Μιγαδική ανάλυση – Μέρος Β – Πρόχειρες σημειώσεις

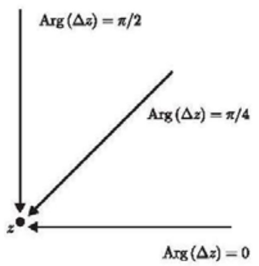
Παράγωγος συνάρτησης μιγαδικής μεταβλητής

Πριν ορίσουμε την παράγωγο μιας μιγαδικής συνάρτησης $f(z)$ θα σταθούμε στην συναφή με αυτή έννοια, της συνέχειας. Στους πραγματικούς αριθμούς μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 αν

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)\,. \qquad (1)$$

Προφανώς για να είναι μια συνάρτησης συνεχής θα πρέπει τα όρια από όλες τις δυνατές κατευθύνσεις από τις οποίες μπορεί να προσεγγιστεί το x_0, οι οποίες στην περίπτωση αυτή είναι δύο, να συμπίπτουν.

Στην περίπτωση των συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής όμως υπάρχουν άπειρες κατευθύνσεις από τις οποίες μπορεί να πλησιάσει κανείς ένα οποιοδήποτε σημείο z_0 (βλ., π.χ., Σχ. 1). Για να είναι μια μιγαδική συνάρτηση συνεχής θα πρέπει τα όρια που προκύπτουν από όλες αυτές τις δυνατές κατευθύνσεις να συμπίπτουν. Η συνθήκη αυτή, όπως μπορεί εύκολα να καταλάβει κανείς, είναι πολύ περισσότερο περιοριστική σε σχέση με την αντίστοιχη των πραγματικών συναρτήσεων.



Σχ. 1: Τρεις τρόποι προσέγγισης ενός τυχαίου σημείου z.

Ανάλογο ζήτημα έχουμε και στην παράγωγο μιγαδικής συνάρτησης, η οποία, σε αναλογία με τους πραγματικούς ορίζεται ως

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \quad z = x + iy\,. \qquad (2)$$

Για να υπάρχει η παράγωγος της $f(z)$ στο τυχαίο σημείο z θα πρέπει το παραπάνω όριο να υπάρχει και να είναι το ίδιο για όλες τις δυνατές (άπειρες σε πλήθος) κατευθύνσεις κατά τις οποίες μπορεί να προσεγγιστεί το σημείο z, δηλαδή για όλες τις δυνατές κατευθύνσεις κατά τις οποίες το Δz μπορεί να τείνει στο μηδέν. Η συνθήκη αυτή είναι ιδιαίτερα περιοριστική και επιβάλει αυστηρούς περιορισμούς στην κλάση των συναρτήσεων που έχουν παράγωγο – επηρεάζει δηλαδή τις ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών με πολύ δραστικό τρόπο. Ένα αποτέλεσμα είναι ότι στους μιγαδικούς αριθμούς αν μια συνάρτηση έχει παράγωγο πρώτης τάξης θα έχει παράγωγο κάθε τάξης, πράγμα το οποίο δεν ισχύει στους πραγματικούς.

Εφαρμογή: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της παραγώγου για να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη παντού η συνάρτηση $f(z)=z^2$, και αν ναι βρείτε την παράγωγό της.

Για συναρτήσεις, $f(z)$, $g(z)$ που είναι παραγωγίσιμες ως προς z ισχύουν οι γνωστοί από τις πραγματικές συναρτήσεις κανόνες παραγώγισης, δηλαδή

$$\frac{d}{dz}[f(z)+g(z)] = \frac{df(z)}{dz} + \frac{dg(z)}{dz}, \qquad \frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = \frac{df(z)}{dz}g(z) + f(z)\frac{dg(z)}{dz},$$

$$\frac{d}{dz}[f(z)/g(z)] = [\frac{df(z)}{dz}g(z) - f(z)\frac{dg(z)}{dz}]/[g(z)]^2, \text{ για } z \text{ ώστε } g(z)\neq 0, \qquad \frac{d}{dz}f(g(z)) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dz}.$$

Πολλές φορές οι μιγαδικές συναρτήσεις εκφράζονται όχι μέσω του μιγαδικού z, αλλά των x και y, με $z=x+iy$, οπότε η χρήση του ορισμού, Εξ. (2), για τον έλεγχο της παραγωγισιμότητας και την εύρεση της παραγώγου είναι ιδιαίτερα δυσχερής. Στις περιπτώσεις αυτές ο προσφορότερος τρόπος για έλεγχο της παραγωγισιμότητας μιας συνάρτησης και εύρεση της παραγώγου είναι η χρήση των συνθηκών Cauchy-Riemann (C-R), τις οποίες θα συζητήσουμε αμέσως παρακάτω.

Συνθήκες Cauchy-Riemann (C-R)

Έστω μια μιγαδική συνάρτηση f, της μορφής

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z = x+iy .$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό της παραγώγου για να ελέγξουμε την παραγωγισιμότητα της, f παίρνουμε

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x + i\Delta y}, \quad z = x+iy .$$

Για να υπάρχει η παράγωγος θα πρέπει το παραπάνω όριο να είναι το ίδιο για όλους τους δυνατούς τρόπους κατά τους οποίους το $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ τείνει στο μηδέν. Υπολογίζοντας το όριο αν Δz τείνει στο μηδέν κατά την κατεύθυνση του άξονα x, δηλαδή για $\Delta x\to 0$, $\Delta y=0$, βρίσκουμε

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y) + i[v(x+\Delta x, y) - v(x,y)]}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

Υπολογίζοντας το όριο αν Δz τείνει στο μηδέν κατά την κατεύθυνση του άξονα y, δηλαδή $\Delta x=0$, $\Delta y\to 0$, βρίσκουμε

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y) + i[v(x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{4}$$

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη τα δύο παραπάνω όρια θα πρέπει να είναι ίσα (τόσο τα πραγματικά όσο και τα φανταστικά μέρη τους), δηλαδή θα πρέπει να ισχύουν

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} . \tag{5}$$

Οι παραπάνω συνθήκες, (5), είναι γνωστές ως συνθήκες Cauchy-Riemann (C-R). Παρατηρήστε ότι οι συνθήκες αυτές είναι αναγκαίες για να είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη (με άλλα λόγια, αν δεν ισχύουν οι C-R η f δεν είναι παραγωγίσιμη), όχι όμως και ικανές (υπολογίστηκαν χρησιμοποιώντας δύο μόνο κατευθύνσεις κατά τις οποίες $\Delta z\to 0$). Μπορεί να αποδειχθεί ότι για να είναι η συνάρτηση παραγωγίσιμη θα πρέπει όχι μόνο να ισχύουν οι C-R αλλά και όλες οι μερικές παράγωγοι που εμπλέκονται σε αυτές να είναι συνεχείς συναρτήσεις των x και y. Άρα μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής κριτήριο για τον έλεγχο της παραγωγισιμότητας:

Μια συνάρτηση $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη ως προς $z=x+iy$ αν:

(α) ισχύουν οι συνθήκες C-R,

(β) οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις των x και y.

Η παράγωγός της f τότε δίνεται είτε από τον τύπο (3) είτε από τον (4) (τελευταία μέλη), δηλαδή

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (6)$$

Εφαρμογή: Χρησιμοποιήστε τις συνθήκες C-R για να εξετάσετε την παραγωγισιμότητα και να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(z)=e^z$.

Γενικά, μπορεί να αποδειχθεί (χρησιμοποιώντας είτε τον ορισμό είτε τις συνθήκες C-R) ότι αν μια συνάρτηση f περιέχει στη συναρτησιακή της έκφραση το z^* η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη ως προς z. Αν περιέχει μόνο το z, μπορεί να γραφεί δηλαδή στη μορφή $f=f(z)$, τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη αν είναι παραγωγίσιμη η αντίστοιχη πραγματική συνάρτηση $f(x)$. Η παραγώγιση της $f(z)$ τότε ακολουθεί τους κανόνες παραγώγισης που είναι γνωστοί από τις πραγματικές συναρτήσεις. Το γεγονός αυτό προσφέρει έναν επιπλέον τρόπο/κριτήριο για να εξετάσει κανείς αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και να βρει την παράγωγό της.

Εφαρμογή: Χρησιμοποιήστε τις συνθήκες C-R για να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(z)=x+2ixy$ δεν είναι παραγωγίσμη. Κατόπιν εκφράστε την $f(z)$ μέσω των z και z^* (λαμβάνοντας υπόψη ότι $x=(z+z^*)/2$, $y=(z-z^*)/2i$) και χρησιμοποιήστε το κριτήριο της προηγούμενης παραγράφου για να αποφανθείτε για την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης.

Αναφέραμε παραπάνω ότι αν μια συνάρτηση $f(z)$ γράφεται ως συνάρτηση μόνο του z (και όχι του z^*) και είναι παραγωγίσιμη, τότε ισχύουν για αυτήν οι κανόνες παραγώγιστης των πραγματικών συναρτήσεων. Μπορεί να αποδειχθεί δηλαδή ότι

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z, \qquad \frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1},\ n \text{ ακέραιος}, \qquad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z, \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z.$$

Εφαρμογή: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της παραγώγου για να ελέγξετε την παραγωγισιμότητα και να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων $f(z)=z^n$ (n θετικός ακέραιος) και $g(z)=1/z$.

Αναλυτικές συναρτήσεις και ανώμαλα σημεία συναρτήσεων

Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι μονότιμη και παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου, τότε η συνάρτηση λέγεται *αναλυτική* στην περιοχή αυτή. Αν η f είναι αναλυτική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο τότε ονομάζεται *ακεραία* (entire).

Τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f είναι αναλυτική ονομάζονται *ομαλά σημεία* της f, ενώ εκείνα στα οποία η f δεν είναι αναλυτική λέγονται *ανώμαλα σημεία*. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(z)=1/z$

είναι αναλυτική παντού εκτός από το σημείο $z_0=0$, το οποίο είναι το μοναδικό ανώμαλο σημείο της συνάρτησης.

Τα ανώμαλα σημεία μιας συνάρτησης $f(z)$ μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε σημεία:

(i) *απομονωμένης ανωμαλίας*˙ ένα σημείο z_0 είναι σημείο απομονωμένης ανωμαλίας της f - και λέμε ότι η f έχει απομονωμένη ανωμαλία στο z_0 - όταν για όλα τα άλλα σημεία στην γειτονιά του z_0 η συνάρτηση είναι αναλυτική), π.χ. το $z_0=0$ είναι σημείο απομονωμένης ανωμαλίας της $f(z)=1/z$˙

(ii) *μη απομονωμένης ανωμαλίας* (αν δεν είναι απομονωμένη). Τυπικό παράδειγμα μη απομονωμένης ανωμαλίας είναι η τομή μιγαδικής συνάρτησης, στην οποία η συνάρτηση δεν είναι μονότιμη.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι συνήθεις συναρτήσεις (πολυωνυμικές, εκθετικές, τριγωνομετρικές και υπερβολικές) είναι αναλυτικές παντού, εκτός από τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής τους.

Τα απομονωμένα ανώμαλα σημεία μπορούν να διακριθούν σε τρεις περεταίρω κατηγορίες:

(α) πόλους,

(β) σημεία ουσιώδους ανωμαλίας,

(γ) σημεία αιρόμενης ανωμαλίας

Ένα απομονωμένο ανώμαλο σημείο z_0 λέγεται *πόλος* μιας συνάρτησης $f(z)$ αν η συνάρτηση μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^k}, \text{ όπου } g(z) \text{ αναλυτική στο } z_0 \text{ και } k \text{ θετικός ακέραιος.}$$

Ο k τότε ονομάζεται *τάξη του πόλου*. Ένας ισοδύναμος ορισμός για τον πόλο είναι ο εξής: Το z_0 λέγεται πόλος τάξης k της $f(z)$ αν

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)^k]=\text{πεπερασμένο.}\neq 0\,.$$

Π.χ. η $f(z)=1/(z-i)^2$ έχει πόλο τάξης 2 στο i. Η $f(z)=1/[(z-1)^2(z+i)]$ έχει δύο πόλους: το 1, το οποίο είναι πόλος τάξης 2, και το $-i$ το οποίο είναι πόλος τάξης 1.

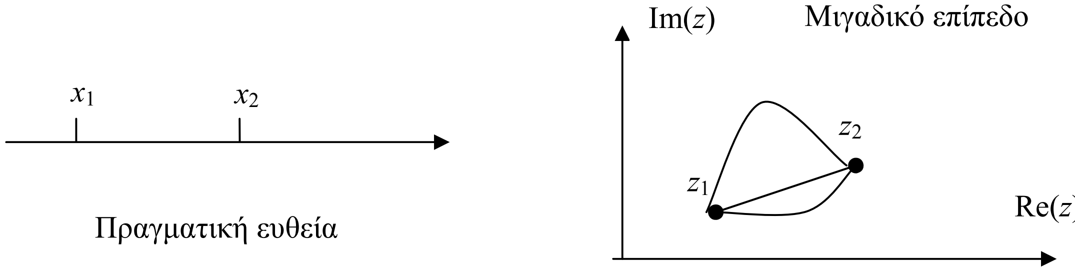
Οι πόλοι παίζουν καίριο ρόλο στον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας μιγαδικής συνάρτησης, όπως θα συζητηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Ένα απομονωμένο ανώμαλο σημείο z_0 λέγεται σημείο *ουσιώδους ανωμαλίας* αν δεν υπάρχει ακέραιος k ώστε $\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)^k]=\text{πεπερασμένο}$. Π.χ. το $z_0=0$ είναι σημείο ουσιώδους ανωμαλίας της συνάρτησης $f(z)=e^{1/z}$.

Ένα σημείο z_0 λέγεται σημείο *αιρόμενης ανωμαλίας* αν η ανωμαλία αίρεται παίρνοντας το όριο $\lim_{z\to z_0} f(z)$. Π.χ. η συνάρτηση $f(z)=\sin(z)/z$ έχει αιρόμενη ανωμαλία στο $z_0=0$.

Ολοκλήρωμα συνάρτησης μιγαδικής μεταβλητής

Τα ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων ορίζονται ανάλογα με εκείνα των πραγματικών συναρτήσεων. Η διαφορά εδώ είναι ότι παράλληλα με τα όρια της ολοκλήρωσης θα πρέπει να δίδεται επίσης και ο δρόμος ολοκλήρωσης, καθότι στο επίπεδο των μιγαδικών ο δρόμος που ενώνει δύο σημεία z_1 και z_2 δεν είναι μοναδικός (βλ. Σχ. 2).



Σχ. 2: Στην ευθεία των πραγματικών (αριστερό σχήμα) υπάρχει ένας και μοναδικός δρόμος για να φτάσεις από το σημείο x_1 στο x_2. Στο επίπεδο των μιγαδικών (δεξιό σχήμα) υπάρχουν άπειροι δρόμοι για να φτάσεις από το σημείο z_1 στο z_2.

Εν γένει, ένα μιγαδικό ολοκλήρωμα θα είναι της μορφής

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz,\ dz = dx + idy\,.$$

Αν ο δρόμος ολοκλήρωσης, έστω c, μπορεί να εκφραστεί μέσω μιας μοναδικής πραγματικής παραμέτρου, t, δηλαδή για τα z που βρίσκονται πάνω στο δρόμο c ισχύει z=$z(t)$=$x(t)$+$iy(t)$, το ολοκλήρωμα μπορεί να εκφραστεί μέσω του t και να υπολογιστεί με μεθόδους γνωστές από τη θεωρία των πραγματικών ολοκληρωμάτων. Θα είναι δηλαδή

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))\frac{dz}{dt}dt\,.$$

Σε πολλές περιπτώσεις αυτή η μοναδική παράμετρος t μπορεί να ταυτίζεται με κάποια από τις συντεταγμένες του z (καρτεσιανές ή πολικές), όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(z)$=z. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμά της στην περίπτωση που δρόμος ολοκλήρωσης είναι: (α) το ημικύκλιο κέντρου μηδέν και ακτίνας 2, (β) το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία z_1=0 και z_2=2+2i.

Στην περίπτωση (α) βολεύει να χρησιμοποιήσει κανείς πολικές συντεταγμένες, $z = \rho e^{i\theta}$, καθώς στις συντεταγμένες αυτές ο δρόμος ολοκλήρωσης μπορεί να εκφραστεί μέσω μόνο της μεταβλητής θ. Το z δηλαδή πάνω στο δρόμο ολοκλήρωσης θα γράφεται $z = \rho e^{i\theta}$, με ρ=σταθ.=2, δηλαδή

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_0^{\pi} \rho e^{i\theta} d(\rho e^{i\theta}) = \rho^2 i \int_0^{\pi} e^{i2\theta} d\theta = 0\,,\quad \rho=2.$$

Στην περίπτωση (β) ο δρόμος ολοκλήρωσης μπορεί να εκφραστεί μέσω μόνο της παραμέτρου x (ή y), καθώς πάνω στο δρόμο y=x. Το ολοκλήρωμα δηλαδή θα πάρει τη μορφή

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_0^2 (x+ix)d(x+ix) = (1+i)^2 \int_0^2 xdx = (1+i)^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 2(1+i)^2\,.$$

Από το παραπάνω παράδειγμα μπορεί εύκολα να διαπιστώσει κανείς ότι $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = -\int_{z_2}^{z_1} f(z)dz$.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(z)=1/z$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμά της στην περίπτωση που δρόμος ολοκλήρωσης, c, είναι ο κύκλος κέντρου μηδέν και ακτίνας R.

Χρησιμοποιώντας τη διαδικασία του προηγούμενου παραδείγματος, περίπτωση (α), μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι

$$\oint_c f(z)dz = \oint_c \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{i\theta}} d(Re^{i\theta}) = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i\,.$$

Το σύμβολο $\oint$ δηλώνει ολοκλήρωση σε κλειστό δρόμο ο οποίος διατρέχεται κατά τη θετική φορά (Θετική φορά, κατά σύμβαση, θεωρείται η φορά η αντίθετη των δεικτών ρολογιού.) Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της ακτίνας του δρόμου. Παρατηρήστε επίσης ότι αν διατρέξουμε το δρόμο κατά την αντίθετη φορά το ολοκλήρωμα αλλάζει πρόσημο.

Τα ολοκληρώματα στα παραπάνω παραδείγματα υπολογίστηκαν εύκολα με αλλαγή μεταβλητής και αναγωγή σε πραγματικά ολοκληρώματα. Σε περιπτώσεις πιο σύνθετων ολοκληρωμάτων όμως (όπου είτε η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι πιο σύνθετη είτε ο δρόμος ολοκλήρωσης δεν είναι απλή καμπύλη), η παραπάνω διαδικασία δεν είναι εύκολη στην εφαρμογή της ή μπορεί να οδηγεί σε σύνθετα πραγματικά ολοκληρώματα.

Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε ορισμένα βασικά θεωρήματα της μιγαδικής ανάλυσης που μας βοηθούν να αποφεύγουμε την παραπάνω διαδικασία και κάνουν τον υπολογισμό μιγαδικών ολοκληρωμάτων σε κλειστούς δρόμους εξαιρετικά απλό. Τα θεωρήματα αυτά συνιστούν τα θεμέλια του κλάδου της μιγαδικής ολοκλήρωσης, γνωστής ως Λογισμός των Υπολοίπων.

Βασικά θεωρήματα Λογισμού των Υπολοίπων

Θεώρημα Cauchy: Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική μέσα και πάνω στον κλειστό δρόμο c, τότε

$$\oint_c f(z)dz = 0\,. \qquad (7)$$

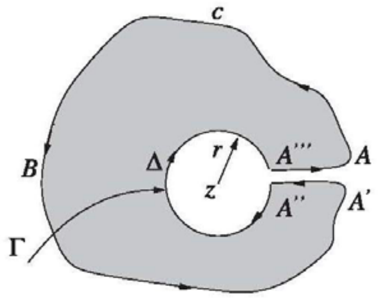
Αν ο δρόμος δεν είναι κλειστός τότε το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα του δρόμου και είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.

Το θεώρημα του Cauchy μπορεί να χρησιμοποιηθεί όχι μόνο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων που είναι αναλυτικές παντού μέσα σε μια περιοχή, αλλά και για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων με πεπερασμένους πόλους στη περιοχή αυτή. Στη δεύτερη περίπτωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να απλοποιήσει σημαντικά το δρόμο ολοκλήρωσης, μέσω μιας διαδικασίας γνωστής ως παραμόρφωση του δρόμου ολοκλήρωσης, την οποία περιγράφουμε αμέσως παρακάτω.

Παραμόρφωση δρόμου ολοκλήρωσης: Έστω μια συνάρτηση $f(z)$ αναλυτική μέσα και πάνω στον κλειστό δρόμο c του Σχήματος 3, εκτός από το σημείο z στο οποίο η συνάρτηση έχει πόλο. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Cauchy μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα της f πάνω στον c ισούται με το ολοκλήρωμά της πάνω στον κύκλο Γ με κέντρο τον πόλο z. Για να το δείξουμε αυτό παραμορφώνουμε το δρόμο ολοκλήρωσης όπως φαίνεται στο Σχ. 3, πηγαίνοντας από τον αρχικό κλειστό δρόμο c: Α΄ΑΒΑ΄ στον πιο σύνθετο κλειστό δρόμο c': Α΄Α΄΄ΔΑ΄΄΄ΑΒΑ΄ ο οποίος περικλείει τη γραμμοσκιασμένη περιοχή. Σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy το ολοκλήρωμα της f στον c' είναι μηδέν, αφού η συνάρτηση δεν έχει πόλους στην περιοχή ολοκλήρωσης. Όμως

$$\oint_{c'} f(z)dz = \oint_{c} f(z)dz + \int_{A'}^{A''} f(z)dz - \oint_{\Gamma} f(z)dz + \int_{A'''}^{A} f(z)dz = 0.$$

Στο όριο που τα ευθύγραμμα τμήματα Α΄Α΄΄ και Α΄΄΄Α συμπίπτουν, η παραπάνω σχέση οδηγεί στην $\oint_{c} f(z)dz = \oint_{\Gamma} f(z)dz$. Έτσι το ολοκλήρωμα της f στη σύνθετη καμπύλη c ανάγεται σε ολοκλήρωμα πάνω σε μια πολύ απλούστερη καμπύλη, τον κύκλο Γ. Στην περίπτωση που η ακτίνα του κύκλου Γ τείνει στο μηδέν το ολοκλήρωμα της f πάνω στον Γ διαιρεμένο με $2\pi i$ τείνει σε έναν αριθμό που ονομάζεται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f πάνω στον πόλο z.



Σχ. 3: Με παραμόρφωση του δρόμου ολοκλήρωσης (ο κλειστός δρόμος c: Α΄ΒΑΑ΄ παραμορφώνεται στο δρόμο c': Α΄Α΄΄ΔΑ΄΄΄ΑΒΑ΄) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Cauchy μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f πάνω στην κλειστή καμπύλη c, μέσα στην οποία η f έχει πόλο στο z ισούται με το ολοκλήρωμα της f πάνω στον κύκλο Γ. Το ολοκλήρωμα αυτό, στο όριο που $r \to 0$ ισούται με $2\pi i$ επί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f.

Δηλαδή το *ολοκληρωτικό υπόλοιπο* μιας συνάρτησης $f(z)$ πάνω σε έναν πόλο z_0, το οποίο συμβολίζεται με $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$, ορίζεται ως

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} f(z)dz \,, \qquad (8)$$

όπου το γ είναι κύκλος απειροστά μικρής ακτίνας με κέντρο το z_0.

Σύμφωνα με τα παραπάνω (βλ. επίσης Σχ. 3) το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη, c, στην οποία η συνάρτηση έχει έναν πόλο, έστω στο z_0, ισούται με $2\pi i$ επί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης πάνω στον πόλο. Ισχύει δηλαδή ότι

$$\oint_{c} f(z)dz \equiv 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \,. \qquad (9)$$

Το ολοκληρωτικό αυτό υπόλοιπο στην περίπτωση απλού πόλου μπορεί να υπολογιστεί εύκολα χρησιμοποιώντας το παρακάτω θεώρημα/τύπο, γνωστό ως ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy.

Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy: Έστω η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{g(z)}{z - z_0}$ με $g(z)$ αναλυτική μέσα και πάνω σε κλειστό δρόμο c ο οποίος περικλείει το σημείο z_0. Τότε

$$\oint_{c} \frac{g(z)}{z - z_0}dz = 2\pi i g(z_0) \,. \qquad (10)$$

Ο τύπος του Cauchy μας βοηθάει να υπολογίσουμε ολοκληρώματα συναρτήσεων με έναν απλό πόλο στην περιοχή ολοκλήρωσης. Πράγματι, η $f(z)=\dfrac{g(z)}{z-z_0}$ έχει απλό πόλο στο σημείο z_0. Εκφράζοντας τον τύπο του Cauchy μέσω της f, παίρνουμε

$$\oint_c f(z)dz=\oint_c \frac{g(z)}{z-z_0}dz=2\pi i g(z_0)=2\pi i\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)]. \qquad (11)$$

Αντιπαραβάλλοντας τους τύπους (9) και (11), μπορεί κανείς να δει εύκολα ότι στην περίπτωση απλού πόλου (πόλου τάξης 1) ισχύει

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)]. \qquad (12)$$

Ο τύπος (12) δίνει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού του ολοκληρωτικού υπολοίπου συνάρτησης σε πόλο πρώτης τάξης, άρα και του ολοκληρώματος συνάρτησης σε κλειστή διαδρομή που περικλείει τον πόλο.

Εφαρμογή: Υπολογίστε χρησιμοποιώντας τα παραπάνω θεωρήματα το ολοκλήρωμα της $f(z)=e^z/z$ κατά μήκος κλειστής διαδρομής που (α) περικλείει το μηδέν, (β) δεν περικλείει το μηδέν.

Αναδιατάσσοντας τον τύπο του Cauchy ως

$$g(w)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{g(z)}{z-w}dz$$

και παραγωγίζοντας ως προς w παίρνουμε

$$\frac{dg(w)}{dw}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{d}{dw}\frac{g(z)}{z-w}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_c dz g(z)\frac{d}{dw}\frac{1}{z-w}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{g(z)}{(z-w)^2}dz .$$

Παραγωγίζοντας n φορές καταλήγουμε στον *τύπο της παραγώγου του Cauchy*

$$g^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz . \qquad (13)$$

Ο τύπος αυτός μας βοηθάει να υπολογίσουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο συνάρτησης σε πόλο οποιαδήποτε τάξης μέσα στην περιοχή ολοκλήρωσης. Πράγματι, έστω η συνάρτηση f με πόλο n τάξης στο σημείο z_0. Η συνάρτηση τότε θα γράφεται

$$f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^n},$$

όπου η $g(z)$ είναι αναλυτική στο z_0 και γύρω από αυτό. Τότε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης σε κύκλο γ απειροστής ακτίνας με κέντρο το z_0 (που είναι εξ ορισμού ίσο με $2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$) θα γράφεται

$$\oint_\gamma f(z)dz\equiv 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}g^{(n-1)}(z_0)=\frac{2\pi i}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[f(z)(z-z_0)^n], \quad (14)$$

άρα το ολοκληρωτικό υπόλοιπο σε πόλο τάξης n θα δίδεται από τον τύπο

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z)(z-z_0)^n]. \qquad (15)$$

Για n=1 ο τύπος (15) καταλήγει στον (12).

Έχοντας υπολογίσει το ολοκληρωτικό υπόλοιπο συνάρτησης σε πόλο τυχαίας τάξης, μπορούμε να προχωρήσουμε στο θεώρημα των υπολοίπων, το οποίο αποτελεί γενίκευση του τύπου (9) και είναι το επιστέγασμα του λογισμού των Υπολοίπων.

Θεώρημα Υπολοίπων: Έστω μια συνάρτηση f αναλυτική μέσα και πάνω σε κλειστό δρόμο c, εκτός από πεπερασμένο αριθμό πόλων στα σημεία z_k, k=1,2…n, που περικλείονται από τον δρόμο (και δεν είναι πάνω στον c). Τότε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης f πάνω στον δρόμο c θα δίνεται από τον τύπο

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \ . \qquad (16)$$

Τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα στον τύπο (16) υπολογίζονται μέσω της σχέσης (15). (*Προσοχή:* Μόνο οι πόλοι που βρίσκονται μέσα στην περιοχή ολοκλήρωσης συνεισφέρουν στο ολοκλήρωμα του τύπου (16).)

Εφαρμογή: Χρησιμοποιήστε το λογισμό των υπολοίπων για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα των παρακάτω συναρτήσεων, όταν ο δρόμος ολοκλήρωσης, c, είναι ο κύκλος κέντρου μηδέν και ακτίνας 3.

$$\frac{e^z}{(z-1)(z-i)^2}, \quad \frac{z}{(z-i)^2(z-4)}, \quad \frac{z^2}{(z^2+1)}, \quad \frac{e^{iz}}{(z^2+4)}.$$

Υπολογισμός πραγματικών ολοκληρωμάτων με μιγαδική ολοκλήρωση

Τα παραπάνω θεωρήματα κάνουν τον υπολογισμό μιγαδικών ολοκληρωμάτων σε κλειστούς δρόμους πρόβλημα σχετικά τετριμμένο. Η πραγματική δύναμη όμως του λογισμού των υπολοίπων έγκειται όχι μόνο στο ότι προσφέρει έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού μιγαδικών ολοκληρωμάτων αλλά και στο ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό κάποιων πραγματικών ολοκληρωμάτων ο οποίος είναι πολύ δύσκολο (και σε ορισμένες περιπτώσεις αδύνατον) να γίνει με άλλες μεθόδους.

Κατηγορίες πραγματικών ολοκληρωμάτων που υπολογίζονται εύκολα μέσω του λογισμού των υπολοίπων είναι οι εξής:

Α. Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων, της μορφής

$\int_0^{2\pi} F(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$, F ρητή συνάρτηση.

Β. Ολοκληρώματα με άπειρα όρια, της μορφής

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} R(x)dx$, όπου α πραγματικός αριθμός και $R(x)$ ρητή συνάρτηση του x.

Στη συνέχεια θα αναπτύξουμε τον τρόπο υπολογισμού των παραπάνω κατηγοριών ολοκληρωμάτων.

Α. Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων της μορφής $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$.

Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int_0^{2\pi} F(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$, όπου η F είναι ρητή συνάρτηση του ημιτόνου ή/και του συνημιτόνου αντιμετωπίζονται με της εξής αλλαγή μεταβλητής: $\theta \rightarrow z=e^{i\theta}$. Τότε, $\cos\theta=(z+1/z)/2,\ \sin\theta=(z-1/z)/2i$ (αποδεικνύονται εύκολα χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler), $dz=izd\theta$, και ο δρόμος ολοκλήρωσης γίνεται ο κύκλος κέντρου μηδέν και ακτίνας 1 (μοναδιαίος κύκλος). Το ολοκλήρωμα έτσι μετατρέπεται σε ένα μιγαδικό ολοκλήρωμα σε κλειστό δρόμο, το οποίο υπολογίζεται εύκολα με το θεώρημα των Υπολοίπων.

Εφαρμογή: Χρησιμοποιήστε μιγαδική ολοκλήρωση για να υπολογίσετε τα εξής ολοκληρώματα:

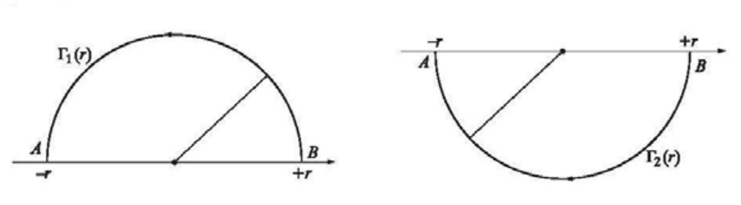
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\sin\theta}d\theta,\quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5-4\cos\theta}d\theta.$$

Β. Ολοκληρώματα με άπειρα όρια

Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, ο λογισμός των υπολοίπων χρησιμοποιείται με επιτυχία στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων με άπειρα όρια, της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}R(x)dx$, όπου η R είναι ρητή συνάρτηση του x και ο a πραγματικός αριθμός. Προτού αναφέρουμε τη συγκεκριμένη μορφή της συνάρτησης R και τον τρόπο υπολογισμού των ολοκληρωμάτων αυτών χρειάζεται να γίνουν κατανοητά τα εξής:

Για μια τυχαία συνάρτηση $f(x)$ ισχύουν:

i) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{+r} f(x)dx$.



Σχ. 4: Κλειστοί δρόμοι ολοκλήρωσης που χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό πραγματικών ολοκληρωμάτων με άπειρα όρια.

ii) Αν επεκτείνουμε τη συνάρτηση $f(x)$ στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή $x\rightarrow z$, $f(x)\rightarrow f(z)$, και θεωρήσουμε τον κλειστό δρόμο (έστω c) του Σχήματος 4, ο οποίος συνίσταται από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (ή $(-r, +r)$) και την ημιπεριφέρεια Γ_1(r), τότε

$$\oint_c f(z)dz = \int_{-r}^{r} f(z)dz + \int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{\Gamma_1} f(z)dz. \qquad (17)$$

(Το δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη ότι πάνω στον πραγματικό άξονα, όπου y=0, ισχύει $z=x+iy=x$ και $dz=dx$.) Αν το ολοκλήρωμα πάνω στην ημιπεριφέρεια $\Gamma_1(r)$ μηδενίζεται στο όριο που r τείνει στο άπειρο, τότε στο όριο αυτό $\oint_c f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Δηλαδή το πραγματικό ολοκλήρωμα που ζητάμε ισούται με το αντίστοιχο μιγαδικό ολοκλήρωμα στην κλειστή καμπύλη c με ακτίνα που τείνει στο άπειρο, το οποίο υπολογίζεται εύκολα με το θεώρημα των Υπολοίπων.

Για συναρτήσεις της μορφής $f(z)=e^{iaz}R(z)$ τις συνθήκες για να μηδενίζεται το ολοκλήρωμα πάνω σε ημιπεριφέρειες άπειρης ακτίνας όπως οι Γ_1 και Γ_2 του Σχ. 4 μας τις δίνει το λήμμα Jordan:

Λήμμα Jordan. Έστω η ρητή συνάρτηση $R(z)$ η οποία είναι αναλυτική παντού εκτός από πεπερασμένο αριθμό πόλων. Τότε:

1. Αν $|zR(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$ τότε $\int_\Gamma R(z)dz \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$, όπου Γ είναι είτε το άνω είτε το κάτω ημικύκλιο του Σχ. 4.
2. Αν $|R(z)| \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$ τότε $\int_\Gamma e^{iaz}R(z)dz \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$, όπου Γ είναι το άνω ημικύκλιο του Σχ. 4 (Γ_1) αν $a>0$ και το κάτω ημικύκλιο (Γ_2) αν $a<0$.

Έτσι, για ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}R(x)dx$ η διαδικασία υπολογισμού μπορεί να συνοψιστεί στα εξής βήματα:

1. Επεκτείνουμε τη συνάρτηση $e^{iax}R(x)$ στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή θεωρούμε τη συνάρτηση $e^{iaz}R(z)$.
2. Εξετάζουμε αν και για ποιο ημικύκλιο ισχύουν οι προϋποθέσεις του λήμματος Jordan («κατάλληλο» ημικύκλιο).
3. Κατασκευάζουμε τον κλειστό δρόμο ολοκλήρωσης, c, που συνίσταται από τον πραγματικό άξονα και το κατάλληλο ημικύκλιο. Τότε, στο όριο που η ακτίνα του ημικυκλίου τείνει στο άπειρο θα ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax}R(x)dx = \oint_c e^{iaz}R(z)dz . \qquad (18)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης σε κλειστό δρόμο, το οποίο μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με χρήση του θεωρήματος των Υπολοίπων.

Εφαρμογή: Χρησιμοποιήστε μιγαδική ολοκλήρωση για να υπολογίσετε τα εξής ολοκληρώματα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+4}dx \ , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+4}dx , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4}dx , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix}}{x^2+4}dx .$$

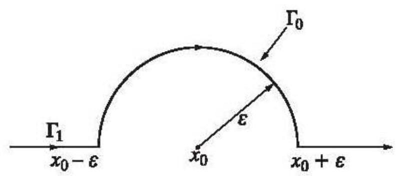
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\cos(x)=\mathrm{Re}(e^{ix})$.

Ειδική περίπτωση: *Ολοκληρώματα με πόλους στον πραγματικό άξονα*

Έστω μια συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η μιγαδική επέκταση, $f(z)$, ικανοποιεί τις συνθήκες του λήμματος Jordan, η συνάρτηση όμως έχει πόλο, έστω z_0, πάνω στον πραγματικό άξονα. Τότε το ολοκλήρωμα, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, το οποίο εν γένει δεν ορίζεται (είναι απροσδιόριστη μορφή), ορίζεται μέσω του ορίου $\lim_{\varepsilon\to 0}[\int_{-\infty}^{z_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{z_0+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx]$. Το όριο αυτό ονομάζεται *κύρια τιμή (principal value) του ολοκληρώματος* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ και συμβολίζεται με το κεφαλαίο γράμμα P, δηλαδή

$$P\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right] \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}[\int_{-\infty}^{z_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{z_0+\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx]. \qquad (19)$$

Για τον υπολογισμό της κύριας τιμής ολοκληρώματος συνάρτησης που έχει πόλο στον πραγματικό άξονα και ικανοποιεί τις συνθήκες του λήμματος Jordan ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράφηκε νωρίτερα, ο δρόμος ολοκλήρωσης όμως περιέχει μία ακόμα παραμόρφωση, ένα ημικύκλιο ακτίνας ε το οποίο παρακάμπτει τον πόλο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5 (βλ. ημικύκλιο Γ_0).



Σχ. 5: Παράκαμψη (Γ_0: ημικύκλιο ακτίνας ε) η οποία χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της κύριας τιμής ολοκληρώματος όταν η συνάρτηση έχει πόλο στον πραγματικό άξονα, στο σημείο $z_0=x_0$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\oint_c f(z)dz = P\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right] + \int_{\Gamma_0} f(z)dz, \qquad (20)$$

(έχουμε παραλείψει το ολοκλήρωμα στο ημικύκλιο άπειρης ακτίνας, το οποίο σύμφωνα με το Λήμμα Jordan είναι μηδέν). Το ολοκλήρωμα στο μικρό ημικύκλιο Γ_0 είναι ίσο με $-\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$ (μπορεί να αποδειχθεί εύκολα μετατρέποντάς το σε ολοκλήρωμα ως προς τη γωνία θ, όπου θ το όρισμα του z – πάνω στο ημικύκλιο $z=\varepsilon e^{i\theta}$ - όπως περιγράφηκε στα παραδείγματα στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου). Άρα

$$P\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right] = \oint_c f(z)dz + \pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z). \qquad (21)$$

Το ολοκλήρωμα πάνω στον κλειστό δρόμο c υπολογίζεται εύκολα με το θεώρημα των υπολοίπων. Αν η συνάρτηση f δεν έχει πόλους μέσα στο δρόμο ολοκλήρωσης τότε το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με μηδέν, σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy, και η κύρια τιμή του αρχικού μας ολοκληρώματος ισούται με $\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$.

Σημειώστε ότι στο Σχ. 5 μπορείτε να παρακάμψετε τον πόλο είτε με το πάνω είτε με το κάτω ημικύκλιο απειροστής ακτίνας με κέντρο τον πόλο. Το αποτέλεσμα όσον αφορά την κύρια τιμή θα πρέπει να είναι το ίδιο και στις δύο περιπτώσεις.

Εφαρμογή: Υπολογίστε την κύρια τιμή των ολοκληρωμάτων από -∞ σε +∞ των εξής συναρτήσεων:

$$f(x)=\frac{1}{x^2},\quad f(x)=\frac{e^{ix}}{x-1}.$$

Μιγαδικές σειρές

Έστω μια συνάρτηση $f(z)$ αναλυτική σε μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου που περιέχει ένα σημείο z_0. Τότε για κάθε σημείο z της περιοχής αυτής η συνάρτηση μπορεί να γραφεί σε μορφή άπειρης δυναμοσειράς με κέντρο το z_0, ως εξής:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n. \qquad (22)$$

Οι συντελεστές a_n, οι οποίοι εξαρτώνται από το σημείο z_0, έχουν τη μορφή

$$a_n = a_n(z_0)=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad (23)$$

όπου το σύμβολο $f^{(n)}(z_0)$ συμβολίζει την παράγωγο τάξης n της f στο σημείο z_0. Η σειρά (22) με συντελεστές a_n οι οποίοι δίνονται από τη σχέση (23) ονομάζεται *ανάπτυγμα Taylor* της συνάρτησης $f(z)$ γύρω από το σημείο z_0.

Η σειρά η οποία αποτελεί το ανάπτυγμα Taylor μιας συνάρτησης γύρω από ένα σημείο z_0 είναι μοναδική και συγκλίνει στη συνάρτηση (ισούται με τη συνάρτηση ή αναπαριστά τη συνάρτηση) $f(z)$ για όλα τα z τα οποία απέχουν από το z_0 λιγότερο από όσο απέχει από το z_0 το κοντινότερό του ανώμαλο σημείο της f. Η απόσταση του z_0 από το κοντινότερό του ανώμαλο σημείο ονομάζεται ακτίνα σύγκλισης της σειράς.

Παρατηρήστε ότι για τα z που βρίσκονται πολύ κοντά στο z_0 αρκούν μόνο οι 2-3 πρώτοι όροι της σειράς Taylor για να προσεγγίσουν τη συνάρτηση, αφού όροι της μορφής $(z-z_0)^n$ γίνονται ολοένα και μικρότεροι καθώς αυξάνεται το n. Έτσι η σειρά Taylor στην οποία κρατούνται μόνο οι λίγοι πρώτοι όροι μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μια ικανοποιητική και πρόσφορη για ανάλυση προσέγγιση της συνάρτησης.

Εφαρμογή: Υπολογίστε τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor των συναρτήσεων e^{iz} και $\cos(z)$ γύρω από το $z_0=0$.

Μελετώντας αναπτύγματα συναρτήσεων γύρω από ομαλά σημεία, τίθεται εύλογα το ερώτημα: Τι γίνεται αν το σημείο z_0 δεν είναι ομαλό σημείο αλλά ανώμαλο σημείο της $f(z)$ (π.χ. πόλος); Μπορεί και πάλι η $f(z)$ γραφεί σε μορφή δυναμοσειράς γύρω από το z_0; Η απάντηση είναι ναι, και μπορεί να διαπιστωθεί, π.χ., για τη συνάρτηση $f(z)=e^z/z$ αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor τον αριθμητή και πολλαπλασιάζοντας με $1/z$. Η διαφορά εδώ είναι ότι η σειρά περιέχει και αρνητικές δυνάμεις του z. Τέτοιες σειρές που αποτελούν αναπτύγματα συναρτήσεων γύρω από ανώμαλα σημεία και περιέχουν και αρνητικές δυνάμεις ονομάζονται *σειρές Laurent*. Οι σειρές Laurent δηλαδή είναι εν γένει σειρές της μορφής

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad (24)$$

όπου το z_0 είναι πόλος της συνάρτησης $f(z)$.

Για να προσδιορίσει κανείς τους συντελεστές του αναπτύγματος Laurent μιας συνάρτησης αρκεί να θεωρήσει τον τύπο (23) για τους συντελεστές Taylor, συνδυασμένο με τον τύπο της παραγώγου του Cauchy (εξ. (13)),

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \qquad (25)$$

παίρνοντας

$$a_n = a_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \qquad (26)$$

Η σχέση (26), όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σε κλειστό δρόμο που περικλείει το σημείο z_0 (αλλά όχι άλλο ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f), ισχύει τόσο για θετικές όσο και για αρνητικές τιμές του n, και δίνει έναν ενιαίο τύπο για την αναπαράσταση των συντελεστών του αναπτύγματος τόσο Taylor όσο και Laurent.

Παρατηρήστε ότι ο όρος a_{-1} του αναπτύγματος Laurent ισούται με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης γύρω από τον πόλο διαιρεμένο με $2\pi i$, το οποίο εξ ορισμού είναι ίσο με το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0, δηλαδή

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) dz = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z). \qquad (27)$$

Η σχέση (27), δηλ. $a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$, χρησιμοποιείται ως ένας άλλος, ισοδύναμος ορισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου.

Εφαρμογή: Υπολογίστε τους τέσσερις πρώτους όρους του αναπτύγματος Laurent των συναρτήσεων e^{iz}/z^2, και e^{2iz}/z γύρω από το $z_0=0$.

Αν και η σχέση (26) αποτελεί μια κομψή και ενιαία αναπαράσταση των συντελεστών των σειρών Taylor και Laurent, τις περισσότερες φορές δεν χρησιμοποιείται στην πράξη. Στην πράξη, για την ανάπτυξη μιας συνάρτησης $f(z)$ σε σειρά Laurent γύρω από ένα σημείο z_0 στο οποίο η συνάρτηση έχει πόλο τάξης n, γράφουμε τη συνάρτηση στη μορφή $f(z) = g(z)/(z - z_0)^n$, όπου η $g(z)$ είναι αναλυτική στο z_0, και αναπτύσσουμε κατά Taylor την $g(z)$ (χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (22) και (23)). Η σειρά Laurent της $f(z)$ προκύπτει εύκολα πολλαπλασιάζοντας τη σειρά Taylor της $g(z)$ με $1/(z-z_0)^n$.