώρους περισσότερων διαστάσεων

Ανάλογα με τον R^2 και R^3 μπορούν να οριστούν και διανυσματικοί χώροι περισσότερων από δύο διαστάσεων

Γενικά, **διανυσματικός χώρος**, έστω S, είναι ένα σύνολο στοιχείων (τα οποία ονομάζονται διανύσματα) στο οποίο έχει οριστεί η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό και το οποίο διέπεται από τους εξής κανόνες/ιδιότητες:

- Κάθε γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων του χώρου είναι διάνυσμα του χώρου, δηλ. αν **a**, **b** στοιχεία του S και λ, μ αριθμοί (πραγματικοί ή μιγαδικοί) τότε το $λ\mathbf{a}+μ\mathbf{b}$ ανήκει στον S
- Για κάθε διάνυσμα **a** του S υπάρχει και το αντίθετό του, $-\mathbf{a}$, ώστε $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{a}-\mathbf{a}=0$
- Ορίζεται ένα μηδενικό στοιχείο, 0, ώστε $0\mathbf{a}=0$ για κάθε **a** του S (μηδενικό διάνυσμα)
- Ο πολλαπλασιασμός με τη μονάδα αφήνει κάθε διάνυσμα αναλλοίωτο.
- Η πρόσθεση διανυσμάτων είναι αντιμεταθετική και παροσεταιριστική, δηλ. για κάθε a, **b**, **c** του S ισχύουν $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$
- Ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό είναι επιμεριστικός και ως προς το διάνυσμα και ως προς τον αριθμό, δηλ. αν **a**, **b** στοιχεία του S και λ, μ αριθμοί, τότε $(λ+μ)\mathbf{a}=λ\mathbf{a}+μ\mathbf{a}$, $λ(\mathbf{a}+\mathbf{b})=λ\mathbf{a}+μ\mathbf{b}$, $(λμ)\mathbf{a}=λ(μ\mathbf{a})$

Αν οι αριθμοί λ και μ στις παραπάνω εκφράσεις είναι αποκλειστικά πραγματικοί ο διανυσματικός χώρος S λέγεται πραγματικός. Αν είναι μιγαδικοί τότε ο S λέγεται μιγαδικός.

Τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου λέγονται **διανύσματα**. Τα διανύσματα δεν είναι απαραίτητο να είναι γεωμετρικές οντότητες. Μπορεί να έχουν τελείως διαφορετική φυσική σημασία από τα γνωστά μας διανύσματα αλλά παρόμοια μαθηματική δομή και κανόνες χειρισμού.

Θα συμβολίζουμε τα διανύσματα είτε με παχιά (bold) λατινικά γράμματα (π.χ. **a**) είτε θα ακολουθούμε τον συμβολισμό Dirac (π.χ. |a> ή |**a**> (αν υπάρχουν δίπλα και αριθμοί) - δείτε πιο κάτω).

Παραδείγματα διανυσματικών χώρων:
- Ο τριδιάστατος ευκλείδιος χώρος, R^3
- Ο *n*-διάστατος ευκλείδιος χώρος (γενίκευση του τριδιάστατου σε *n*-διαστάσεις). Π.χ. αν έχουμε πέντε συζευγμένες μάζες που ταλαντώνονται η κάθε συνιστώσα του διανύσματος μπορεί να δίνει την μετατόπιση της κάθε μάζας από τη θέση ισορροπίας (5-διάστατος χώρος)

- Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών (μιγαδικός διανυσματικός χώρος) – απόδειξη
- Το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού μέχρι n - απόδειξη
- Σύνολα συναρτήσεων, π.χ. το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το [0,1] - απόδειξη

Σε κάθε διανυσματικό χώρο μπορεί να οριστεί το **εσωτερικό γινόμενο** διανυσμάτων, το οποίο είναι γενίκευση του εσωτερικού γινομένου του R^3 για χώρους περισσότερων διαστάσεων ή/και μιγαδικούς χώρους.
Το **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων, **a**, **b**, είναι ένας αριθμός, ο οποίος συνήθως συμβολίζεται με $<\mathbf{a}|\mathbf{b}>$, και ο οποίος έχει τις εξής ιδιότητες (εξ ορισμού):
(i) $<\mathbf{a}|\mathbf{b}>=<\mathbf{b}|\mathbf{a}>^*$
(ii) $<\mathbf{a}|\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}>=\lambda<\mathbf{a}|\mathbf{b}>+\mu<\mathbf{a}|\mathbf{c}>$
(iii) $<\mathbf{a}|\mathbf{a}> \geq 0$ (για τους διανυσματικούς χώρους που θα συζητήσουμε εδώ)
(το * συμβολίζει τον συζυγή μιγαδικό)

Το αριστερό διάνυσμα του εσωτερικού γινομένου λέγεται bra και το δεξιό ket (από το bracket = παρένθεση)

Χρησιμοποιώντας τις (i) και (ii) αποδείξτε ότι:
(iv) $<\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c}|\mathbf{a}>=\lambda^*<\mathbf{b}|\mathbf{a}>+\mu^*<\mathbf{c}|\mathbf{a}>$

Σημειώστε τη μη ισοδυναμία του bra και του ket στο εσωτερικό γινόμενο.

Υπολογίστε χρησιμοποιώντας τα παραπάνω το $<\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}|\nu\mathbf{c}+k\mathbf{d}>$ συναρτήσει των εσωτερικών γινομένων $<\mathbf{a}|\mathbf{c}>$, $<\mathbf{a}|\mathbf{d}>$, $<\mathbf{b}|\mathbf{c}>$, $<\mathbf{b}|\mathbf{d}>$. Σε τι διαφέρει η διαδικασία από πολλαπλασιασμό παρενθέσεων;

Μέσω του εσωτερικού γινομένου ορίζεται και το μέτρο διανύσματος, ως εξής: $|\mathbf{a}|^2=<\mathbf{a}|\mathbf{a}>$ (γενίκευση του μήκους διανύσματος του R^3).

Διανύσματα (μη μηδενικά) των οποίων το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν λέγονται **ορθογώνια**. Αν επιπλέον έχουν και μέτρο μονάδα (μοναδιαία διανύσματα), τότε λέγονται **ορθοκανονικά**. Διανύσματα με μέτρο μονάδα θα συμβολίζονται συχνά εδώ ως ê (δηλ. με καπελάκι, είτε bold είτε όχι).

Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $<\mathbf{f}_1|\,\mathbf{f}_2>$ των $\mathbf{f}_1=\hat{e}_1$, $\mathbf{f}_2=2\hat{e}_1+\hat{e}_2$, όπου $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ ορθοκανονικά.
Είναι τα διανύσματα $\mathbf{f}_1=\frac{-i}{\sqrt{2}}e^{i\delta}\hat{e}_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_2$, $\mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_1-\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\delta}\hat{e}_2$ ορθοκανονικά;

Χρήσιμες ανισότητες που σχετίζονται με το εσωτερικό γινόμενο:

(i) Η ανισότητα του Schwarz: $|<\mathbf{a}|\mathbf{b}>| \leq |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ (είναι προφανής για τα συνήθη διανύσματα;)
(ii) Η τριγωνική ανισότητα: $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ (αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Schwarz).

Σε διανυσματικούς χώρους συναρτήσεων το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως εξής: Αν $f(x)$, $g(x)$ συναρτήσεις ορισμένες στο $[a,b]$, τότε

$$< g \mid f >= \int_a^b g^*(x) f(x) dx \qquad \text{ή} \qquad < g \mid f >= \int_a^b g^*(x) w(x) f(x) dx,$$

όπου η συνάρτηση $w(x)$ (δεδομένη συνάρτηση) λέγεται συνάρτηση βάρους και είναι μια συνάρτηση θετικά ορισμένη στο $[a,b]$.

Αποδείξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων όπως ορίζεται πιο πάνω ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) (ii) του εσωτερικού γινομένου.

3. Χρήσιμες έννοιες διανυσματικών χώρων

Γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων: Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, …, $\mathbf{x}_n$, ενός διανυσματικού χώρου S λέγονται γραμμικά ανεξάρτητα αν κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.
Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την εξής, μαθηματικά πιο εύχρηστη, έκφραση (αποδείξτε το):

Τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, …, $\mathbf{x}_n$ είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αν η συνθήκη
$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\lambda_3\mathbf{x}_3+ \ldots+\lambda_n\mathbf{x}_n=0$ αναγκαστικά συνεπάγεται ότι $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3= \ldots=\lambda_n=0$

(παρατηρήστε ότι αν κάποιο από τα λ_i δεν είναι μηδέν τότε το αντίστοιχο διάνυσμα μπορεί να πάει στο άλλο μέλος της ισότητας και να γραφεί συναρτήσει των υπολοίπων).

Είναι τα ορθογώνια διανύσματα γραμμικά ανεξάρτητα (εφαρμόστε την συνθήκη ανεξαρτησίας και πάρτε το εσωτερικό γινόμενο με κάποιο από τα διανύσματα); Είναι τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα ορθογώνια;

<u>Εφαρμογή:</u> Είναι τα διανύσματα $\mathbf{f}_1= \hat{e}_1$, $\mathbf{f}_2=2\hat{e}_1+\hat{e}_2$, $\mathbf{f}_3= \hat{e}_3$ γραμμικά ανεξάρτητα; Τα $\mathbf{g}_1= \hat{e}_1$, $\mathbf{g}_2=\hat{e}_1+\hat{e}_2$, $\mathbf{g}_3= \hat{e}_1+\hat{e}_2+\hat{e}_3$; (τα $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ είναι ορθοκανονικά διανύσματα). Είναι τα διανύσματα $\mathbf{f}_1= 1$, $\mathbf{f}_2=x$, $\mathbf{f}_3= x^2$, $\mathbf{f}_4= x^3$ γραμμικά ανεξάρτητα; Τα $\mathbf{f}_1= 1$, $\mathbf{f}_2=1-x+x^2$, $\mathbf{f}_3= x-x^2+2x^3$, $\mathbf{f}_4=1+x^3$;

Βάση διανυσματικού χώρου: Λέγεται κάθε σύνολο <u>γραμμικά ανεξάρτητων</u> διανυσμάτων του χώρου τέτοιο ώστε <u>κάθε</u> διάνυσμα του χώρου να μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης.

Αν τα διανύσματα της βάσης εκτός από γραμμικά ανεξάρτητα είναι επιπλέον και ορθογώνια, η βάση λέγεται ορθογώνια. Αν είναι ορθοκανονικά (ορθογώνια ανά δύο, με μέτρο μονάδα, δηλ. $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$) η **βάση** λέγεται **ορθοκανονική**. Οι ορθοκανονικές βάσεις αποτελούν γενικά την πιο χρήσιμη περίπτωση βάσης διανυσματικών χώρων.
(Παράδειγμα ορθοκανονικής βάσης στον R^2;)

Διάσταση διανυσματικού χώρου: Λέγεται ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που μπορούμε να βρούμε στο χώρο αυτόν (ή ο ελάχιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που χρειαζόμαστε για να εκφράσουμε κάθε διάνυσμα του χώρου).

Δηλ. αν ο χώρος έχει διάσταση N τότε μπορούμε να βρούμε N γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα αλλά οποιαδήποτε N+1 θα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Σε χώρο διάστασης N, N γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα θα αποτελούν βάση;

Ένας διανυσματικός χώρος μπορεί να είναι και απειροδιάστατος, όπως συμβαίνει συνήθως σε χώρους συναρτήσεων.

Εφαρμογή: Τι διάστασης είναι ο χώρος των πολυωνύμων βαθμού μέχρι 4; (ελέγξτε τη γραμμική ανεξαρτησία των 1, x, x^2, x^3, x^4). Ο χώρος των μιγαδικών αριθμών;

Συνιστώσες διανύσματος:
Έστω μια βάση $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ στον διανυσματικό χώρο S_n (διάστασης *n*). Τότε κάθε διάνυσμα, **y**, του S_n θα μπορεί να γραφεί

$$\mathbf{y}=\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\lambda_3\mathbf{x}_3+\ldots+\lambda_n\mathbf{x}_n$$

Οι αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ λέγονται **συντεταγμένες** του **y** στη βάση $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}\equiv\{\mathbf{x}_i\}$ και αλλάζουν αν αλλάξει η βάση. Για δεδομένη βάση είναι μονοσήμαντα ορισμένοι (απόδειξη).

Το διάνυσμα $\mathbf{y}=\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\lambda_3\mathbf{x}_3+\ldots+\lambda_n\mathbf{x}_n$ γράφεται πολύ συχνά (χάριν συντομίας) και $\mathbf{y}=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, δηλαδή ως μια *διάταξη* των λ_i, παραλείποντας τα διανύσματα της βάσης, τα οποία θεωρούνται δεδομένα.
Στην άλγεβρα πινάκων η ακολουθία αυτή των λ_i γράφεται ως ένας πίνακας στήλης, δηλαδή

$$\mathbf{y}=|\mathbf{y}\rangle=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

Αν το διάνυσμα εμφανίζεται στο αριστερό μέρος εσωτερικού γινομένου ο πίνακας αυτός γίνεται ο συζυγής πίνακας γραμμής, δηλ $\langle\mathbf{y}|=(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*)$, και το εσωτερικό γινόμενο καταλήγει σε έναν πολλαπλασιασμό πινάκων (δείτε το επόμενο κεφάλαιο).

Γράψτε τις συνιστώσες του αθροίσματος διανυσμάτων και του γινομένου αριθμού με διάνυσμα. (Χρησιμοποιήστε την αναπαράσταση διανύσματος ως στήλη αριθμών.)

Συντεταγμένες διανύσματος και εσωτερικό γινόμενο:
Έστω μια ορθοκανονική βάση $\{\hat{e}_i\}$ σε έναν *N*-διάστατο διανυσματικό χώρο και δύο τυχαία διανύσματα

$$|\mathbf{x}\rangle=\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\hat{e}_i \qquad |\mathbf{y}\rangle=\mathbf{y}=\sum_{j=1}^{N}\mu_j\hat{e}_j$$

- Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle$ συναρτήσει των λ_i , μ_i. Συγκρίνετε με το εσωτερικό γινόμενο στον R^3.

- Υπολογίστε το $|\mathbf{x}|^2=\langle\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle$ συναρτήσει των λ_i . Συγκρίνετε με το μέτρο των γνωστών μας διανυσμάτων, εκφρασμένο μέσω των συνιστωσών τους.

- Θα ήταν οι παραπάνω υπολογισμοί πιο σύνθετοι αν οι συντεταγμένες (λ_i , μ_i) είχαν οριστεί ως προς μη ορθοκανονική βάση;
- Με ποιο διάνυσμα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $|\mathbf{x}\rangle$ για να βρούμε λ_5;
- Μπορούμε να γράψουμε το $|\mathbf{x}\rangle=\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{N}\langle\hat{e}_1|x\rangle\hat{e}_i$;

- Αναπαριστώντας το |**x**> με πίνακα στήλης (στήλη αριθμών) και το |**y**> με πίνακα γραμμής, εξοικειωθείτε με τον υπολογισμό του <**x**|**y**> μέσω των λ_i , μ_i.

Ορθογωνιοποίηση Gram-Schmidt

Είναι μέθοδος με την οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε από ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων ένα σύνολο ορθοκανονικών διανυσμάτων. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο σε διανύσματα του γνωστού μας τριδιάστατου ευκλείδιου χώρου R^3.

Έστω τα τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του R^3, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Θα κατασκευάσουμε από αυτά τρία ορθοκανονικά διανυσματα, $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$.

Ξεκινάμε με το $\mathbf{v}_1$, το οποίο κανονικοποιούμε διαιρώντας το με το μέτρο του, παίρνοντας έτσι το διάνυσμα $\hat{e}_1= \mathbf{v}_1/|\mathbf{v}_1|$.

Χρησιμοποιώντας το $\mathbf{v}_2$, κατασκευάζουμε ένα διάνυσμα, $\mathbf{v}_2'$, κάθετο στο $\mathbf{v}_1$ (και στο $\hat{e}_1$), αφαιρώντας από το $\mathbf{v}_2$ τη συνιστώσα του την παράλληλη στο $\hat{e}_1$: $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \lambda\, \hat{e}_1$. Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο $\hat{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2'=0$, προκύπτει $\lambda=\hat{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2$. Άρα, $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\hat{e}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\, \hat{e}_1$ και $\hat{e}_2= \mathbf{v}_2'/|\mathbf{v}_2'|$.

Συνεχίζοντας ανάλογα, κατασκευάζουμε από το $\mathbf{v}_3$ το διάνυσμα $\mathbf{v}_3'$ το οποίο είναι κάθετο στα $\hat{e}_1$ και $\hat{e}_2$ αφαιρώντας τις συνιστώσες τού $\mathbf{v}_3$ τις παράλληλες στα $\hat{e}_1$ και $\hat{e}_2$: $\mathbf{v}_3'= \mathbf{v}_3-\lambda\hat{e}_1-\mu\hat{e}_2$. Τα λ και μ υπολογίζονται από τα εσωτερικά γινόμενα $\hat{e}_1 \cdot \mathbf{v}_3=0$ και $\hat{e}_2 \cdot \mathbf{v}_3=0$ ($\lambda=\hat{e}_1 \cdot \mathbf{v}_3$, $\mu=\hat{e}_2 \cdot \mathbf{v}_3$), και το $\hat{e}_3$ με κανονικοποίηση του $\mathbf{v}_3'$ (δηλ. με διαίρεση με το μέτρο του).

Η διαδικασία εφαρμόζεται ανάλογα και σε χώρους περισσότερων διαστάσεων.