Εισαγωγή στη Θεωρία Σφαλμάτων

Ζαχαρίας Γ. Φθενάκης

Τμήμα Διατροφής και Διαιτολογίας

Τ.Ε.Ι. Κρήτης

.

δοςυμεντ ςρεατεδ ον: 5 Νοεμβρίου 2008
ςρεατεδ φρομ φιλε:
ςοερ παγε αυτοματιςαλλψ ςρεατεδ ωιτη
(ααιλαβλε ατ ψουρ φαουριτε ῾ΤΑΝ μιρρορ)

Λ-Ο-Γ-Ο

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Ζαχαρίας Γ. Φθενάκης

2008

Περιεχόμενα

Σχήμα 1: Ο εκτροχιασμός του τραίνου στο σταθμό Montparnasse του Παρισίου, το 1895. Από το εξώφυλλο του βιβλίου του John R. Taylor, An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurments, University Science Books, 1996

Κεφάλαιο 1

Μετρήσεις και σφάλματα

Knowledge rests not upon truth alone, but upon error also.
Carl Jung (1875 - 1961)

1.1 Εισαγωγή

1.1.1 Τι είναι μέτρηση;

Το ερώτημα είναι μάλλον κοινότοπο. Από πολύ νωρίς στο σχολείο έχει δοθεί ο παρακάτω ορισμός για τη μέτρηση:

Μέτρηση είναι η σύγκριση ενός μεγέθους με τη μονάδα μέτρησης.

Ο ορισμός αυτός περιέχει τρία βασικά στοιχεία: (α) μέγεθος, (β) σύγκριση και (γ) μονάδα μέτρησης. Προκειμένου λοιπόν να καταλάβουμε την έννοια της μέτρησης, θα πρέπει κατ' αρχήν να αντιληφθούμε τα επιμέρους στοιχεία της.

Μέγεθος ή φυσικό μέγεθος είναι κάθε ποσότητα (ή ιδιότητα) που μπορεί να μετρηθεί. Π.χ. η ηλικία, το βάρος, το ύψος ενός ανθρώπου, η ταχύτητα μιας χημικής αντίδρασης, η ενέργεια κ.τ.λ.

Μονάδα μέτρησης είναι μια ποσότητα ενός φυσικού μεγέθους η οποία αυθαίρετα ορίζεται ως "1" (μονάδα). Κάθε άλλη ποσότητα του μεγέθους αυτού θα υπολογίζεται σε σχέση με αυτή την ποσότητα, (δηλαδή τη μονάδα που αυθαίρετα ορίσαμε). Επομένως αν μια ποσότητα ενός μεγέθους είναι 2.5 φορές μεγαλύτερη από την ποσότητα που ορίσαμε ως μονάδα, τότε θα λέμε ότι η ποσότητα αυτή είναι 2.5 τέτοιες μονάδες. Αυτό ακριβώς υποδηλώνει η λέξη σύγκριση, που υπάρχει στον ορισμό. Με άλλα λόγια

σύγκριση του μεγέθους με τη μονάδα μέτρησης σημαίνει, να βρούμε ένα αριθμό ο οποίος να αντιπροσωπεύει τον αριθμό μονάδων του μετρούμενου μεγέθους. Όταν δηλαδή λέμε ότι μετρήσαμε με ένα χάρακα μια ευθεία απόσταση και τη βρήκαμε να είναι $18.4cm$, αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός που μας λέει πόσες φορές μεγαλύτερο είναι το μήκος που μετράμε, σε σχέση με το μήκος που ορίσαμε ως μονάδα (στην προκειμένη περίπτωση το εκατοστό του μέτρου cm), είναι το 18.4.

Στην ουσία δηλαδή, όταν μιλάμε για μέτρηση εννοούμε ένα αριθμό και μια μονάδα μέτρησης [1]. **Ένας αριθμός, που δε συνοδεύεται από την ανάλογη μονάδα μέτρησης, δεν αποτελεί μέτρηση κάποιου μεγέθους, γιατί πολύ απλά δεν προσδιορίζει από μόνος του με ποιά ποσότητα (μονάδα) συγκρίνεται.** Αν π.χ. πούμε ότι "η ηλικία του τάδε ανθρώπου είναι 3600", η δήλωση αυτή από μόνη της δε λέει τίποτα. Τι είναι αυτά τα 3600; Είναι μήνες; Είναι χρόνια; Είναι κάτι άλλο; Αν δεν πούμε τι είναι αυτά τα 3600, δεν έχουμε πει τίποτα. Αν όμως πούμε "η ηλικία του τάδε ανθρώπου είναι 3600 μέρες" τότε αμέσως έχουμε μια σαφή εικόνα της ηλικίας του. Βεβαίως το να μετράμε την ηλικία σε ημέρες δεν μας είναι και τόσο οικείο. Όμως είναι πολύ εύκολο να ανάγουμε αυτή την ηλικία σε πιο οικείες μονάδες όπως τα έτη, διαιρώντας εν προκειμένω την ηλικία σε μέρες, με 365 μέρες που αντιστοιχούν στο ένα έτος. Μπορούμε έτσι να βρούμε ότι η ηλικία αυτού του ανθρώπου είναι $9,863$ έτη ή 9 έτη και 315 μέρες.

Η επιλογή των μονάδων που θα χρησιμοποιήσουμε είναι δική μας υπόθεση. Μπορούμε ακόμα και να ορίσουμε δικές μας μονάδες μέτρησης. Ωστόσο αν και οι άλλοι δε γνωρίζουν ποιά ποσότητα του μεγέθους αντιπροσωπεύουν οι δικές μας μονάδες, τότε δε θα μπορέσουμε να συνεννοηθούμε μαζί τους και δε θα μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για να κάνουμε τη δουλειά μας. Φανταστείτε για παράδειγμα κάποιος να ορίσει ως μονάδα βάρους το σωματικό του βάρος, την οποία ας πούμε να την ονομάσει "ιδανικό χιλιόγραμμο" ($ideal - kgr$). Στη συνέχεια να πάει στον μπακάλη της γειτονιάς και να του ζητήσει να του δώσει $0.2ideal - kgr$ πατάτες. Προφανώς ο μπακάλης δε θα καταλάβει τι είναι αυτό που του ζητάει. Ακόμα όμως κι αν του δώσει να καταλάβει ποιά ποσότητα αντιπροσωπεύει το $ideal - kgr$, θα πρέπει ο μπακάλης να κάνει την αναγωγή σε μονάδες κοινών kgr (αφού αυτός αυτές χρησιμοποιεί), προκειμένου να μπορέσει να εξυπηρετήσει τον πελάτη του. Είναι καλό λοιπόν να χρησιμοποιούμε μονάδες που βρίσκονται σε συνήθη χρήση, ώστε να κάνουμε απλούστερη τη ζωή μας και κατά συνέπεια ο ορισμός νέων μονάδων μέτρηση, χωρίς να υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος λόγος για τον ορισμό τους, είναι μάλλον άσκοπος. Πάντως κανείς δε μας απαγορεύει να έχουμε τις δικές μας μονάδες μέτρησης για προσωπική χρήση.

Σε κάθε περίπτωση όμως **οι μονάδες μέτρησης πρέπει να ορίζονται με σαφή και μονοσήμαντο τρόπο**, έτσι ώστε όλοι να έχουμε την ίδια αντίληψη για την ποσότητα του μεγέθους που αντιπροσωπεύουν και να μην αλλάζει η

[1] θα δούμε παρακάτω ότι η μέτρηση δεν είναι ένας μόνο αριθμός και μια μονάδα μέτρησης, αλλά δύο αριθμοί (τιμή + σφάλμα) και μια μονάδα μέτρησης. Προς στιγμήν όμως ας το δεχτούμε έτσι

τιμή της από μέτρηση σε μέτρηση. Με αυτή την έννοια η μονάδα $ideal - kgr$ του παραπάνω παραδείγματος, κάθε άλλο παρά "ιδανική" (ideal) θα μπορούσε να χαρακτηριστεί, μιας και το βάρος του σώματός μας μεταβάλλεται συνεχώς. Αν επομένως χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μονάδα για να μετρήσουμε το βάρος ενός αντικειμένου, αυτό μπορεί να διαφέρει από μέτρηση σε μέτρηση, ακριβώς επειδή η ίδια η μονάδα μέτρησης μπορεί να έχει αλλάξει από τη μια μέτρηση στην άλλη. Η μονάδα μέτρησης δηλαδή θα πρέπει να μην επηρεάζεται από παράγοντες που ενδέχεται να επηρεάζουν τη μέτρηση.

1.1.2 Πώς μετράμε;

Όπως είπαμε μέτρηση είναι η σύγκριση ενός μεγέθους με μια μονάδα μέτρησης. Αν λοιπόν αποφασίσουμε ποιά θα είναι η μονάδα μέτρησης, το ερώτημα που τίθεται είναι πώς θα γίνει αυτή η σύγκριση. Με άλλα λόγια το ερώτημα είναι, **πώς θα βρούμε τον αριθμό εκείνο που θα μας λέει πόσες φορές μεγαλύτερο ή μικρότερο είναι το μετρούμενο μέγεθος σε σχέση με τη μονάδα που έχουμε επιλέξει;** Ο μοναδικός τρόπος που έχει επινοήσει ο άνθρωπος για να προσδιορίσει αυτό τον αριθμό είναι να χρησιμοποιήσει τα **όργανα μέτρησης**. Τα όργανα μέτρησης είναι συσκευές με τις οποίες με κατάλληλο τρόπο μπορούμε να κάνουμε αυτή τη σύγκριση (μέτρηση) και να πάρουμε αυτό τον αριθμό. Συνήθως διαθέτουν μια κλίμακα συγκεκριμένων ενδείξεων, κάποια εκ των οποίων (ενδείξεων) αντιστοιχεί στην τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Π.χ. στη γνωστή μέτρηση μήκους με το χάρακα, η κλίμακα αυτή απεικονίζεται πάνω στο χάρακα με ισαπέχουσες γραμμές. Διαδοχικές τέτοιες γραμμές του χάρακα απέχουν μεταξύ τους $1mm$.

Ο τρόπος με τον οποίο μετράμε με το χάρακα είναι γνωστός και θα ήταν περιττό να τον αναφέρουμε εδώ. Γενικά όμως ο τρόπος με τον οποίο γίνεται μια μέτρηση, διαφέρει από μέγεθος σε μέγεθος. Για παράδειγμα για τη μέτρηση μιας θερμοκρασίας ενός σώματος θα πρέπει να φέρουμε το θερμόμετρο σε επαφή με το σώμα αυτό. Για τη μέτρηση του βάρους ενός σώματος πρέπει να τοποθετήσουμε το σώμα πάνω στη ζυγαριά. Επίσης μπορεί μια μέτρηση να διαφέρει και από περίπτωση σε περίπτωση για το ίδιο μέγεθος. Για παράδειγμα την πίεση ενός υδρευτικού δικτύου την μετράμε συνδέοντας πάνω στο δίκτυο ένα μανόμετρο. Αντιθέτως την πίεση του ανθρώπου τη μετράμε με τα ιατρικά μανόμετρα, τα οποία τοποθετούμε εξωτερικά γύρω από το ανθρώπινο χέρι, χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε κάποια τομή σε φλέβα ή αρτηρία, όπως θα κάναμε κατ' αντιστοιχία, αν είχαμε ένα δίκτυο ύδρευσης.

Τα όργανα μέτρησης συνήθως δε μετράνε απ' ευθείας [2] **το υπό εξέταση μέγεθος, αλλά εκμεταλλευόμενα κάποιες φυσικές ιδιότητες των στοιχείων του οργάνου, ανάγουν τη μέτρηση του μεγέθους σε μήκος ή**

[2] δηλαδή συγκρίνοντας με μια μονάδα μέτρησης, όπως γίνεται π.χ. με το χάρακα

σε γωνία [3]. Π.χ. ένα υδραργυρικό θερμόμετρο εκμεταλλεύεται τη διαστολή και τη συστολή του υδραργύρου για να μετρήσει τη θερμοκρασία. Όταν η θερμοκρασία αυξάνεται (μειώνεται), ο υδράργυρος διαστέλλεται (συστέλλεται), ακολουθώντας το νόμο της γραμμικής διαστολής (συστολής)

$$\delta l = a l_0 \delta\theta \tag{1.1}$$

όπου $\delta l = l - l_0$ η μεταβολή (διαστολή ή συστολή) του μήκους της στήλης του υδραργύρου μέσα στο θερμόμετρο που προκαλείται από τη μεταβολή $\delta\theta = \theta - \theta_0$ της θερμοκρασίας , a ο συντελεστής γραμμικής διαστολής που μπορεί να θεωρηθεί σταθερή ποσότητα και l_0 το αρχικό μήκος της στήλης του υδραργύρου. Από την παραπάνω σχέση βλέπει κανείς ότι μια τιμή της θερμοκρασίας θ θα αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο μήκος l της στήλης του υδραργύρου. Θα μπορούσαμε λοιπόν να μετράμε το μήκος l του της στήλης του υδραργύρου μέσα στο σωλήνα του θερμομέτρου και στη συνέχεια, (χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο), να βλέπαμε σε ποιά θερμοκρασία θ αντιστοιχεί. Αυτό όμως θα απαιτούσε να κάνουμε κάποιες μαθηματικές πράξεις ενώ θα υπήρχε και η πιθανότητα να κάνουμε και λάθη κατά τον υπολογισμό. Από την άλλη φανταστείτε πόσο δύσκολο θα ήταν αυτό για ένα άνθρωπο που δεν ξέρει να εκτελεί μαθηματικές πράξεις με τη δική μας ευκολία. Προκειμένου λοιπόν να κάνουμε πιο εύκολη τη ζωή μας, είναι προτιμότερο, αντί να μετράμε μήκος πάνω στο θερμόμετρο και μετά να χρησιμοποιούμε τον παραπάνω τύπο για να βρούμε τη θερμοκρασία, να μετράμε κατευθείαν τη θερμοκρασία χρησιμοποιώντας μια θερμοκρασιακή κλίμακα, την οποία θα είχαμε προσαρμόσει πάνω στο θερμόμετρο. Η θερμοκρασιακή αυτή κλίμακα θα έκανε απ' ευθείας την αναγωγή του μήκους l σε θερμοκρασία θ, πάλι με τη χρήση του παραπάνω τύπου [4]. Απλώς αυτό θα είχε γίνει εκ των προτέρων μια και καλή. Αυτό ακριβώς γίνεται με όλα σχεδόν τα όργανα μέτρησης.

Ένα άλλο απλό παράδειγμα είναι το δυναμόμετρο. Το δυναμόμετρο μετράει το βάρος ενός σώματος, δηλαδή τη δύναμη με την οποία η γη έλκει το σώμα αυτό. Επειδή σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα το βάρος B ενός σώματος είναι ίσο με την επιτάχυνση της βαρύτητας g επί τη μάζα m του σώματος, ($B = mg$) και επειδή η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι σχεδόν σταθερή σε ένα τόπο, έχουμε συνηθίσει το βάρος να το μετράμε σε kgr, ενώ το kgr δεν είναι μονάδα βάρους, αλλά μάζας. Το δυναμόμετρο δεν είναι τίποτα άλλο από ένα ελατήριο με ένα γάντζο στο ένα άκρο και μια κλίμακα μέτρησης του βάρους. Με τη χρήση του δυναμόμετρου, εκείνο το οποίο κάνουμε, είναι ότι ανάγουμε την επιμήκυνσή του σε βάρος, χρησιμοποιώντας το νόμο του Hook για μικρές επιμηκύνσεις, σύμφωνα με τον οποίο η επιμήκυνση x που παθαίνει

---

[3] η αναγωγή μιας μέτρησης σε γωνία είναι ισοδύναμη σε αναγωγή της μέτρησης σε μήκος κυκλικού τόξου. Κατά συνέπεια η αναφορά μας στην αναγωγή της μέτρησης σε γωνία θα μπορούσε να μην περιληφθεί.

[4] αν το καλοσκεφτείτε, πάλι μήκος θα μετράμε, αλλά σε άλλες μονάδες

ένα ελατήριο εξ αιτίας μιας δύναμης F (εν προκειμένω του βάρους B) που του ασκείται, είναι ανάλογη της δύναμης αυτής.

$$F = kx \tag{1.2}$$

όπου k μια σταθερά, η λεγόμενη σταθερά του ελατηρίου. Αν δηλαδή π.χ. για κάθε kgr βάρους που θα κρεμάμε στο δυναμόμετρο, το ελατήριο επιμηκύνεται κατά $1cm$, τότε αν τοποθετήσουμε ένα κοινό χάρακα πάνω στο δυναμόμετρο ώστε να μας δείχνει την επιμήκυνση του ελατηρίου του, η ένδειξη του χάρακα σε cm θα είναι ίση με το βάρος του σώματος σε kgr.

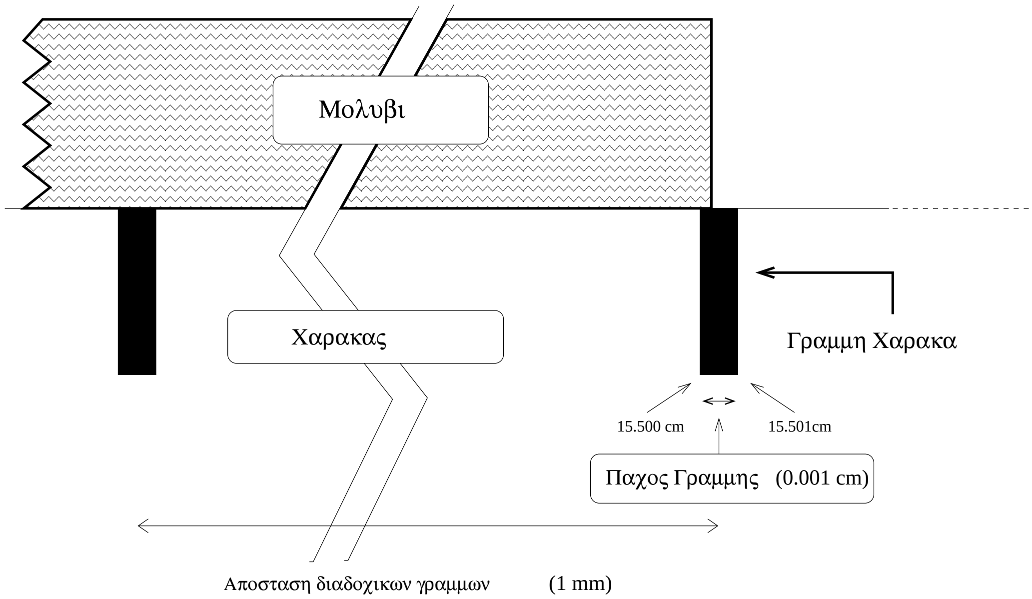
Υπάρχουν ωστόσο και όργανα μέτρησης τα οποία δεν ανάγουν τη μέτρηση σε μήκος ή γωνία, αλλά σε ηλεκτρικό σήμα. Αυτά είναι τα ψηφιακά όργανα, τα οποία, αφού μετατρέπουν την μέτρηση σε ηλεκτρικό σήμα, εν συνεχεία με κατάλληλες ηλεκτρονικές διατάξεις μετατρέπουν το ηλεκτρικό σήμα σε αναγνώσιμους αριθμούς που εμφανίζονται σε μια οθόνη.

Τέλος υπάρχουν και μέθοδοι μέτρησης που δεν εμπίπτουν στις παραπάνω κατηγορίες, όπως π.χ. η μέτρηση του pH με τη χρήση αλλαγής χρώματος συγκεκριμένων δεικτών. Επί της ουσίας όμως τίποτα δεν αλλάζει. Όλα τα όργανα μέτρησης, με τον ένα ή με τον άλλο τρόπο, χρησιμοποιούν μια κλίμακα συγκεκριμένων ενδείξεων, μέσω της οποίας μετράμε ένα μέγεθος. Σε κάθε περίπτωση (και αυτό αποτελεί το βασικό συμπέρασμα αυτής της παραγράφου) **η μέτρηση ενός μεγέθους μέσω των οργάνων μέτρησης γίνεται προσδιορίζοντας ένα εκ των αριθμών της κλίμακας ενδείξεων του οργάνου, ο οποίος συνοδεύεται από τις μονάδες μέτρησης, στις οποίες μετράει το όργανο.** Το ερώτημα που τίθεται όμως είναι το εξής: αν ένα μέγεθος έχει μια τιμή διαφορετική από αυτές που εμφανίζονται στην κλίμακα του οργάνου μέτρησης, πώς θα μετρηθεί αυτή η συγκεκριμένη τιμή του μεγέθους με το συγκεκριμένο όργανο μέτρησης; Με λίγα λόγια ...

1.1.3 ... μετράνε τα όργανα την πραγματική τιμή του μεγέθους;

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μολύβι, του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε το μήκος του. Τι πρέπει να κάνουμε; Το απλούστερο που θα σκεφτόμασταν, είναι να πάρουμε ένα χάρακα και να το μετρήσουμε. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι παίρνουμε ένα χάρακα και μετράμε το μήκος του μολυβιού. Πώς το κάνουμε αυτό; Μα με το γνωστό τρόπο που γνωρίζουμε. Τοποθετούμε τη μια άκρη του μολυβιού ακριβώς [5] πάνω στη γραμμή της ένδειξης μηδέν του χάρακα, ενώ η άλλη άκρη του μολυβιού πέφτει ακριβώς στη γραμμή του χάρακα που αντιστοιχεί στην ένδειξη π.χ. $15.5cm$. Προφανώς λοιπόν θα λέγαμε ότι το

[5] από αυτά που αναφέρονται σ' αυτή την παράγραφο, θα καταλάβετε ότι η λέξη "ακριβώς" χρησιμοποιείται εδώ καταχρηστικά. Ας τη δεχτούμε όμως προς στιγμήν για ευκολία και οικονομία της συζήτησης



Σχήμα 1.1: Μήκη με τιμές από 15.500 μέχρι $15.501cm$, που πέφτουν πάνω στη γραμμή του χάρακα, δεν μπορούν να αναγνωσθούν. Για όλες τις περιπτώσεις αυτές η μέτρηση με το χάρακα είναι $15.5cm$.

μήκος του μολυβιού είναι $15.5cm$. Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής: είναι πράγματι τόσο το μήκος του μολυβιού, όσο το μετρήσαμε με το χάρακα;

Στο ερώτημα αυτό το ζητούμενο δεν είναι αν έχει γίνει κανένα λάθος στη διαδικασία μέτρησης με το χάρακα, ή αν το μήκος του μολυβιού είναι π.χ. $15.6cm$ ή $15.7cm$, πράγμα που θα προϋπέθετε την ύπαρξη δικού μας λάθους στη μέτρηση. Το ερώτημα είναι αν το μήκος του μολυβιού είναι ακριβώς $15.5cm$, τόσο δηλαδή όσο σωστά μας έδειξε ο χάρακας. Χωρίς πολύ σκέψη η απάντηση θα μπορούσε να είναι καταφατική. Όμως **ποιός μας εξασφαλίζει ότι το μολύβι δεν έχει μήκος π.χ.** $15.500001cm$**;;;** Εδώ τα πράγματα αρχίζουν να δυσκολεύουν και η πιθανή προηγούμενη καταφατική απάντηση αρχίζει να κλονίζεται. Όντως κανείς δε μας εξασφαλίζει κάτι τέτοιο και αυτό πρέπει να το παραδεχτούμε. Μια πρώτη σκέψη που θα μπορούσαμε να κάνουμε, είναι ότι δεν μπορούμε να ξέρουμε αν το μήκος του μολυβιού είναι ή δεν είναι $15.500001cm$, επειδή το όργανο (χάρακας) με το οποίο το μετρήσαμε δε μας επιτρέπει να κάνουμε τέτοιες ακριβείς μετρήσεις. Η διαφορά της ένδειξης του χάρακα ($15.5cm$) από την τιμή $15.500001cm$ είναι πολύ μικρή και δεν μπορεί να μετρηθεί με το χάρακα. Εξ άλλου μια τέτοια διαφορά δε διακρίνεται με το μάτι. Ακόμα όμως κι αν μπορούσαμε να τη διακρίνουμε, αν υποθέσουμε ότι το πλάτος των γραμμών της κλίμακας του χάρακα είναι το ένα εκατοστό του χιλιοστού ($0.01mm$) [6], τότε οι μετρήσεις με πραγματικές τιμές από $15.500cm$ μέχρι $15.501cm$ θα έπεφταν μέσα στο πλάτος της γραμμούλας της κλίμακας

[6] είναι σαφώς μεγαλύτερο

του χάρακα και δε θα μπορούσαμε να τις ξεχωρίσουμε (βλέπε σχήμα 1.1).

Θα μπορούσε λοιπόν να πει κανείς ότι όντως φταίει ο χάρακας που δε μας επιτρέπει μια ακριβέστερη μέτρηση κι έτσι δεν μπορούμε να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα. Αν όμως χρησιμοποιούσαμε ένα όργανο με μεγαλύτερη ακρίβεια τότε σαφώς θα μπορούσαμε να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει ένα τέτοιο όργανο μέτρησης και ότι μετρώντας μ' αυτό το μήκος του μολυβιού, το βρίσκουμε να είναι $15.500232cm$. Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να πει ότι αν χρησιμοποιήσουμε ένα όργανο με μεγαλύτερη ακρίβεια, μπορούμε να γνωρίζουμε την πραγματική τιμή του μήκους του μολυβιού. Είναι όμως έτσι τα πράγματα ; Δυστυχώς ή ευτυχώς, καλώς ή κακώς τα πράγματα δεν είναι έτσι, γιατί **ακόμα κι αν μπορέσαμε να βρούμε το μήκος του μολυβιού με μεγαλύτερη ακρίβεια (αυτό κάναμε στην ουσία), δεν καταφέραμε να πούμε με βεβαιότητα ότι αυτή είναι η πραγματική τιμή του μήκους του μολυβιού. Ποιός δηλαδή μπορεί να μας εξασφαλίσει ότι το μήκος του μολυβιού δεν είναι** $15.50023200000000000001cm$**;**

Θα μπορούσε βεβαίως κάποιος να προτείνει να χρησιμοποιήσουμε ένα όργανο μέτρησης με ακόμα μεγαλύτερη ακρίβεια, για να το διαπιστώσουμε. Όμως ακόμα κι αν το κάναμε αυτό, πάντα θα μπορούσε ο οποιοσδήποτε από μας να προσθέσει ακόμα μερικά μηδενικά και ένα "1" στο τέλος (όπως ακριβώς κάναμε και προηγουμένως) και να θέσει τα ίδια ερωτήματα. Αυτό μπορεί να γίνεται επ' άπειρο με τους αριθμούς. Τα όργανα μέτρησης όμως δεν μπορούν να ακολουθήσουν αυτό τον ανταγωνισμό, γιατί (μην ξεχνάτε) έχουν μια κλίμακα με συγκεκριμένες ενδείξεις και μόνο αυτές τις συγκεκριμένες ενδείξεις μπορούν να μας προσφέρουν ως μετρήσεις. Επομένως

> το μοναδικό πράγμα που μπορούμε να πετύχουμε με τη χρήση των οργάνων μέτρησης, είναι να προσεγγίζουμε, όσο καλά μας επιτρέπει το ίδιο το όργανο, την πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους, χωρίς ωστόσο να μπορούμε να πούμε ποτέ με βεβαιότητα, ότι η τιμή που μετρήσαμε είναι η πραγματική τιμή του υπό μέτρηση μεγέθους.

Το αποτέλεσμα λοιπόν της προσπάθειάς μας να βρούμε την πραγματική τιμή ενός μεγέθους είναι μάλλον απογοητευτικό. Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι **την πραγματική τιμή ενός μεγέθους δε θα τη μάθουμε ποτέ, γιατί δεν μπορούμε να μετρήσουμε με απόλυτη (άπειρη) ακρίβεια. Απόλυτα ακριβής μέτρηση δεν υπάρχει. Τα όργανα μέτρησης** [7]**, μπορούν να μας δώσουν μόνο μια προσέγγιση της πραγματικής τιμής του μεγέθους που μετράμε, με ακρίβεια τόση, όση αυτά μας επιτρέπουν**. Όμως είναι λίγο αυτό ;

Αν αναρωτηθούμε γιατί χρειάζεται να ξέρουμε την πραγματική τιμή ενός μεγέθους και αν μπορούμε πάντα να γνωρίζουμε τους αριθμούς με άπειρη ακρίβεια, τότε ίσως αντιληφθούμε ότι υπάρχει μια πληθώρα αριθμών, που ως

[7] μόνο με αυτά μπορούμε να κάνουμε μετρήσεις

"χειροπιαστούς αριθμούς" τους γνωρίζουμε μόνο κατά προσέγγιση. Τέτοια απλά παραδείγματα είναι όλοι οι άρρητοι αριθμοί π.χ. οι $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ο αριθμός π (λόγος περιφέρειας προς διάμετρο κύκλου), κ.τ.λ. Όλους αυτούς τους αριθμούς, αν προσπαθήσουμε να τους γράψουμε με δεκαδική μορφή θα εμφανιστεί μια άπειρη σειρά ψηφίων, τα οποία προφανώς δεν είμαστε σε θέση να τα γνωρίζουμε, επειδή ακριβώς είναι άπειρα, ενώ εμείς πεπερασμένοι. Ωστόσο δεν επιδιώκουμε και να τα γνωρίζουμε, γιατί αν γνωρίζουμε τα πρώτα δεκαδικά τους ψηφία, μπορούμε μια χαρά να κάνουμε τη δουλειά μας. Έχουμε βεβαίως την ευελιξία να χρησιμοποιήσουμε περισσότερα ψηφία, αν περισσότερα μας χρειάζονται για να κάνουμε τη δουλειά μας. Ωστόσο ποτέ δεν τα χρησιμοποιούμε όλα. Το ζητούμενό μας δηλαδή δεν είναι πάντα να γνωρίσουμε την ακριβή (πραγματική) τιμή ενός μεγέθους, πράγμα που μόνο ως φιλοσοφικό ερώτημα θα μπορούσε να τεθεί, αλλά να χρησιμοποιήσουμε τη μέτρηση για να κάνουμε τη δουλειά μας. Αν επομένως το ζητούμενο είναι να κάνουμε τη δουλειά μας και όχι να γνωρίζουμε μια μέτρηση με άπειρη ακρίβεια, τότε αντιλαμβανόμαστε ότι **και μια προσεγγιστική τιμή της ακριβούς (πραγματικής) τιμής ενός μετρούμενου μεγέθους μπορεί να μας είναι αρκετή, αν η ακρίβεια με την οποία μας δίνεται, μας επιτρέπει να κάνουμε σωστά τη δουλειά μας**. Το ζητούμενο επομένως πρέπει να είναι πώς θα καθοριστεί η ακρίβεια μιας μέτρησης και όχι αν η τιμή της μέτρησης είναι η ακριβής τιμή του μεγέθους. Αυτό μπορεί να μεταφραστεί στην ερώτηση, πόσο κοντά πέφτει η πραγματική τιμή του μεγέθους στην τιμή που μετράμε με το όργανο μέτρησης. Φυσικά η γνώση της διαφοράς ανάμεσα στην πραγματική τιμή του μεγέθους από την τιμή που μετράμε με το όργανο μέτρησης, θα μας επέτρεπε αυτομάτως να γνωρίζουμε την πραγματική τιμή του μεγέθους. Εδώ όμως δε μιλάμε γι' αυτή τη διαφορά, αλλά για ένα πάνω κι ένα κάτω όριο γύρω από την τιμή της μέτρησης, τα οποία βρίσκονται όσο το δυνατό πιο κοντά στην τιμή της μέτρησης, μέσα στα οποία με βεβαιότητα μπορούμε να πούμε ότι βρίσκεται η πραγματική τιμή του μεγέθους που μετράμε. Αυτό ευτυχώς μπορεί να μας το εξασφαλίσει το όργανο μέτρησης και αυτό αποτελεί λόγο για να αποβάλουμε άμεσα την αρχική μας απογοήτευση.

Στο παράδειγμα με τη μέτρηση του μολυβιού είπαμε ότι το μήκος του μολυβιού ήταν $15.5cm$. Αυτή η τιμή μπορεί να μας είναι αρκετή κι ας ξέρουμε ότι η τιμή αυτή, το πιθανότερο είναι, να μην είναι η πραγματική τιμή του μήκους του. Μπορούμε ωστόσο με βεβαιότητα να πούμε, ότι το μήκος του μολυβιού δεν μπορεί να είναι μικρότερο από $15.4cm$, αλλά ούτε και μεγαλύτερο από $15.6cm$ κι αυτό γιατί η ένδειξη $15.5cm$, την οποία μετρήσαμε με το χάρακα, είναι ξεκάθαρα ανάμεσα στις δύο αυτές τιμές. Στην ουσία αυτή είναι η μόνη πληροφορία που μας δίνει ο χάρακας για τη μέτρηση του μήκους του μολυβιού. Εκείνο δηλαδή που γνωρίζουμε, είναι **ένα διάστημα μέσα στο οποίο είμαστε σίγουροι ότι περικλείεται η πραγματική τιμή του μεγέθους, του οποίου το εύρος προσδιορίζει την αβεβαιότητα με την οποία η τιμή που μετρήσαμε προσεγγίζει την πραγματική τιμή του μετρούμενου**

μεγέθους.

Το μέτρο της αβεβαιότητας με την οποία η τιμή της μέτρησης x προσεγγίζει την πραγματική τιμή X ενός μεγέθους λέγεται **σφάλμα** δx της μέτρησης.

Αν επομένως x είναι η τιμή που μετράμε με ένα όργανο μέτρησης και δx το σφάλμα της μέτρησης, τότε η πραγματική τιμή X του μεγέθους βρίσκεται ανάμεσα στο διάστημα $[x - \delta x, x + \delta x]$. Αυτό περιγράφεται πιο συνοπτικά από το συμβολισμό $x \pm \delta x$. Στο παραπάνω παράδειγμα της μέτρησης του μήκους του μολυβιού με το χάρακα, θα μπορούσαμε να γράψουμε ότι το μήκος του είναι $15.5 \pm 0.1cm$, εννοώντας ότι το μήκος του μολυβιού βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές 15.4 και $15.6cm$.

Η απάντηση στο ερώτημα αν μια μέτρηση ικανοποιεί τις ανάγκες μας, σχετίζεται άμεσα με το σφάλμα της μέτρησης αυτής. Για παράδειγμα αν θέλουμε να μετρήσουμε το βάρος μας για να καθορίσουμε τη διαιτά μας, μάς είναι υπεραρκετό αν το σφάλμα της ζυγαριάς είναι της τάξης των $100gr$. Με λίγα λόγια αν πέσουμε $100gr$ πάνω ή κάτω δε θα πρέπει να μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα, αφού ένα ποτήρι νερό που πίνουμε μπορεί να έχει βάρος περισσότερο από $100gr$. Αντιθέτως μια δόση ενός φαρμάκου που παίρνουμε μπορεί να έχει τρομερές επιπτώσεις στον οργανισμό μας αν το σφάλμα στη μέτρηση του βάρους του είναι μεγαλύτερο από μερικά εκατοστά του γραμμαρίου. Στην πρώτη περίπτωση μέτρηση με σφάλμα της τάξης του ενός εκατοστού του γραμμαρίου θα ήταν περιττό και ανώφελο. Στη δεύτερη περίπτωση σφάλμα της τάξης των $100gr$ θα ήταν καταστροφικό. Στην πρώτη περίπτωση η ζύγιση γίνεται με ζυγαριές ζύγισης του ανθρωπίνου σώματος, όπως αυτές που συναντάμε στα φαρμακεία, στη δεύτερη περίπτωση η ζύγιση γίνεται με ζυγαριές ακριβείας, όπως αυτές που συναντάμε σε εργαστήρια. Αναλόγως λοιπόν με το ποιά ποσότητα ενός μεγέθους θέλουμε να μετρήσουμε, επιλέγουμε και το αντίστοιχο όργανο μέτρησης, που θα μας εξασφαλίσει το επιθυμητά ανεκτό σφάλμα στη μέτρησή μας.

1.1.4 Ασκήσεις

1. (α) Με βάση τον ορισμό του $ideal - kgr$ που δώσαμε στο παράδειγμα, πόσα $ideal - kgr$ είναι το βάρος σας;
   (β) Ένας άνθρωπος που ζυγίζει $78kgr$, πόσα $ideal - kgr$ είναι;
   (γ) Τα $0.2ideal - kgr$ πατάτες του παραδείγματος, πόσες λίμπρες (lbf) είναι; (Η λίμπρα είναι μονάδα μέτρησης βάρους στο Βρετανικό σύστημα μονάδων. $1kgr$ έχει βάρος $2.205lbf$ όταν $g = 9.80m/sec^2$)

2. (α) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, μετράμε με ένα χάρακα τις δυο κάθετες πλευρές του και τις βρίσκουμε να έχουν και οι δύο μήκος a ίσο με $a = 10.0cm$. Από το πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε ότι το μήκος της υποτείνουσας του τριγώνου είναι ίσο με $\sqrt{2}a$. Αν μετρήσουμε το μήκος

της υποτείνουσας με το χάρακα, πόσο θα το βρούμε;
(β) Αν από τη μέτρηση που κάναμε βρίσκαμε ότι $a = 10mm$, πόσο θα μετρούσαμε ότι είναι το μήκος της υποτείνουσας;

3. Αναλογιζόμενοι ότι ένα φιστίκι έχει περίπου 10 θερμίδες, εξηγήστε γιατί τα ημερήσια διαιτολόγια που δίνουν οι διαιτολόγοι περιέχουν ακέραιο αριθμό θερμίδων.

4. Έχουμε ένα ελατήριο και ένα χάρακα και θέλουμε να φτιάξουμε ένα δυναμόμετρο. Όταν στο ελατήριο κρεμάσουμε ένα βάρος $10kgr$, αυτό επιμηκύνεται κατά $8cm$. Πώς θα φτιάξουμε την κλίμακα του δυναμόμετρου ώστε κάθε γραμμή της να μετράει $0.5kgr$; Είναι κατάλληλο αυτό το δυναμόμετρο για να μετρήσει $100gr$ ρύζι;

5. Ο δείκτης μάζας σώματος (BMI) είναι ένα μέτρο της παχυσαρκίας και ορίζεται από τη σχέση $BMI = m/h^2$, όπου m η μάζα σε kgr και h το ύψος σε m ενός ανθρώπου. Τα όρια μέσω των οποίων γίνεται η κατηγοριοποίηση των ανθρώπων είναι συνήθως τα εξής: (α) $BMI < 18.5$ ελειποβαρής, (β) $18.5 < BMI < 25$ κανονικός, (γ) $25 < BMI < 30$ υπέρβαρος και (δ) $BMI > 30$ παχύσαρκος. Πώς θα άλλαζαν αυτά τα όρια αν η μάζα και το ύψος μετριόταν στο Βρετανικό σύστημα μονάδων, δηλαδή σε $pounds$ και σε $foot$ αντίστοιχα ; (Δίνεται ότι $1pound = 453.59237gr$ και $1foot = 30.48cm$)

6. Στο παραπάνω ερώτημα, πώς πρέπει να μετατραπεί η σχέση του BMI, ώστε ενώ η μάζα και το ύψος θα μετριούνται στο Βρετανικό σύστημα, τα όρια να παραμένουν τα ίδια με αυτά του παραπάνω ερωτήματος;

1.2 Κατηγορίες μετρήσεων και σφαλμάτων

Είπαμε ότι μέτρηση είναι η σύγκριση της ποσότητας ενός μεγέθους με τη μονάδα μέτρησης και ότι η σύγκριση αυτή γίνεται με τη χρήση των οργάνων μέτρησης. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που η σύγκριση αυτή επιτυγχάνεται με ένα έμμεσο τρόπο, που συνδυάζει τη χρήση των οργάνων μέτρησης με κάποιους μαθηματικούς τύπους. Π.χ. δεν υπάρχει κανένα όργανο μέτρησης που να υπολογίζει εμβαδόν επιφάνειας. Ξέρουμε όμως π.χ. ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσο με το γινόμενο δύο κάθετων πλευρών του. Αν επομένως μετρήσουμε τις δύο κάθετες πλευρές του και τις πολλαπλασιάσουμε μεταξύ τους, βρίσκουμε το εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Με κριτήριο το αν χρησιμοποιούμε απ' ευθείας ένα όργανο μέτρησης ή αν χρησιμοποιούμε μετρήσεις σε συνδυασμό με κάποια μαθηματική σχέση, για να μετρήσουμε ένα μέγεθος, χωρίζουμε τις μετρήσεις σε δύο κατηγορίες.

Άμεσες Μετρήσεις. Είναι οι μετρήσεις που γίνονται με απευθείας χρήση των οργάνων μέτρησης. (Π.χ. η μέτρηση του μήκους του μολυβιού του παραδείγματος)

Έμμεσες Μετρήσεις. Είναι οι μετρήσεις που χρησιμοποιούν άλλες μετρήσεις και τη βοήθεια κάποιου μαθηματικού τύπου, για να προσδιορίσουν την τιμή μιας ποσότητας.(Π.χ. η μέτρηση του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, όπως την περιγράψαμε παραπάνω)

Στην περίπτωση των σφαλμάτων, ξεχωρίζουμε τρεις κατηγορίες σφαλμάτων ανάλογα με τον τρόπο τον οποίο αυτά εμφανίζονται.

Ακούσια σφάλματα ή λάθη. Είναι εκείνα που προέρχονται από λανθασμένη ανάγνωση ή καταγραφή εκ μέρους αυτού που κάνει τη μέτρηση. Αυτά τα σφάλματα μπορούν να αποφευχθούν αν δοθεί η ανάλογη προσοχή απ' αυτούς που εκτελούν τη μέτρηση.

Συστηματικά σφάλματα. Είναι αυτά που με συστηματικό τρόπο υπεισέρχονται στις μετρήσεις και επηρεάζουν κατά τον ίδιο τρόπο όλες τις μετρήσεις. Τέτοια σφάλματα μπορεί να οφείλονται

* Σε λανθασμένη βαθμονόμηση των οργάνων μέτρησης (π.χ. ένα υδραργυρικό θερμόμετρο στο οποίο η θερμοκρασιακή κλίμακα έχει μετατοπιστεί κατά 5^oC από τη θέση που θα έδειχνε τη σωστή θερμοκρασία, οι ενδείξεις του προσθέτουν συστηματικά 5^oC στην πραγματική θερμοκρασία, σε κάθε μέτρησή του. Επομένως αν η θερμοκρασία είναι 20^oC, το θερμόμετρο αυτό δείχνει 25^oC.)
* Σε προσέγγιση στη μαθηματική σχέση που προσδιορίζει μια έμμεση μέτρηση (π.χ. μετράμε την πυκνότητα του ανθρωπίνου σώματος με την αρχή του Αρχιμήδη [8], χωρίς να λάβουμε υπ' όψη τον όγκο του αέρα που υπάρχει στους πνεύμονες. Αν λάβουμε υπ' όψη τον αέρα των πνευμόνων, οι εξισώσεις που μας δίνουν την πυκνότητα αλλάζουν.)
* Σε άλλους εξωγενείς παράγοντες που επηρεάζουν τη μέτρηση (π.χ. κατά τη διάρκεια των μετρήσεών μας, οι συνθήκες του πειράματος επιβάλουν μεταβολές της θερμοκρασίας, οι οποίες επηρεάζουν τις ενδείξεις του οργάνου μέτρησης)

Τα σφάλματα αυτά μπορούν να αποφευχθούν αν βαθμονομηθούν εκ νέου τα όργανα μέτρησης ώστε να δείχνουν τις σωστές ενδείξεις, αν χρησιμοποιήσουμε ακριβέστερες μαθηματικές σχέσεις που προσδιορίζουν την έμμεση μέτρηση με την επιθυμητή ακρίβεια και αν βελτιώσουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες γίνεται η μέτρηση, ώστε να μην την επηρεάζουν.

[8] το πείραμα θα το δούμε παρακάτω

Τυχαία σφάλματα. Είναι σφάλματα τα οποία συνεχίζουν να υπάρχουν ακόμα κι αν έχουμε αποφύγει τα συστηματικά και τα ακούσια σφάλματα. Θα περιμέναμε βέβαια, έχοντας εξαλείψει τα ακούσια και τα συστηματικά σφάλματα, μετρήσεις της ίδιας ποσότητας, που γίνονται κάτω από τις ίδιες ακριβώς συνθήκες, να είναι ίδιες μεταξύ τους. Στην πράξη όμως, αν εκτελέσουμε πολλές μετρήσεις του ίδιου μεγέθους, όσο και αν προσπαθήσουμε να έχουμε τις ίδιες ακριβώς συνθήκες κάτω από τις οποίες κάνουμε την πρώτη μέτρηση, καμιά από τις επόμενες μετρήσεις δε θα γίνει με ακριβώς τις ίδιες συνθήκες με την πρώτη. Εξ άλλου, αν θέλουμε να είμαστε συνεπείς με όσα έχουμε πει μέχρι τώρα, για να καθοριστεί ότι οι συνθήκες μιας μέτρησης είναι ακριβώς οι ίδιες με τις συνθήκες μιας άλλης μέτρησης, θα πρέπει οι παράγοντες που επηρεάζουν τη μέτρηση και καθορίζουν αυτές τις συνθήκες, να μετρηθούν και να βρεθούν ακριβώς ίδιες. Είπαμε όμως ότι πάντα στις μετρήσεις υπάρχει μια αβεβαιότητα, ένα σφάλμα, το οποίο όσο ανεπαίσθητα μικρό και ασήμαντο αν είναι, δεν παύει να υπάρχει. Κατά συνέπεια δεν μπορούμε με κανένα τρόπο να είμαστε σίγουροι ότι οι συνθήκες μιας μέτρησης είναι ακριβώς ίδιες με τις συνθήκες μιας άλλης. Το ότι εμείς δεν μπορούμε ίσως άμεσα να αντιληφθούμε αυτές τις διαφορές που υπάρχουν στις συνθήκες κάτω από τις οποίες γίνονται οι μετρήσεις, αυτό δε σημαίνει ότι αυτές δεν υπάρχουν. Οι διαφορές αυτές οφείλονται σε διάφορους παράγοντες, που έχουν να κάνουν με τις ατέλειες των μεθόδων μέτρησης, με τα όργανα μέτρησης, με πιθανές ακαθόριστες μικρές μεταβολές που έχουν θεωρηθεί ως σταθερές, κ.α. Τα σφάλματα αυτά εμφανίζονται με ένα τυχαίο τρόπο και δεν μπορούν να αποφευχθούν. Λόγω της τυχαιότητας με την οποία εμφανίζονται, αντιμετωπίζονται με στατιστικό τρόπο θεωρώντας ότι η διασπορά των μετρήσεων ακολουθεί μια κανονική στατιστική κατανομή γύρω από τη μέση τους τιμή.

1.2.1 Ασκήσεις

1. Χαρακτηρίστε ως άμεσες ή ως έμμεσες τις παρακάτω μετρήσεις:
   (α) Μέτρηση του όγκου ενός κύβου με χρήση χάρακα.
   (β) Μέτρηση του όγκου ενός υγρού με χρήση ογκομετρικού σωλήνα.
   (γ) Μέτρηση της ταχύτητας ενός αυτοκινήτου με το ταχύμετρο που διαθέτει.
   (δ) Μέτρηση της ταχύτητας ενός αυτοκινήτου με χρήση χιλιομετρικών αποστάσεων και χρονόμετρου.
   (ε) Μέτρηση του βάρους ενός ανθρώπου με μια ζυγαριά.
   (στ) Μέτρηση του βάρους μιας σταγόνας νερού με το ζυγό ακριβείας.
   (ζ) Μέτρηση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς με θερμόμετρο.
   (η) Μέτρηση της πυκνότητας ενός στερεού σώματος με ζυγαριά και ογκομετρικό σωλήνα.

(θ) Μέτρηση της πίεσης ενός ασθενούς με πιεσόμετρο.
(ι) Μέτρηση του αριθμού των μορίων ενός αερίου που βρίσκονται μέσα σε ένα δωμάτιο.

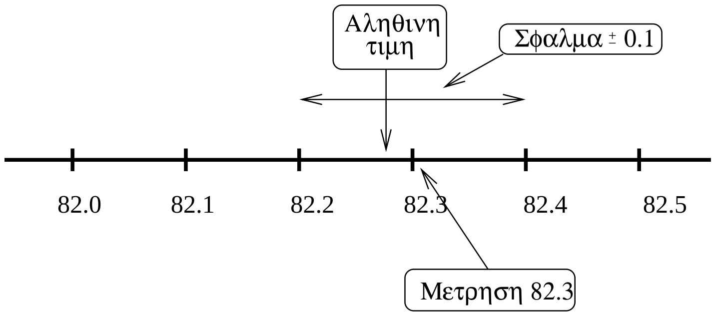
2. Χαρακτηρίστε ως ακούσια, συστηματικά ή τυχαία τα παρακάτω σφάλματα:
(α) Μετράμε ένα μήκος $18.3cm$ και γράφουμε στο χαρτί μας $13.8cm$
(β) Ενώ το βάρος μας είναι $76kgr$, μια ζυγαριά μας δείχνει πάντα $78kgr$
(γ) Μετράμε την ταχύτητα ενός αυτοκινήτου με το ταχύμετρο και βρίσκουμε $60km/h$. Την ίδια ώρα, ο υπολογισμός μήκους προς χρόνο μας δίνει $55km/h$. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα και παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα.
(δ) Με μια ζυγαριά μετράμε το βάρος μας πολλές φορές και συνέχεια βρίσκουμε διαφορετικές τιμές, που διαφοροποιούνται στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο. Η ζυγαριά μετράει σε kgr.

1.3 Σφάλμα από μία και μόνη μέτρηση

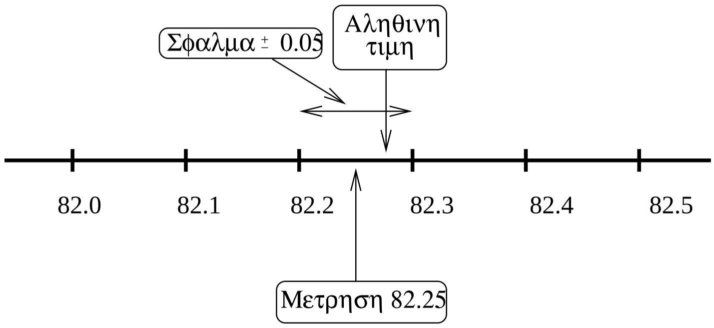
Για να προσδιορίσουμε το σφάλμα μιας μέτρησης, προσπαθούμε να βρούμε δυο τιμές ανάμεσα στις οποίες με βεβαιότητα θα βρίσκεται η μέτρησή μας. Το μισό της διαφοράς αυτών των τιμών είναι η τιμή του σφάλματος της μέτρησης. Βεβαίως κανείς μπορεί να πει ότι η οποιαδήποτε μέτρηση βρίσκεται με βεβαιότητα 100% ανάμεσα στις τιμές $-\infty$ και $+\infty$. Ωστόσο η πληροφορία αυτή είναι τόσο απόλυτα σωστή, όσο και απόλυτα άχρηστη, με την έννοια ότι δε δηλώνει τίποτα άλλο εκτός από το τετριμμένο, ότι μια μέτρηση που κάνουμε έχει κάποια τιμή, ή ότι έχει την τιμή που μετράμε αλλά με άπειρο σφάλμα.

Το ζητούμενό μας επομένως δεν είναι αυτό. Το ζητούμενό μας είναι να προσδιορίσουμε αυτές τις δυο τιμές, έτσι ώστε η αβεβαιότητάς μας για την πραγματική τιμή της μέτρηση να είναι η ελάχιστη δυνατή, (δηλαδή, το σφάλμα να είναι το ελάχιστο δυνατό). Αντιλαμβάνεται κανείς ότι αυτό γίνεται μόνο όταν οι δυο αυτές τιμές βρεθούν όσο το δυνατό πιο κοντά η μια στην άλλη. Βεβαίως αυτό δεν καθορίζεται από τη δική μας επιθυμία να έχουμε το ελάχιστο δυνατό σφάλμα, αλλά από τη δυνατότητα του οργάνου μέτρησης να μας επιτρέψει να ξεχωρίσουμε πάνω στην κλίμακά του με βεβαιότητα τις δύο αυτές τιμές. Η ελάχιστη απόσταση, που μπορούμε να ξεχωρίσουμε με βεβαιότητα πάνω στην κλίμακα ενός οργάνου μέτρησης, είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές γραμμές της κλίμακας. Έτσι σ' ένα χάρακα είναι αδύνατο να μπορούμε να διαβάσουμε μια μέτρηση μικρότερη από $1mm$, ή στην καλύτερη περίπτωση $0.5mm$. Κατά συνέπεια η ελάχιστη δυνατή αβεβαιότητα με την οποία μετράμε ένα μέγεθος, συνδέεται με την αδυναμία μας να διαβάσουμε πάνω στο όργανο κάτι λιγότερο από την απόσταση δύο διαδοχικών γραμμών της κλίμακάς του.

Αν π.χ. μετράμε με το χάρακα ένα μήκος $82.3cm$, αυτό σημαίνει ότι η



Σχήμα 1.2: Η αληθινή τιμή και η μέτρηση με σφάλμα $\pm 0.1cm$



Σχήμα 1.3: Η αληθινή τιμή και η μέτρηση με σφάλμα $\pm 0.05cm$

αληθινή τιμή του μήκους που θέλουμε να μετρήσουμε, βρίσκεται πολύ κοντά στην ένδειξη 82.3, που φαίνεται πάνω στο χάρακα [9] και σίγουρα είναι ανάμεσα στις ενδείξεις 82.2 και 82.4. Όπως είπαμε, για τη μέτρησή μας αυτή πρέπει να γράψουμε ότι το μήκος που μετρήσαμε είναι $82.3 \pm 0.1cm$ και μ' αυτό να υποδηλώνουμε ότι η αληθινή τιμή του μήκους που μετρήσαμε βρίσκεται στην περιοχή $[82.3 - 0.1, 82.3 + 0.1]$ ή αλλιώς στο $[82.2, 82.4]$ (βλέπε σχήμα 1.2).

Ωστόσο, θα μπορούσε κανείς να πει ότι αυτό το διάστημα είναι μάλλον υπερεκτιμημένο, αφού έχουμε δυνατότητα με το μάτι να διακρίνουμε πάνω στο χάρακα το εύρος ενός χιλιοστού, μέσα στο οποίο θα μπορούσε να βρίσκεται η μέτρησή μας (βλέπε σχήμα 1.3). Μπορεί να κάνει κάποιος αυτή τη θεώρηση, αρκεί να είναι σίγουρος ότι οι μετρήσεις που κάνει είναι σωστές. Σ' αυτή την περίπτωση θα πρέπει να γράψουμε ότι η μέτρησή μας είναι $82.25 \pm 0.05cm$, αναγνωρίζοντας όμως ότι η ελάχιστη δυνατή διαφορά, που μπορούμε να ξεχωρίσουμε στην κλίμακα του οργάνου, είναι $0.05cm$ και όχι $0.1cm$. Μ' αυτή τη θεώρηση, το διάστημα μέσα στο οποίο θα μπορούσε να βρεθεί η αληθινή τιμή του μήκους που μετράμε θα ήταν το $[82.20, 82.30]$.

Όποια από τις δύο θεωρήσεις κι αν κάνει κανείς είναι σωστές. Θα πρέπει όμως από την αρχή να επιλέξει ποιά θεώρηση θα ακολουθήσει και στη συνέχεια

[9] όπως είπαμε θα ήταν απίθανο να συμπέσει μια μέτρηση με την απόλυτα ακριβής τιμή του μετρούμενου μεγέθους, αλλά και αν συνέπιπτε δε θα το γνωρίζαμε

να την ακολουθήσει πιστά μέχρι το τέλος.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω λογική θα μπορούσαμε να διερωτηθεί κανείς αν θα μπορούσε, χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία, να θεωρήσει ως σφάλμα της μέτρησης το $1/3mm$ ή το $1/4mm$, θεωρώντας ότι μπορεί να ξεχωρίσει διαφορές $1/3$ ή $1/4$ του χιλιοστού. Ακόμα όμως κι αν μπορούσε κάποιος πράγματι να ξεχωρίσει αυτές τις διαφορές [10], αυτό θα ήταν πολύ παρακινδυνευμένο, γιατί μόνο με το μάτι, χωρίς κατάλληλη πρότερη βαθμονόμηση του οργάνου, θα ήταν αρκετά δύσκολο να ξεχωρίσει με βεβαιότητα τα όρια ανάμεσα στα διαστήματα $1/3$, $2/3$ και 1 της υποδιαίρεσης του $1mm$, ή τα αντίστοιχα όρια των $1/4$, $2/4$, $3/4$ και 1. Έτσι θα υπήρχε μεγάλη πιθανότητα να πάρει λάθος μετρήσεις. Κατά συνέπεια το να θεωρήσει κανείς ως σφάλμα, κάτι λιγότερο από το (πολύ - πολύ) το μισό της διαφοράς δύο διαδοχικών ενδείξεων του οργάνου, δε θα ήταν σωστό. Το καλύτερο επομένως που έχουμε να κάνουμε είναι να περιοριστούμε σε σφάλμα το πολύ πολύ ίσο με την ελάχιστη δυνατή διαφορά ή με το μισό της ελάχιστης δυνατής διαφοράς δύο διαδοχικών ενδείξεων (γραμμών) του οργάνου. Κατά συνέπεια το σφάλμα που κάνουμε σε μια και μόνη μέτρηση είναι ίσο με την ελάχιστη αυτή δυνατή διαφορά μετρήσεων που μπορεί να κάνει το όργανο.

Αυτή την ελάχιστη δυνατή διαφορά, που μπορεί να μετρήσει ένα όργανο, την ονομάζουμε **σφάλμα του οργάνου**.

Αν έχουμε κάνει μία και μόνη μέτρηση, τότε το σφάλμα του οργάνου [11] **αποτελεί το σφάλμα της μέτρησής μας.**

Στην περίπτωση που έχουμε ένα ψηφιακό όργανο, όπου όπως είπαμε η μέτρηση εμφανίζεται ως ένδειξη ενός αριθμού σε μια οθόνη, τα πράγματα είναι ακριβώς τα ίδια, με τη διαφορά ότι εδώ η ένδειξη δεν εμφανίζεται στις γραμμές της κλίμακας, αλλά με αριθμούς στην οθόνη. Σ' αυτή την περίπτωση η διαφορά καθορίζεται πάλι από την ελάχιστη δυνατή διαφορά δύο διαδοχικών ενδείξεων του οργάνου.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί σ' αυτό το σημείο ότι δεν έχουν όλα τα όργανα μέτρησης γραμμικές κλίμακες [12]. Σ' αυτή την περίπτωση το σφάλμα καθορίζεται από την ελάχιστη δυνατή διαφορά των ενδείξεων στην περιοχή της ένδειξης, που δείχνει την τιμή της μέτρησης.

1.4 Αντιμετώπιση τυχαίων σφαλμάτων

Επειδή υπάρχουν τα τυχαία σφάλματα, μια και μόνη μέτρηση δεν είναι πάντα αρκετή, για να έχουμε ένα αξιόπιστο αποτέλεσμα. Αν δηλαδή μετράμε με ένα

[10] στο χάρακα δεν μπορούμε να το κάνουμε

[11] λέγεται και μέγιστο σφάλμα οργάνου

[12] γραμμική είναι μια κλίμακα στην οποία η κλιμάκωση είναι σταθερή, δηλαδή οι αποστάσεις διαδοχικών ενδείξεων είναι ίσες μεταξύ τους και μετράνε ίσες διαφορές

όργανο μέτρησης και παίρνουμε διαφορετικές μετρήσεις, για το ίδιο μέγεθος, υπό τις ίδιες συνθήκες, τότε χρειάζεται να αντιμετωπίσουμε με στατιστικό τρόπο τις μετρήσεις αυτές. Πριν προχωρήσουμε στην ουσία του προβλήματος, θα δώσουμε πρώτα τον ορισμό της στατιστικής κατανομής.

Στατιστική κατανομή είναι μια συνάρτηση η οποία μας δίνει την πιθανότητα να εμφανιστεί μια τιμή από ένα πλήθος επιτρεπτών (πιθανών) τιμών.

1.4.1 Μέση τιμή και τυπική απόκλιση

Δύο πολύ βασικές έννοιες στη στατιστική είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση. Για μετρήσεις λοιπόν που είναι αποτέλεσμα τυχαίων σφαλμάτων (και επομένως αντιμετωπίζονται με μεθόδους στατιστικής) η μέση τους τιμή και η τυπική τους απόκλιση είναι δύο πολύ σημαντικές παράμετροι.

Ορίζουμε ως **μέση τιμή** $\langle x \rangle$ [13] των μετρήσεων του μεγέθους x, την ποσότητα

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1.3}$$

όπου x_i η i - μέτρηση του μεγέθους x και N ο αριθμός των μετρήσεων.

Ως **τυπική απόκλιση** σ των μετρήσεων του μεγέθους x, ορίζουμε την ποσότητα [14]

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle)^2} \tag{1.4}$$

Το τετράγωνο δηλαδή της τυπικής απόκλισης είναι η μέση τιμή των τετραγώνων των διαφορών των μετρήσεων από τη μέση τιμή τους.

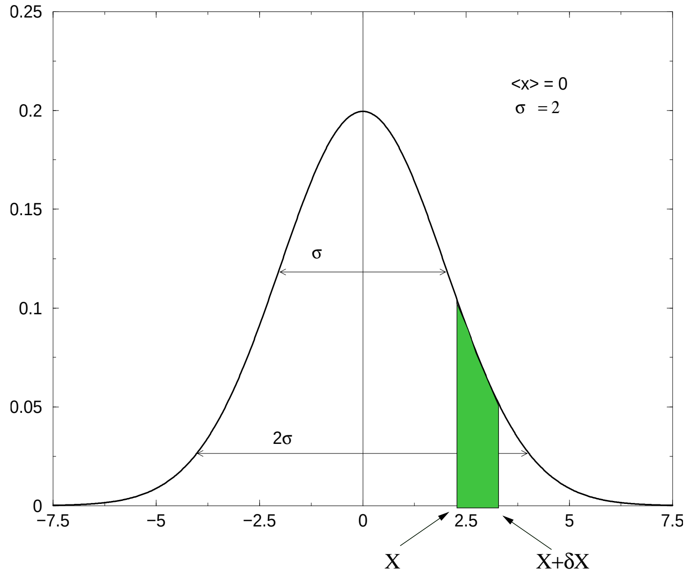
1.4.2 Γκαουσιανή κατανομή

Οι μετρήσεις που προκύπτουν ως αποτέλεσμα τυχαίων σφαλμάτων, ακολουθούν μια Γκαουσιανή κατανομή [15]. Αυτό προκύπτει από το κεντρικό οριακό θεώρημα της θεωρίας πιθανοτήτων.

[13] εκτός του συμβολισμού $\langle x \rangle$, χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός $\bar{x}$ ή μ

[14] μπορεί να δείτε σε άλλα βιβλία τον ορισμό της τυπικής απόκλισης όπου στον παρανομαστή, αντί για N υπάρχει $N-1$. Αυτό έχει να κάνει περισσότερο με τη μαθηματική ακρίβεια, παρά με την ουσία. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όποιο ορισμό από τους δύο θέλετε. Στην περίπτωση όμως που χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με $N-1$, τότε το τυπικό σφάλμα, που θα δούμε παρακάτω, είναι ίδιο με την τυπική απόκλιση. Ας σημειωθεί ότι η διαφορά των δύο ορισμών είναι αμελητέα για μεγάλα N.

[15] λέγεται αλλιώς και κατανομή $Gauss$ ή κανονική κατανομή



Σχήμα 1.4: Η Γκαουσιανή κατανομή. Το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής είναι η πιθανότητα να βρεθεί μια μέτρηση ανάμεσα στις τιμές X και $X + \delta X$

Η Γκαουσιανή κατανομή $G(x;\mu,\sigma)$ [16] έχει τη μορφή

$$\boxed{G(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad (1.5)}$$

και εξαρτάται παραμετρικά από τις ποσότητες μ και σ. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι παράμετροι μ και σ εκφράζουν τη μέση τιμή και τυπική απόκλιση αντίστοιχα.

Η Γκαουσιανή κατανομή δίνει τη λεγόμενη **πυκνότητα πιθανότητας** dP/dx, δηλαδή την πιθανότητα ανά μονάδα του μετρούμενου μεγέθους, να μετρηθεί η τιμή x. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα $P(x = X)$ να μετρηθεί η τιμή $x = X$ είναι ίση με $P(x = X) = G(X)dx$ [17] και επομένως η πιθανότητα να μετρηθεί μια τιμή στο διάστημα $[X, X + \delta X]$ είναι ίση με το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στην καμπύλη $G(x)$ και την ευθεία xx', και τις ευθείες $x = X$ και $x = X + \delta X$ (βλέπε σχήμα 1.4). Αυτό το εμβαδόν εκφράζεται από το ολοκλήρωμα

$$P(X \leq x \leq X + \delta X) = \int_X^{X+\delta X} G(x)dx \qquad (1.6)$$

Το σύμβολο $P(X \leq x \leq X + \delta X)$ συμβολίζει την πιθανότητα να μετρήσουμε το μέγεθος x και να το βρούμε ανάμεσα στις τιμές X και $X + \delta X$.

[16] ο συμβολισμός $G(x;\mu,\sigma)$ αντί του απλούστερου $G(x)$, μπαίνει εδώ για να υποδηλώσει ρητά την εξάρτηση της Γκαουσιανής κατανομής από τις παραμέτρους μ και σ.Σε κάθε περίπτωση οι συμβολισμοί $G(x)$ και $G(x;\mu,\sigma)$ υποδηλώνουν την ίδια συνάρτηση.

[17] επειδή το dx είναι μια απείρως μικρή ποσότητα (απειροστό), η πιθανότητα $G(x)dx$, να μετρηθεί ακριβώς η τιμή x, είναι προφανώς μηδέν

1.4.3 Πιθανότερη τιμή και σφάλμα μιας μέτρησης

Από τη σχέση 1.5 βλέπουμε ότι όταν $x = \mu$, τότε ο παράγοντας $e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ παίρνει την τιμή 1, που είναι η μέγιστη τιμή του. Τότε όμως και η κανονική κατανομή παίρνει επίσης τη μέγιστη τιμή της. Όπως είπαμε η παράμετρος μ είναι η μέση τιμή. Επομένως

η πραγματική τιμή του μεγέθους που μετράμε, είναι πιθανότερο να είναι ίση με τη μέση τιμή των μετρήσεών του.

Αυτό φαίνεται και από την ίδια την καμπύλη της κατανομής (βλέπε σχήμα 1.4), όπου μετρήσεις γύρω από τη μέση τιμή έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να εμφανιστούν, ενώ όσο μια μέτρηση απομακρύνεται από τη μέση τιμή, η πιθανότητα εμφάνισής της μειώνεται. Πολύ μακριά από τη μέση τιμή η πιθανότητα εμφάνισης μια μέτρησης είναι πρακτικά μηδέν.

Όπως είναι προφανές, η μέση τιμή βρίσκεται ανάμεσα στη μέγιστη και στην ελάχιστη τιμή των μετρήσεων. Αν όλες οι μετρήσεις x_i είναι ίδιες μεταξύ τους, τότε αντιλαμβάνεστε ότι η μέση τους τιμή θα ταυτίζεται μ' αυτές. Όμως τότε η διαφορά ανάμεσα σε οποιαδήποτε μέτρηση από τη μέση τιμή είναι μηδέν και κατά συνέπεια και η τυπική απόκλιση είναι μηδέν. Αντίθετα όσο πιο απομακρυσμένα είναι κατανεμημένες οι μετρήσεις από τη μέση τους τιμή, τόσο πιο μεγάλες θα είναι οι διαφορές $x_i - \langle x \rangle$ και επομένως τόσο μεγαλύτερη θα είναι η τυπική τους απόκλιση σ.

Καταλαβαίνει λοιπόν κανείς ότι

η τυπική απόκλιση σ δίνει ένα μέτρο της διασποράς των μετρήσεων γύρω από τη μέση τους τιμή.

Κατά συνέπεια, είναι λογικό, η στατιστική εκτίμηση του σφάλματος να σχετίζεται με την τυπική απόκλιση και μάλιστα να εκφράζεται ως κάποιο πολλαπλάσιο της τυπικής απόκλισης σ. Η ελευθερία στην επιλογή του πολλαπλάσιου αυτού κάνει τον τρόπος εκτίμησης του στατιστικού σφάλματος να μην είναι μονοσήμαντος. Ποιό πολλαπλάσιο λοιπόν της τυπικής απόκλισης θα θεωρήσουμε ως σφάλμα; Η πιθανότητα να εμφανιστεί μια μέτρηση στην περιοχή από $\mu - \sigma$ ως $\mu + \sigma$ (δηλαδή το εμβαδόν κάτω από την Γκαουσιανή καμπύλη και ανάμεσα στις ευθείες $x = \mu - \sigma$ και $x = \mu + \sigma$) είναι ίση με 68.2%, [18], ενώ η πιθανότητα να βρεθεί μια μέτρηση ανάμεσα στις τιμές $\mu - 2\sigma$ και $\mu + 2\sigma$ είναι ίση με 95.4%.

Για τις ανάγκες του παρόντος μαθήματος θα δεχτούμε ως στατιστικό σφάλμα το λεγόμενο **τυπικό σφάλμα (standard error)**, που ορίζεται από τη σχέση

$$\boxed{\sigma_E = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\ \sigma. \qquad (1.7)}$$

[18] περίπου τα 2/3 των μετρήσεων

Αντιλαμβάνεται κανείς ότι για μεγάλο N το τυπικό σφάλμα γίνεται ίσο με την τυπική απόκλιση και κατά συνέπεια μέσα στα όρια του τυπικού σφάλματος περιλαμβάνονται περίπου τα $2/3$ των μετρήσεων. Δεν θα πρέπει να ξεχνάμε όμως ότι υπάρχει και το σφάλμα του οργάνου. Ποιό θα είναι λοιπόν τελικά το σφάλμα της μέτρησης; Η απάντηση είναι απλή. Θα είναι το μεγαλύτερο ανάμεσα στα δύο. Αυτό λίγο ως πολύ είναι προφανές, δεδομένου ότι η αβεβαιότητα στην ακριβή τιμή της μέτρησης προέρχεται και από τα δύο και επομένως η μεγαλύτερη αβεβαιότητα επισκιάζει τη μικρότερη.

Σφάλμα επομένως **μιας άμεσης μέτρησης** θα θεωρούμε το μέγιστο ανάμεσα στο σφάλμα του οργάνου και στο τυπικό σφάλμα.

Προκειμένου να απλοποιήσει κανείς τις πράξεις που πρέπει να κάνει για να βρει την τυπική απόκλιση, βολεύει, αντί της σχέσης 1.4, να χρησιμοποιήσει την παρακάτω σχέση για την τυπική απόκλιση. Η σχέση αυτή μπορεί να αποδειχτεί πολύ εύκολα από τη σχέση 1.4.

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \qquad \text{όπου} \qquad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2. \tag{1.8}$$

1.4.4 Σχέση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης με τη Γκαουσιανή κατανομή [19]

Ας θεωρήσουμε ότι οι N μετρήσεις x_i, που κάνουμε, παίρνουν κάποιες από τις διαφορετικές μεταξύ τους τιμές X_j, $j = 1, 2, ..., M$, $M \leq N$ και ας συμβολίσουμε με $n(j)$ τη συχνότητα εμφάνισης της τιμής X_j, δηλαδή τον αριθμό που μας λέει πόσες από τις N μετρήσεις x_i είχαν την τιμή X_j. Όπως είναι προφανές το άθροισμα όλων των μετρήσεων θα είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των διαφορετικών τιμών επί τη συχνότητα εμφάνισής τους.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{j=1}^{M} X_j n(j)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να γράψουμε τη μέση τιμή ως

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{M} X_j n(j) = \sum_{j=1}^{M} X_j \frac{n(j)}{N} = \sum_{j=1}^{M} X_j P(X_j). \tag{1.9}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι για άπειρο αριθμό μετρήσεων, ο αριθμός $n(j)/N$ τείνει στην πιθανότητα $P(x = X_j) = P(X_j)$.

[19] Η υποπαράγραφος αυτή μπορεί να παραληφθεί σε πρώτη ανάγνωση

Είπαμε παραπάνω ότι η πιθανότητα $P(x = X)$ να μετρηθεί η τιμή $x = X$ είναι ίση με $P(x = X) = G(X)dx$. Κατά συνέπεια η παραπάνω ισότητα μπορεί να γραφεί ως

$$\langle x \rangle = \sum_{j=1}^{M} X_j P(X_j) = \sum_{j=1}^{M} X_j G(X_j) dx. \tag{1.10}$$

Επειδή όμως η Γκαουσιανή κατανομή είναι μια συνεχής κατανομή, το άθροισμα θα πρέπει να αντικατασταθεί με ολοκλήρωμα κι έτσι θα έχουμε

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x G(x; \mu, \sigma) dx. \tag{1.11}$$

Κατ' αναλογία για την τυπική απόκλιση [20] μπορούμε να γράψουμε

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 G(x; \mu, \sigma) dx. \tag{1.12}$$

Από την επίλυση αυτών των ολοκληρωμάτων βρίσκουμε ότι η παράμετρος μ είναι ίση με τη μέση τιμή $\langle x \rangle$ των μετρήσεων ($\mu = \langle x \rangle$) και ότι η παράμετρος σ της γκαουσιανής κατανομής είναι ίση με την τυπική απόκλιση σ.

1.4.5 Κριτήριο Chauvenet - Απόρριψη ακραίων μετρήσεων

Όπως είπαμε, οι μετρήσεις που εμπεριέχουν τυχαία σφάλματα ακολουθούν μια κανονική κατανομή και διασπείρονται συμμετρικά γύρω από τη μέση τιμή. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.4, η πιθανότητα εμφάνισης μιας μέτρησης, που βρίσκεται κοντά στη μέση τιμή, είναι μεγάλη και μειώνεται πολύ γρήγορα όσο η μέτρηση βρίσκεται μακριά απ' αυτή. Είναι επομένως τελείως "φυσιολογικό" και αναμενόμενο, να εμφανίζονται και ακραίες μετρήσεις (δηλ. μετρήσεις που βρίσκονται σχετικά μακριά από τη μέση τιμή), αν η πιθανότητα εμφάνισής τους, (όπως αυτή υπολογίζεται από τη Γκαουσιανή κατανομή), τους το επιτρέπει.

Πάντα ωστόσο θα υπάρχει μια περιοχή μετρήσεων στα αριστερά (από το $-\infty$ μέχρι μια τιμή) και στα δεξιά (από μια άλλη τιμή μέχρι το $+\infty$)της κατανομής, όπου επί N μετρήσεων η πιθανότητα εμφάνισης μέτρησης θα είναι μικρότερη του $1/N$. Αυτό είναι ισοδύναμο με συχνότητα εμφάνισης μιας μέτρησης σ' αυτές τις περιοχές μικρότερη της μονάδας. Πρακτικά μιλώντας δηλαδή, στις περιοχές αυτές δε θα έπρεπε να εμφανίζεται μέτρηση. Όμως όταν μιλάει κανείς με πιθανότητες, εκφράσεις του στυλ "δε θα έπρεπε να εμφανίζεται μέτρηση" δε σημαίνει ότι αποκλείεται να εμφανιστούν. Από τη στιγμή που η πιθανότητα είναι μη μηδενική, τα πάντα είναι πιθανά. Έτσι παρ' όλο που "δε θα έπρεπε", δεν αποκλείεται καθόλου να εμφανιστούν τέτοιες ακραίες τιμές.

Η εμφάνιση τέτοιων ακραίων τιμών ενδέχεται να αλλοιώσει αρκετά τη μέση τιμή και προφανώς να μεγαλώσει την τιμή της τυπικής απόκλισης και κατ'

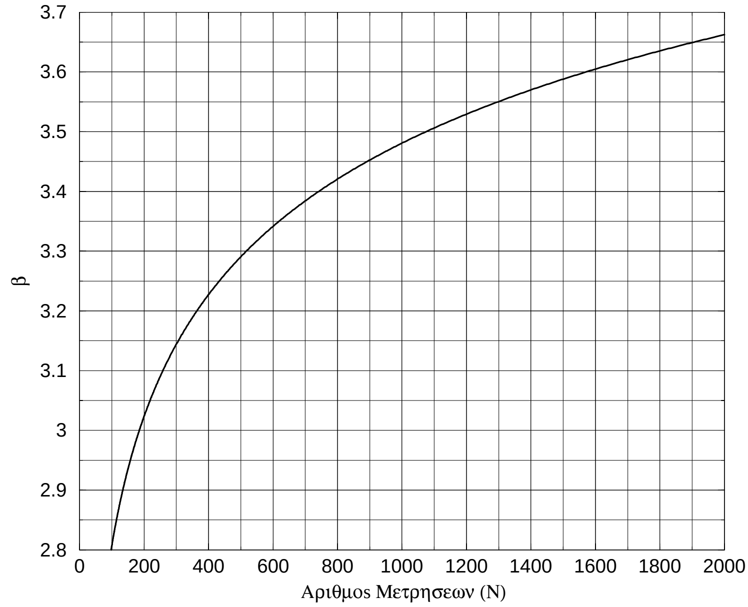
[20] ας μην ξεχνάμε ότι το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης εκφράζει κι αυτό μια μέση τιμή

N	β	N	β	N	β	N	β
1	-	11	2.001	21	2.261	40	2.498
2	-	12	2.037	22	2.278	50	2.576
3	1.383	13	2.070	23	2.295	60	2.639
4	1.534	14	2.101	24	2.311	70	2.690
5	1.645	15	2.128	25	2.326	80	2.734
6	1.732	16	2.154	26	2.341	90	2.773
7	1.803	17	2.178	27	2.355	100	2.807
8	1.863	18	2.201	28	2.369	200	3.023
9	1.915	19	2.222	29	2.382	500	3.290
10	1.960	20	2.242	30	2.394	1000	3.481

Πίνακας 1.1: Η τιμή του β ως συνάρτηση του αριθμού μετρήσεων N.

επέκταση του σφάλματος της μέτρησης. Φανταστείτε π.χ. να έχουμε 100 μετρήσεις εκ των οποίων οι 99 να παίρνουν τιμές από 8.04 μέχρι 8.64 και να δίνουν μια μέση τιμή 8.34, ενώ η εκατοστή τιμή να είναι η 11.42 (ακραία τιμή). Σ' αυτή την περίπτωση θα ήταν λογικό να υποθέσει κανείς ότι η εμφάνιση αυτής της ακραίας τιμής δεν είναι "φυσιολογική". Ωστόσο δεν παύει να αποτελεί μια μέτρηση, που ενδεχομένως εμφανίστηκε νωρίτερα απ' ότι θα περίμενε κανείς με βάση την πιθανότητα εμφάνισής της, όπως αυτή υπολογίζεται από την Γκαουσιανή κατανομή. Αν θέλαμε να δούμε πόσο επηρεάζεται η μέση τιμή απ' αυτή, θα βλέπαμε ότι η μέση τιμή των 100 μετρήσεων είναι ίση με $(99 \times 8.34 + 11.42)/100 = 8.37$, που διαφέρει κατά 0.03 από τη μέση τιμή των 99. Αν από την άλλη θέλαμε να δούμε πόσο επηρεάζεται η τυπική απόκλιση, υποθέτοντας ότι η τυπική απόκλιση των 99 μετρήσεων έχει μια τιμή ίση με το μισό της διαφοράς της μέγιστης από την ελάχιστη τιμή, δηλαδή είναι ίση με 0.3, τότε λαμβάνοντας υπ' όψη μας και την εκατοστή τιμή, η τυπική απόκλιση θα γινόταν $\sqrt{(0.3^2 \times 99 + (8.34 - 11.42)^2)/100} \approx 0.4$. Τόσο λοιπόν η μέση τιμή όσο και η τυπική απόκλιση αλλάζουν τιμή, πράγμα που δε θα γινόταν αν αυτή η ακραία τιμή δεν είχε συμπεριληφθεί στις μετρήσεις μας.

Ένας τρόπος για να ελαχιστοποιηθεί η επίδραση της ακραίας αυτής τιμής στη μέση τιμή, είναι να πάρουμε περισσότερες μετρήσεις. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ωστόσο θα χρειαζόταν να γίνουν τουλάχιστον 616 συνολικά μετρήσεις, εκ των οποίων οι 615 να έδιναν μέση τιμή ίση με την αρχική (8.34), ώστε η ακραία αυτή μέτρηση (11.42) να μην επηρέαζε την αρχική μέση τιμή. Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς ότι η μέθοδος αυτή δεν είναι η ενδεδειγμένη δεδομένης της αρκετά περισσότερης δουλειάς, που θα χρειαζόταν, προκειμένου να απαλλαχθεί κανείς από την επίδρασή της. Ο άλλος τρόπος, ο οποίος μάλιστα είναι πολύ πιο αποτελεσματικός και λιγότερο κοπιώδης, είναι να απορρίψουμε μια και καλή τέτοιες ακραίες τιμές, ως "ύποπτες" και "εσφαλμένες", μη λαμβάνοντας τις υπ' όψη μας στους υπολογισμούς μας. Το ερώτημα όμως που τίθεται



Σχήμα 1.5: Η τιμή του β ως συνάρτηση του αριθμού μετρήσεων N.

είναι ποιές μετρήσεις πρέπει να θεωρηθούν ακραίες. Είπαμε παραπάνω ότι αν έχουμε N μετρήσεις, τότε στις ακραίες περιοχές, αριστερά και δεξιά της κατανομής, στις οποίες η συνολική [21] πιθανότητα εμφάνισης μιας μέτρησης είναι μικρότερη από $1/N$, δε θα περιμέναμε να εμφανιστούν μετρήσεις. Επομένως σ' αυτές τις περιοχές θα πρέπει κανείς να αναζητήσει τις ακραίες τιμές, που πρέπει να απορριφθούν. Σύμφωνα με το κριτήριο Chauvenet, μια μέτρηση θεωρείται ακραία και απορρίπτεται όταν εμφανιστεί σε περιοχή των άκρων της κατανομής, όπου η συνολική πιθανότητα εμφάνισης μέτρησης είναι μικρότερη από $0.25/N$. Οι μαθηματικές λεπτομέρειες του κριτηρίου περιγράφονται σε παρακάτω παράγραφο και μπορούν να παραλειφθούν σε πρώτη ανάγνωση. Τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε για να εφαρμόσουμε το κριτήριο Chauvenet είναι τα ακόλουθα.

- Για τις N μετρήσεις που έχουμε υπολογίζουμε τη μέση τιμή $\langle x \rangle$ και την τυπική απόκλιση σ των μετρήσεων αυτών.

- Από τον πίνακα 1.1 ή τη γραφική παράσταση 1.5 βρίσκουμε τον αριθμό β που αντιστοιχεί στον αριθμό των μετρήσεων N και υπολογίζουμε τους αριθμούς $\langle x \rangle - \beta\sigma$ και $\langle x \rangle + \beta\sigma$.

- Όσες μετρήσεις δε βρίσκονται μέσα στο διάστημα $[\langle x \rangle - \beta\sigma, \langle x \rangle + \beta\sigma]$ απορρίπτονται ως ακραίες.

[21] συνολική σημαίνει σε όλη την περιοχή

- Το κριτήριο Chauvenet εφαρμόζεται μία μόνο φορά [22].

1.4.6 Μαθηματική διερεύνηση του κριτηρίου Chauvenet [23]

Όπως είπαμε παραπάνω, σύμφωνα με το κριτήριο Chauvenet, μια μέτρηση απορρίπτεται όταν βρεθεί σε μια από τις δύο ακραίες περιοχές της Γκαουσιανής κατανομής (από το $-\infty$ ως μια τιμή x_L ή από μια τιμή x_R ως το $+\infty$), όπου για κάθε μιά απ' αυτές τις περιοχές η συνολική πιθανότητα εμφάνισης μιας μέτρησης είναι μικρότερη από $0.5/N$. Το ζητούμενό μας επομένως είναι να βρούμε αυτές τις τιμές x_L και x_R, έτσι ώστε

$$P(x < x_L) < \frac{0.25}{N} \qquad \text{και} \qquad P(x > x_R) < \frac{0.25}{N}. \tag{1.13}$$

Αυτό ισοδύναμα γράφεται ως

$$P(x < x_L) = \int_{-\infty}^{x_L} G(x;\mu,\sigma)dx = \int_{-\infty}^{x_L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx < \frac{0.25}{N} \tag{1.14}$$

και

$$P(x > x_R) = \int_{x_R}^{+\infty} G(x;\mu,\sigma)dx = \int_{x_R}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx < \frac{0.25}{N} \tag{1.15}$$

Με αλλαγή μεταβλητής από x σε $y = (x-\mu)/\sigma$, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται ως

$$\int_{-\infty}^{\beta_L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy < \frac{0.25}{N} \qquad \text{και} \qquad \int_{\beta_R}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy < \frac{0.25}{N}, \tag{1.16}$$

όπου $\beta_L = (x_L - \mu)/\sigma$ και $\beta_R = (x_R - \mu)/\sigma$. Αν επίσης στο πρώτο ολοκλήρωμα κάνουμε μια επιπλέον αλλαγή μεταβλητής από y σε $-y$ παίρνουμε

$$\int_{-\beta_L}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy < \frac{0.25}{N}. \tag{1.17}$$

Συγκρίνοντας τη δεύτερη σχέση από τις εξισώσεις 1.16 με τη σχέση 1.17 αντιλαμβάνεται κανείς ότι $\beta_R = -\beta_L = \beta$ και κατά συνέπεια $x_L = \mu - \beta\sigma$ και $x_R = \mu + \beta\sigma$. Το ζητούμενο δηλαδή τελικά είναι ο υπολογισμός του β για το οποίο

$$\int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \frac{0.25}{N}. \tag{1.18}$$

Όπως βλέπει κανείς, το τελευταίο ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από την τιμή του β και είναι απαλλαγμένο από τις τιμές των μ και σ.

---

[22] δε βρίσκουμε εκ νέου μέση τιμή και τυπική απόκλιση για τις μη απορριφθείσες τιμές για να εφαρμόσουμε ξανά το κριτήριο.

[23] Η υποπαράγραφος αυτή μπορεί να παραληφθεί σε πρώτη ανάγνωση

Η τιμή του ολοκληρώματος αυτού δεν υπολογίζεται αναλυτικά [24], αλλά μόνο αριθμητικά και παριστάνει την πιθανότητα να βρεθεί μια μέτρηση με τιμή στο διάστημα $(-\infty, \langle x \rangle - \beta\sigma)$ ή την πιθανότητα να βρεθεί μια μέτρηση με τιμή στο διάστημα $(\langle x \rangle + \beta\sigma, \infty)$.

Την παραπάνω σχέση όμως μπορούμε να τη γράψουμε με πιο συμπαγή μορφή μέσω της λεγόμενης συνάρτησης σφάλματος (error function) $erf(x)$ ή της λεγόμενης συμπληρωματικής συνάρτησης σφάλματος (complementary error function) $erfc(x)$. Εξ ορισμού

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \qquad \text{και} \qquad erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt \tag{1.19}$$

και $erf(x) + erfc(x) = 1$.

Με αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα της σχέσης 1.18 από y σε $t = y/\sqrt{2}$, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{\frac{\beta}{\sqrt{2}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right), \tag{1.20}$$

και επομένως η σχέση 1.18 γράφεται ως

$$\boxed{erfc\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right) = \frac{0.5}{N}.} \tag{1.21}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης αυτής ως προς β για τις διάφορες τιμές του N (αριθμός μετρήσεων), παρουσιάζονται στον πίνακα 1.1 και στη γραφική παράσταση 1.5.

Όταν γνωρίζουμε την τιμή της μεταβλητής β, μπορούμε πολύ εύκολα μέσω της σχέσης $x = \mu \pm \beta\sigma$ να προσδιορίσουμε τις τιμές $x_L = \mu - \beta\sigma$ και $x_R = \mu + \beta\sigma$, για τις οποίες αριστερά της πρώτης και δεξιά της δεύτερης οι μετρήσεις πρέπει να απορρίπτονται ως ακραίες.

Ας σημειωθεί ότι η συνάρτηση $erfc(x)$ υπάρχει έτοιμη στις πρόσφατες εκδόσεις του προγράμματος EXCEL του MS Office[25]. Κατά συνέπεια είναι εύκολο σε όποιο θέλει να βρει τις τιμές του β για οποιαδήποτε τιμή του N, χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.21 με τη μορφή

$$N = \frac{0.5}{erfc\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)}. \tag{1.22}$$

Το μόνο που έχει να κάνει, είναι να φτιάξει μια στήλη με αυξανόμενες τιμές του β. Μετά να φτιάξει μια διπλανή στήλη με τις τιμές της συνάρτησης $0.5/erfc(\beta/\sqrt{2})$. Οι τιμές της δεύτερης στήλης θα παριστάνουν τον αριθμό μετρήσεων N [26], που αντιστοιχεί στην τιμή του β της ίδιας γραμμής.

[24] δηλαδή με μαθηματικό τύπο

[25] σε παλιότερες εκδόσεις δεν υπήρχε

[26] μόνο οι ακέραιες τιμές ή αυτές που προσεγγίζουν καλύτερα τις ακέραιες τιμές

Μια μαθηματική σχέση που δίνει μια πολύ καλή προσέγγιση της συνάρτησης $ercf(x)$, δίνεται στο βιβλίο των Abramowitz και Stegun, Handbook of Mathematical Functions [27]. Η σχέση αυτή είναι

$$erfc(x) = e^{-x^2} \sum_{n=1}^{5} a_n t^n, \qquad t = \frac{1}{1+px}, \qquad p = 0.3275911, \tag{1.23}$$

$a_1 = 0.254829592$, $a_2 = -0.284496736$, $a_3 = 1.421413741$, $a_4 = -1.453152027$ και $a_5 = 1.061405429$.

1.4.7 Εν κατακλείδι...

Συνοψίζοντας όσα περιγράψαμε παραπάνω για το χειρισμό των τυχαίων σφαλμάτων, τα βήματα που πρέπει να κάνουμε είναι τα εξής:

- Μετράμε και καταγράφουμε τις N μετρήσεις x_i.
- Εφαρμόζουμε το κριτήριο Chauvenet (δες τα βήματα στην παράγραφο 1.4.5, σελίδα 24) και απορρίπτουμε όσες μετρήσεις είναι ακραίες.
- Υπολογίζουμε νέα μέση τιμή και τυπική απόκλιση και μέσω αυτής το τυπικό σφάλμα από τις μετρήσεις που δεν απορρίφθηκαν. Η νέα μέση τιμή έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι η πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Επομένως αυτή θεωρούμε ως τιμή της μέτρησης.
- Βρίσκουμε το σφάλμα του οργάνου και το συγκρίνουμε με το τυπικό σφάλμα. Το μέγιστο των δύο είναι το σφάλμα της μέτρησης.

1.4.8 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε τη σχέση 1.8 χρησιμοποιώντας τη σχέση 1.4. (Υπόδειξη: Αναπτύξτε το τετράγωνο $(x_i - \langle x \rangle)^2$ και υπολογίστε χωριστά τα αθροίσματα για καθένα από τους όρους του).

2. Χωρίς να κάνετε μαθηματικές πράξεις βρείτε τα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)dx \qquad \text{και} \qquad \int_{-\infty}^{\langle x \rangle} G(x)dx.$$

   Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

3. Θεωρήστε ότι σε ένα πείραμα διαδοχικών μετρήσεων του ποσοστού του νερού που υπάρχει στο σώμα ενός ανθρώπου κάναμε N μετρήσεις και βρήκαμε ένα μέσο όρο 71.5% και μια τυπική απόκλιση 1.1%. Μεταξύ των

[27] Abramowitz & Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, New York, 1965

N αυτών μετρήσεων υπήρξε μια ακραία μέτρηση ίση με 74.1%. Βρείτε αν αυτή η ακραία αυτή μέτρηση πρέπει να απορριφθεί όταν
(α) $N = 20$ και
(β) $N = 200$.

4. Θεωρήστε ότι μετρήσαμε τη θερμοκρασία ενός ανθρώπου 5 φορές διαδοχικά και πήραμε τις ακόλουθες μετρήσεις. 36.8, 36.9, 36.9, 37.0, 37.0 σε βαθμούς ^oC. Ποιά είναι τελικά η θερμοκρασία του ανθρώπου και πόσο σφάλμα κάνουμε στη μέτρησή της. (Υπόδειξη: Αντίστοιχο παράδειγμα θα βρείτε στο τέλος του βιβλίου)

5. (α) Εξηγήστε γιατί αν στις 99 μετρήσεις του παραδείγματος της σελίδας 23 προσθέσουμε και την εκατοστή (ακραία) μέτρηση, οι πράξεις που πρέπει να γίνουν για τον υπολογισμό της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης είναι αυτές που αναφέρονται.
(β) Πώς θα άλλαζε η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αν η εκατοστή τιμή βρισκόταν μέσα στο διάστημα $[8.03, 8.63]$, στο οποίο βρίσκονται οι υπόλοιπες 99 τιμές. (Υπόδειξη: η μεγαλύτερη δυνατή επίδραση της εκατοστής τιμής θα εμφανιζόταν, αν η εκατοστή τιμή ήταν όσο το δυνατό πιο απομακρυσμένη από τη μέση τιμή.)
(γ) Επαληθεύστε ότι όντως θα χρειαζόταν 615 μετρήσεις στο διάστημα $[8.03, 8.63]$ με μέση τιμή ίδια με αυτή των 99 αρχικών μετρήσεων, προκειμένου να εξουδετερωθεί η επίδραση της ακραίας τιμής στη μέση τιμή.

1.5 Απόλυτο και σχετικό σφάλμα

Όπως έχουμε πει, η πληροφορία που μας δίνει η μέτρηση $x \pm \delta x$ είναι η μεγαλύτερη δυνατή πληροφορία, που μπορούμε να έχουμε από μια μέτρηση. Μέχρι τώρα το ενδιαφέρον μας γύρω από τα σφάλματα περιοριζόταν, στο να βρούμε ένα εύρος τιμών, γύρω από την τιμή που μετρήσαμε, μέσα στο οποίο περιμένουμε να βρεθεί η αληθινή τιμή του μεγέθους. Το εύρος αυτό το ονομάσαμε **σφάλμα ή απόλυτο σφάλμα**.

Εκτός όμως από το εύρος μέσα στο οποίο περιμένουμε να βρίσκεται η πραγματική τιμή του μεγέθους που μετράμε, μια άλλη ενδιαφέρουσα και χρήσιμη πληροφορία είναι η **ακρίβεια της μέτρησης**, δηλαδή το πόσο καλά έχει προσδιοριστεί το μέγεθος που μετράμε. Αντιλαμβάνεστε ότι αν μετράμε μια απόσταση $1mm$ με ένα χάρακα, του οποίου το σφάλμα οργάνου είναι επίσης $1mm$, τότε η μέτρηση αυτή περιορίζεται στο διάστημα $[0, 2]mm$. Αυτό όμως είναι ένα τεράστιο διάστημα σε σχέση με την τιμή που μετρήθηκε. Επειδή η κλίμακα των mm είναι ίσως αρκετά μικρή και μπορεί να ξεγελάσει κάποιους, φανταστείτε η απόσταση αυτή να μην ήταν σε mm αλλά σε m. Τότε οτιδήποτε ήταν κοντά στο $1m$ θα λέγαμε ότι είναι μεταξύ 0 και $2m$. Φανταστείτε λοιπόν να έπρεπε να μετρήσουμε το ύψος μας με ένα τέτοιο αντίστοιχο όργανο μέτρησης. Οι μοναδικές μετρήσεις που θα μπορούσε να κάνει θα ήταν οι μετρήσεις $1m$ και $2m$. Όλους επομένως τους ανθρώπους θα τους κατέτασσε σε δύο κατηγορίες: σε αυτούς που το ύψος τους είναι περίπου $1m$ και αυτούς που το ύψος τους είναι περίπου $2m$. Μια τέτοια μέτρηση θα ήταν μάλλον άχρηστη για τις ανάγκες μας. Για να μετρούσαμε λοιπόν με μια μεγαλύτερη ακρίβεια την τιμή ενός τέτοιου μεγέθους θα έπρεπε μάλλον να χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορετικό όργανο μέτρησης.

Αντιθέτως μια απόσταση της τάξης των $20cm$, ο χάρακας τη μετράει με σαφώς καλύτερη ακρίβεια, αφού το μετρούμενο μέγεθος περιορίζεται στο διάστημα $[19.9, 20.1]cm$. Το διάστημα αυτό έχει βεβαίως το ίδιο εύρος με το διάστημα $[0, 2]cm$, όμως σε σχέση με την τιμή της μέτρησης το εύρος αυτό είναι πολύ μικρότερο στην περίπτωση $[19.9, 20.1]$ απ' ότι στην περίπτωση $[0, 2]$. Άλλο είναι να "χάνεις" 0.1 στα 20 και άλλο να "χάνεις" 0.1 στα 0.1.

Αντιλαμβάνεται επομένως κανείς ότι

> για να βγάλουμε συμπέρασμα πόσο ακριβής είναι μια μέτρηση, θα πρέπει να συγκρίνουμε το σφάλμα της μέτρησης ως προς τη μετρούμενη ποσότητα. Η σύγκριση αυτή μπορεί να γίνει μέσω του λόγου του σφάλματος προς τη μέτρηση. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται **σχετικό σφάλμα**.

Αν εκφράσουμε το σχετικό σφάλμα ως ποσοστό επί τοις εκατό, θα είναι

$$\boxed{\frac{\delta x}{x} \times 100\%. \qquad (1.24)}$$

Από μια άλλη οπτική γωνία, το σχετικό σφάλμα μας λέει πόσο θα ήταν το αντίστοιχο απόλυτο σφάλμα, αν η τιμή της μέτρησης ήταν ίση με τη μονάδα.

Έτσι η μέτρηση 1 ± 1 έχει σχετικό σφάλμα ίσο με 100%, ενώ η μέτρηση 20 ± 0.1 έχει σχετικό σφάλμα ίσο με 0.5%. Παρατηρήστε ότι το σχετικό σφάλμα είναι απλός αριθμός χωρίς μονάδες. Παρατηρήστε επίσης ότι το σχετικό σφάλμα δεν εξαρτάται από τις μονάδες που χρησιμοποιούμε για να εκφράσουμε τη μέτρηση. Έτσι το σχετικό σφάλμα έχει να κάνει μόνο με τη σχέση ανάμεσα στο απόλυτο σφάλμα και στην τιμή της μέτρησης και είναι το ίδιο ανεξάρτητα από το αν έχουμε να κάνουμε με mm, m, km η οτιδήποτε άλλο. **Όσο μικρότερο είναι το σχετικό σφάλμα τόσο ακριβέστερη είναι η μέτρηση που κάνουμε**. Κατά συνέπεια, αν θέλουμε να συγκρίνουμε δύο μετρήσεις ως προς την ακρίβεια με την οποία μετράνε ένα μέγεθος, θα πρέπει να ανατρέξουμε στο σχετικό σφάλμα τους. Η ακριβέστερη μέτρηση θα έχει το μικρότερο σχετικό σφάλμα.

1.5.1 Ασκήσεις

1. Βρείτε το σχετικό σφάλμα στις παρακάτω μετρήσεις
   (α) $(5 \pm 1)cm$, (β) $(5 \pm 1)km$, (γ) $(5.0 \pm 0.1)cm$, (δ) $(5.00 \pm 0.01)cm$, (ε)

$(10,00 \pm 0.02)cm$

2. Οι παρακάτω μετρήσεις είναι γραμμένες κατά ζεύγη. Ποιά από τις δύο, κάθε ζεύγους, είναι πιο ακριβής μέτρηση;
(α) $(5 \pm 1)cm$ και $(5 \pm 1)km$, (β) $(5 \pm 1)m$ και $(5 \pm 1)sec$, (γ) $(5 \pm 1)cm$ και $(5.0 \pm 0.1)cm$, (δ) $(5 \pm 1)cm$ και $(10 \pm 2)cm$, (ε) $(5 \pm 1)cm$ και $(10 \pm 1)cm$, (στ) $(5 \pm 1)cm$ και (5 ± 2), (ζ) $(5 \pm 1)cm$ και $(18 \pm 5)cm$

3. Αν η πυκνότητα του σώματος ενός ανθρώπου είναι $d_B = 1.076 gr/cm^3$ και η μέτρηση αυτή έχει σχετικό σφάλμα ίσο με αυτό των παρακάτω περιπτώσεων, βρείτε για κάθε περίπτωση το απόλυτο σφάλμα
(α) 0.1%, (β) 2%, (γ) 3%, (δ) 5%, (ε) 10%, (στ) 20%, (ζ) 30%, (η) 50%, (θ) 100%, (ι) 150%.

1.6 Σημαντικά ψηφία

1.6.1 Μέτρηση της περιφέρειας του κύκλου μέσω της ακτίνας

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα κύκλο ακτίνας R του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε την περιφέρεια l. Επειδή δεν υπάρχουν “περιφερειόμετρα” [28], ο απλούστερος τρόπος για να μετρήσουμε την περιφέρεια του κύκλου είναι μέσω της γνωστή σχέση $l = 2\pi R$. Ως γνωστό το π είναι ένας άρρητος αριθμός και επομένως αν τον εκφράσουμε σε δεκαδική μορφή, περιέχει άπειρα ψηφία μη επαναλαμβανόμενα. Χρησιμοποιώντας τα 6 πρώτα του ψηφία, το π γράφεται ως $\pi = 3.14159...$. Συνήθως όμως χρησιμοποιούμε μόνο τα τρία πρώτα του ψηφία, γράφοντας το π ως $\pi = 3.14$. Εκείνο δηλαδή που κάνουμε είναι ότι προσεγγίζουμε τον αριθμό π, γράφοντάς τον με μερικά μόνο από τα πρώτα ψηφία του. Ωστόσο δεν μπορούμε να είμαστε εκ των προτέρων σίγουροι ότι το με να γράψουμε το π ως 3.14 χρησιμοποιούμε τη σωστή προσέγγιση του π. Ποιός θα μπορούσε άραγε να μας διαβεβαιώσει ότι κάνουμε λάθος χρησιμοποιώντας μια πιο χονδροειδή προσέγγιση του π, παίρνοντάς το να είναι ίσο π.χ. με 3 ή με $3,1$; Ή ποιός θα μπορούσε να μας πει με βεβαιότητα ότι το π, με την τιμή 3.14 ή με μια ακόμα καλύτερη προσέγγιση, είναι αρκετό ώστε να δίνει τη σωστή τιμή της περιμέτρου l, μέσα στα πλαίσια του σφάλματός της και δεν είναι αναγκαίο να εκφραστεί με ακόμα περισσότερα ψηφία;

Αντιλαμβάνεται ίσως κανείς ότι ένας άρρητος αριθμός, όπως το π, προσεγγίζεται με τόση καλύτερη ακρίβεια, όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των ψηφίων με το οποίο εκφράζεται. Έτσι θα περίμενε κανείς, όσα περισσότερα ψηφία χρησιμοποιήσουμε για να εκφράσουμε το π, τόσο καλύτερα να προσεγγίσουμε την

[28] δεν υπάρχει η ανάγκη να υπάρχουν, αφού μπορεί κανείς να βρει την περιφέρεια του κύκλου αν γνωρίζει την ακτίνα. Οπότε ακόμα κι αν υπήρχαν, μάλλον κανένας δε θα τα χρησιμοποιούσε

περίμετρο l. Ωστόσο, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, αυτό δεν ισχύει και ο λόγος είναι ότι από ένα σημείο και μετά οι βελτιώσεις στην τιμή της περιμέτρου l, λόγω των καλύτερων προσεγγίσεων του π, είναι τελείως ασήμαντες μπροστά στο σφάλμα της μέτρησης δl και κατά συνέπεια είναι ανώφελο να προσπαθούμε να βελτιώσουμε περισσότερο την τιμή της περιμέτρου, αυξάνοντας την ακρίβεια με την οποία προσεγγίζουμε το π. Το καλύτερο λοιπόν που θα μπορούσαμε να κάνουμε, είναι να βρούμε τη μέγιστη δυνατή ακρίβεια [29] με την οποία πρέπει να εκφράσουμε το π, έτσι ώστε οι βελτιώσεις στην τιμή της περιμέτρου, (λόγω της ακριβέστερης τιμής του π, που θα χρησιμοποιούσαμε για μια καλύτερη προσέγγιση της περιμέτρου l), να είναι ασήμαντες μπροστά στο σφάλμα της περιμέτρου. Ας προσπαθήσουμε λοιπόν να βρούμε ποιά πρέπει να είναι αυτή η ακρίβεια.

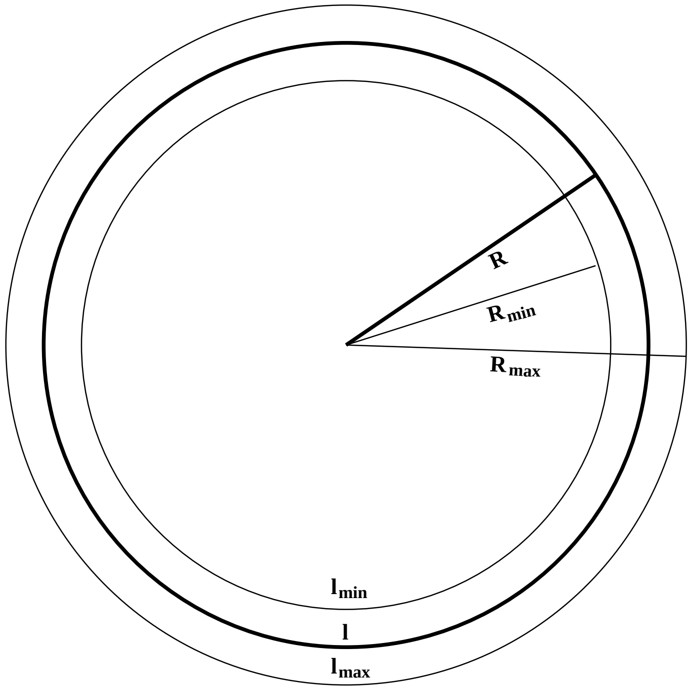
Ας ξεκινήσουμε υποθέτοντας ότι μετράμε την ακτίνα του παραπάνω κύκλου με ένα χάρακα και τη βρίσκουμε ίση με $R = 33.3 \pm 0.1cm$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $l = 2\pi R$ βρίσκουμε την περιφέρεια. Εκείνο, που μένει ακόμα να βρούμε, είναι το αντίστοιχο σφάλμα. Ας θυμηθούμε ότι το σφάλμα στην ακτίνα συνεπάγεται την ύπαρξη ενός διαστήματος μέσα στο οποίο είμαστε βέβαιοι ότι βρίσκεται η πραγματική τιμή της ακτίνας που μετρήσαμε. Στην προκειμένη περίπτωση το διάστημα αυτό είναι το $[33.2, 33.4]cm$. Η ακτίνα δηλαδή δεν μπορεί να είναι μικρότερη από $33.2cm$, αλλά ούτε και μεγαλύτερη από $33.4cm$. Αυτό έχει σα συνέπεια, η περιφέρεια του κύκλου να μην μπορεί να είναι μικρότερη από την τιμή $l_{min} = 2 \times \pi \times 33.2cm$, αλλά ούτε και μεγαλύτερη από την τιμή $l_{max} = 2 \times \pi \times 33.4cm$ (δες την εικόνα 1.6).

1.6.2 Προσεγγίσεις αριθμών: Αποκοπή και στρογγυλοποίηση

Πριν προχωρήσουμε θα κάνουμε μια μικρή παρένθεση για να εκθέσουμε μια παρατήρηση σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουμε τους αριθμούς. Ας πούμε για παράδειγμα ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε τον αριθμό 48.99913 με δύο μόνο ψηφία. Το απλούστερο πράγμα που θα μπορούσε να σκεφτεί κανείς είναι να κρατήσει τα 2 πρώτα ψηφία του αριθμού, αποκόπτοντας όλα τα υπόλοιπα. Έτσι ο αριθμός θα γραφόταν ως 48. Ο τρόπος αυτός προσέγγισης ενός αριθμού ονομάζεται **αποκοπή**.

Υπάρχει ωστόσο ένας "σωστότερος" τρόπος για να προσεγγίζουμε ένα αριθμό. Όπως εύκολα μπορεί να δει κανείς, ο αριθμός 48.99913 απέχει κατά 0.00087 από τον αριθμό 49, ενώ απέχει κατά 0.99913 από τον αριθμό 48. Είναι επομένως πιο κοντά στον αριθμό 49 απ' ότι στον 48 και για το λόγο αυτό θα ήταν προτιμότερο να τον προσεγγίζαμε με τον αριθμό 49 παρά με τον αριθμό 48. Αντιλαμβάνεται κανείς ότι αν θέλουμε να προσεγγίσουμε ένα αριθμό με n ψηφία, τότε αν το υπ' αριθμόν $n+1$ ψηφίο του αριθμού είναι μεγαλύτερο

[29] ή το μέγιστο αριθμό ψηφίων



Σχήμα 1.6: Η μέγιστη l_{max} και η ελάχιστη l_{min} περίμετρος του κύκλου.

ή ίσο του 5, τότε ο αριθμός αυτός προσεγγίζεται καλύτερα αν στο ψηφίο υπ' αριθμόν n προσθέσουμε μία μονάδα. Αν πάλι το υπ' αριθμόν $n+1$ ψηφίο του αριθμού είναι μικρότερο από 5, τότε ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτή της αποκοπής. Ο τρόπος αυτός προσέγγισης ονομάζεται **στρογγυλοποίηση**.

Χρησιμοποιώντας στρογγυλοποίηση, το μέγιστο σφάλμα, που μπορούμε να κάνουμε στο τελευταίο ψηφίο του αριθμού με τον οποίο προσεγγίζουμε τον πραγματικό αριθμό είναι 0.5. Αντιθέτως στην αποκοπή το αντίστοιχο μέγιστο σφάλμα είναι 1. Με βάση αυτή την παρατήρηση η στρογγυλοποίηση είναι ακριβέστερη από την αποκοπή στην προσέγγιση ενός αριθμού και γι αυτό είναι συνήθως προτιμότερη.

Κάποιος παρατηρητικός θα μπορούσε να πει ότι στην περίπτωση που το υπ' αριθμόν $n+1$ ψηφίο του αριθμού είναι ίσο με 5, χωρίς ο αριθμός να έχει άλλα ψηφία, τότε ο αριθμός αυτός ισαπέχει από τον αριθμό που προκύπτει με αποκοπή και απ' αυτό που προκύπτει με στρογγυλοποίηση. Όντως αυτό είναι σωστό και γι' αυτή ειδικά την περίπτωση κανείς μπορεί να επιλέξει να στρογγυλοποιήσει ή να αποκόψει τον αριθμό. Αν εμφανίζονται πολλές τέτοιες περιπτώσεις και πρέπει να υπολογιστεί κάποιος μέσος όρος, το καλύτερο θα ήταν να γίνεται εναλλάξ αποκοπή και στρογγυλοποίηση των αριθμών με τυχαίο τρόπο. Από την άλλη, αν το υπ' αριθμόν $n+1$ ψηφίο του αριθμού είναι ίσο με 5 και υπάρχουν κι άλλα ψηφία στον αριθμό, μη μηδενικά, τότε η προσθήκη της μονάδας στο υπ' αριθμόν n ψηφίο είναι απολύτως συμβατή με την ιδέα της στρογγυλοποίησης.

1.6.3 Ποιά προσέγγιση του π θα πάρουμε;

Ας χρησιμοποιήσουμε τώρα διάφορες προσεγγίσεις για την τιμή του π για να βρούμε την περίμετρο l και το σφάλμα της δl. Οι τιμές που βρίσκουμε για τις διαφορετικές προσεγγίσεις του π παρουσιάζονται στον πίνακα 1.2. Όπως μπορεί να δει κανείς απ' αυτό τον πίνακα, το σφάλμα δl ελάχιστα διαφοροποιείται με την διαφορετική προσέγγιση του π. Εξ άλλου μια τέτοια μικρή διαφοροποίηση, όπως αυτή που βλέπουμε στον εν λόγω πίνακα, είναι τελείως ασήμαντη για να τη θεωρήσουμε ως ουσιαστική διαφοροποίηση, δεδομένου ότι **το σφάλμα όπως το υπολογίζουμε, (ως την ελάχιστη δυνατή διαφορά που μπορούμε να μετρήσουμε), είναι μια σχετικά υπερεκτιμημένη εκτίμηση της απόστασης ανάμεσα στην πραγματική τιμή και στην τιμή της μέτρησης. Επομένως μικρές διαφοροποιήσεις του σφάλματος, όπως αυτές του πίνακα, δεν προσφέρουν ουσιαστικά κάποια επιπλέον πληροφορία για το σφάλμα**. Μπορούμε δηλαδή άφοβα να θεωρήσουμε ότι το σφάλμα δl είναι $0.6cm$ σε κάθε περίπτωση, ή το πολύ - πολύ ίσο με $0.63cm$, όπως προκύπτει από τη στρογγυλοποίηση. Έχοντας λοιπόν ξεκαθαρίσει ότι το σφάλμα δl είναι της τάξης του $0.6cm$, θα πρέπει στη συνέχεια να βρούμε **ποιά είναι η προσέγγιση του π, για την οποία η αμέσως καλύτερή της δε βελτιώνει την τιμή της περιμέτρου l κατά ένα σημαντικό ποσό σε σχέση με το σφάλμα**. Οι βελτιώσεις στην τιμή του l [30], φαίνονται στην τελευταία στήλη του πίνακα 1.2. Όπως φαίνεται στη στήλη αυτή, η τιμής της περιμέτρου βελτιώνεται κατά $0.1332cm$, όταν το π από 3.14, πάρει την ακριβέστερη τιμή του 3.142, ενώ η αντίστοιχη βελτίωση στην τιμή της περιμέτρου, όταν το π πάρει την τιμή 3.14, από 3.1, είναι 2.664. Κατά συνέπεια η βελτίωση στην τιμή της περιμέτρου γίνεται ασήμαντη σε σχέση με το σφάλμα, όταν το π πάρει την τιμή 3.142. Επομένως η αμέσως προηγούμενη τιμή του π, (δηλαδή η 3.14) είναι εκείνη που είναι αρκετή ως προσέγγιση και επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το π, στο συγκεκριμένο πρόβλημα.

π	l_{min}	l	l_{max}	δl	βελτίωση στο l
3	199.2	199.8	200.4	0.6	
3.1	205.84	206.46	207.08	0.62	6.66
3.14	208.496	209.124	209.752	0.628	2.664
3.142	208.6288	209.2572	209.8856	0.6284	0.1332
3.1416	208.60224	209.23056	209.85888	0.62832	-0.02664
3.14159	208.601576	209.229894	209.858212	0.628318	-0.00666

Πίνακας 1.2: Η περίμετρος του κύκλου σε cm για τιμές του π αυξανόμενης ακρίβειας, με $R = 33.3 \pm 0.1cm$.

[30] δηλαδή οι διαφορές ανάμεσα στις τιμές της περιμέτρου l για την τρέχουσα προσέγγιση του π και την προηγούμενη καλύτερη

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μετράμε την ακτίνα του κύκλου με ένα άλλο όργανο μέτρησης που έχει σφάλμα μόνο $0.01cm$ και ας υποθέσουμε ότι η νέα ακριβέστερη μέτρηση έχει την ίδια τιμή $33.3cm$. Μπορούμε έτσι να γράψουμε $l = 33.30 \pm 0.01cm$. Ας δούμε τώρα πώς διαμορφώνεται ο αντίστοιχος πίνακας 1.2 σ' αυτή την περίπτωση. Ο νέος πίνακας θα είναι ο πίνακας 1.3. Επειδή

π	l_{min}	l	l_{max}	δl	βελτίωση στο l
3	199.74	199.8	199.86	0.06	
3.1	206.398	206.46	206.522	0.062	6.66
3.14	209.0612	209.124	209.1868	0.0628	2.664
3.142	209.19436	209.2572	209.32004	0.06284	0.1332
3.1416	208.60224	209.23056	209.293392	0.062832	-0.02664
3.14159	209.1670622	209.229894	209.2927258	0.0628318	-0.000666

Πίνακας 1.3: Η περίμετρος του κύκλου σε cm για τιμές του π αυξανόμενης ακρίβειας, με $R = 33.30 \pm 0.01cm$.

από μαθηματικής απόψεως η τιμή της ακτίνας είναι η ίδια και αλλάζει μόνο το σφάλμα, οι τιμές της περιμέτρου l του πίνακα 1.3 είναι ίδιες με αυτές του πίνακα 1.2. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα και οι διαφορές τους για κάθε καλύτερη προσέγγιση του π να είναι ίδιες μ' αυτές του πίνακα 1.2. Η αλλαγή όμως στην τιμή του σφάλματος διαφοροποιεί τα πράγματα σε σχέση με τον πίνακα 1.2. Όπως μπορούμε πολύ εύκολα να δούμε, σ' αυτή την περίπτωση η προσέγγιση 3.14 για το π δεν είναι αρκετή. Το π στην περίπτωσή μας θα πρέπει να προσεγγιστεί τουλάχιστον με 3.142, ώστε η βελτίωση στην τιμή της περιμέτρου λόγω του ακριβέστερου π, να είναι ασήμαντη μπροστά στο σφάλμα δl.

1.6.4 Η σωστή προσέγγιση της περιφέρειας

Μέχρι στιγμής καταφέραμε να προσδιορίσουμε την προσέγγιση του π που μας αρκεί για να λύσουμε το πρόβλημά μας, έχοντας παράλληλα κατανοήσει ότι μια καλύτερη προσέγγιση του π δεν έχει να μας ωφελήσει σε τίποτα. Όπως είπαμε, οτιδήποτε είναι μικρότερο κατά πολύ από το σφάλμα, είναι ασήμαντο και δεν έχει νόημα να το λαμβάνουμε υπ' όψη, από τη στιγμή που το ίδιο το σφάλμα δεν είναι η ακριβής διαφορά ανάμεσα στην πραγματική και στη μετρούμενη τιμή ενός μεγέθους [31]. Στη βάση αυτής της λογικής, αντιλαμβάνεται κανείς ότι **τα μικρότερης αξίας ψηφία μιας έμμεσης μέτρησης, που προκύπτουν λόγω αριθμητικών πράξεων, δε θα έχουν καμιά αξία αν η συνεισφορά τους στον αριθμό είναι πολύ μικρότερη από το σφάλμα της μέτρησης**. Με βάση επομένως αυτή τη λογική, ενδέχεται, ορισμένα από τα τελευταία ψηφία

[31] αν ήταν, θα γνωρίζαμε και την πραγματική τιμή του μεγέθους, την οποία όπως είπαμε δε θα τη μάθουμε ποτέ

της τιμής της περιμέτρου l, να μην πρέπει να ληφθούν υπ' όψη στην τιμή του, όταν το σφάλμα θα είναι αρκετά μεγαλύτερο απ' αυτά. Κατά συνέπεια η τιμή της περιμέτρου, για την περίπτωση που $R = 33.3cm$, για την οποία το π θα πρέπει να πάρει τουλάχιστον την τιμή 3.14, την οποία βρήκαμε ίση με $l = 209.124cm$, θα πρέπει απλώς να γραφεί ως $l = 209cm$, αφού, όπως φαίνεται από τον πίνακα 1.2, το σφάλμα $\delta l = 0.6cm$ είναι αρκετά μεγαλύτερο από τη συνεισφορά των τριών τελευταίων ψηφίων (1, 2 και 4) στην τιμή της περιφέρειας l. Ομοίως, στη δεύτερη περίπτωση, για την οποία έχουμε την ίδια αριθμητική τιμή για τη μέτρηση του R, για την οποία το π πρέπει όπως είπαμε να γραφεί ως 3.142, η τιμή της περιμέτρου l την οποία βρήκαμε ίση με $l = 209.2572cm$, και επομένως θα πρέπει να τη γράψουμε ως $l = 209.3cm$, αφού το το σφάλμα είναι $\delta l = 0.06cm$, και επομένως (όπως φαίνεται στον πίνακα 1.3), η συνεισφορά των ψηφίων μετά το τέταρτο (5, 7 και 2) είναι ασήμαντη σε σχέση με το σφάλμα.

1.6.5 Σημαντικά ψηφία μιας άμεσης μέτρησης

Δημιουργείται επομένως η αναγκαιότητα να μπορούμε να αντιληφθούμε ποιά ψηφία μιας μέτρησης (έμμεσης ή άμεσης) εκφράζουν πραγματικά τη μετρούμενη ποσότητα, μέσα στα όρια του σφάλματος που κάθε φορά υπάρχει. Τα ψηφία αυτά τα ονομάζουμε **σημαντικά ψηφία της μέτρησης**. Αν θέλαμε επομένως να δώσουμε ένα ορισμό των σημαντικών ψηφίων θα λέγαμε ότι

Σημαντικά ψηφία μιας μέτρησης είναι τα ψηφία που εκφράζουν τη μέτρηση και είναι αποτέλεσμα της μέτρησης (έμμεσης ή άμεσης).

Σε μια άμεση μέτρηση ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων καθορίζεται από τον αριθμό των μικρότερων υποδιαιρέσεων του οργάνου που παριστάνει τη μέτρηση. Έτσι η άμεση μέτρηση $33.3cm$ της ακτίνας του παραπάνω παραδείγματος, του οποίου η μικρότερη υποδιαίρεση είναι $0.1cm$ (δηλαδή ένα χιλιοστό), αποτελεί ουσιαστικά μέτρηση 333 χιλιοστών του μέτρου και επομένως έχει 3 σημαντικά ψηφία. Έχοντας τρία σημαντικά ψηφία η μέτρηση, αυτομάτως υποδηλώνει ότι το σφάλμα βρίσκεται στο τελευταίο (τρίτο) σημαντικό ψηφίο. Σημαίνει ακόμα ότι το όργανο μέτρησης είχε την ικανότητα να διακρίνει και να μετρήσει τις αποστάσεις 33.1, 33.2, 33.3, 33.4, $33.6cm$ και η μέτρηση πήρε μία απ' αυτές τις τιμές, την 33.3.

Τα μηδενικά, ως σημαντικά ψηφία, στο τέλος του αριθμού

Κατ' αναλογία η άμεση μέτρηση της ίδιας απόστασης με το άλλο όργανο μέτρησης, του οποίου η μικρότερη υποδιαίρεση είναι $0.01cm$ (δηλαδή ένα δέκατο του χιλιοστού), αποτελεί μέτρηση 3330 δεκάτων του χιλιοστού του μέτρου και κατά συνέπεια η μέτρηση αυτή πρέπει να γραφεί με 4 σημαντικά ψηφία. Γραμμένη όμως η μέτρηση ως $33.3cm$, δε μας επιτρέπει να αντιληφθούμε την ύπαρξη του τέταρτου σημαντικού ψηφίου. Για το λόγο αυτό η μέτρηση $33.3cm$ που έχει γίνει με 4 σημαντικά ψηφία, θα γράφεται κατά σύμβαση ως $33.30cm$. Έτσι θα εμφανίζονται 4 αντί για 3 ψηφία. **Τα μηδενικά επομένως στο τέλος του αριθμού, είναι αναγκαίο να υπάρχουν αν πρόκειται να δηλώσουμε δι΄ αυτών την ύπαρξη σημαντικών ψηφίων**. Αν πρέπει να προσθέσουμε μηδενικά για να έχουμε το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων και ο αριθμός που εκφράζει τη μέτρηση είναι ακέραιος, τότε απλώς βάζουμε υποδιαστολή και προσθέτουμε τα μηδενικά. Αν πάλι ο αριθμός που εκφράζει τη μέτρηση δεν είναι ακέραιος, τότε απλώς προσθέτουμε τα ανάλογα μηδενικά στο τέλος του αριθμού.

Από μαθηματικής άποψης οι αριθμοί 33.3 και 33.30 παραμένουν ακριβώς οι ίδιοι. Από τη σκοπιά όμως των μετρήσεων, η άμεση μέτρηση $33.30cm$ υποδηλώνει ότι το όργανο μέτρησης μπορούσε να μετρήσει 4 ψηφία και το τέταρτο και τελευταίο ψηφίο που μέτρησε ήταν το μηδέν. Το τελευταίο μηδενικό δηλαδή μετρήθηκε και βγήκε μηδέν, όπως ακριβώς μετρήθηκαν και τα μηδενικά στη μέση του αριθμού $1,000000001$, ο οποίος είναι γραμμένος με 10 σημαντικά ψηφία. Στην περίπτωση της μέτρησης $33.30cm$ το όργανο μέτρησης είχε την ικανότητα να διακρίνει και να μετρήσει τις αποστάσεις 33.28, 33.29, 33.30, 33.31, $33.32cm$ και η μέτρηση πήρε την τιμή $33.30cm$. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση έτσι κι εδώ το σφάλμα βρίσκεται στο τελευταίο ψηφίο της μέτρησης (εδώ στο τέταρτο). **Όταν επομένως εμφανίζονται μηδενικά στο τέλος ενός αριθμού, αυτά κατά σύμβαση τα θεωρούμε σημαντικά ψηφία της μέτρησης.**

Τα μηδενικά, ως μη σημαντικά ψηφία, στο τέλος ενός αριθμού

Υπάρχει ωστόσο το ενδεχόμενο να εμφανίζονται μηδενικά στο τέλος ενός αριθμού, χωρίς αυτά να είναι σημαντικά ψηφία της μέτρησης. Αν αυτά εμφανιστούν μετά την υποδιαστολή, τότε απλώς δεν τα γράφουμε, αφού από μαθηματικής άποψης δε μας προσφέρουν τίποτα. Αν όμως εμφανιστούν πριν την υποδιαστολή, τότε διαφαίνεται ένα μικρό πρόβλημα σε ότι αφορά το πώς θα γραφεί ο αριθμός με τα σωστά σημαντικά ψηφία. Πώς θα γράφαμε για παράδειγμα τον αριθμό 1500000 με 3 σημαντικά ψηφία; Το πρόβλημα λύνεται πάλι με μια σύμβαση που κάνουμε, σύμφωνα με την οποία **γράφουμε τον αριθμό με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων και τα μηδενικά που περισσεύουν τα γράφουμε με τη μορφή δύναμης ως** 10^n. Έτσι στο παράδειγμά μας, τον αριθμό 1500000 εκφρασμένο με 3 σημαντικά ψηφία, τον γράφουμε ως 150×10^4. Αυτό σημαίνει ενδεχομένως ότι το όργανο με το οποίο έγινε η μέτρηση είχε την ικανότητα να διακρίνει και να μετρήσει τις ποσότητες 1480000, 1490000, 1500000, 1510000, 1520000, (ή καλύτερα τις ποσότητες 148×10^4, 149×10^4, 150×10^4, 151×10^4, 152×10^4) και κατά τη μέτρηση έβγαλε 150×10^4. Κατ΄ αναλογία με όσα είπαμε παραπάνω, αντιλαμβάνεται κανείς ότι το σφάλμα της μέτρησης βρίσκεται στο τρίτο σημαντικό ψηφίο. Αν ο αριθμός παρέμενε με την αρχική του μορφή ως 1500000, τότε θα έπρεπε να θεωρήσουμε ότι είχε 7 σημαντικά ψηφία και ότι το σφάλμα βρισκόταν στο έβδομο σημαντικό ψηφίο του.

Μηδενικά στην αρχή του αριθμού

Είδαμε λοιπόν πώς να χειριζόμαστε τα μηδενικά που βρίσκονται στο τέλος ενός αριθμού. Τι γίνεται όμως με μηδενικά που βρίσκονται στην αρχή ενός αριθμού. Προφανώς αν ο αριθμός γράφεται με τη μορφή δεκαδικού αριθμού του οποίου το ακέραιο μέρος είναι μη μηδενικό, (π.χ. 10.025), τότε δεν υπάρχει κανένα νόημα να υπάρχουν μηδενικά στην αρχή του αριθμού. Τα μηδενικά είναι αναπόφευκτα στην αρχή του αριθμού αν ο αριθμός γράφεται με δεκαδική μορφή και έχει μηδενικό ακέραιο μέρος (π.χ. 0.00010025). Όμως τα μηδενικά αυτά μπορούν να απαλειφθούν με μια αλλαγή κλίμακας, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό με μια κατάλληλη δύναμη του 10. Ο αριθμός 0.00010025 θα μπορούσε για παράδειγμα να γραφεί ως 100.25×10^{-6}. Έτσι γραμμένος σύμφωνα με την παραπάνω σύμβαση έχει 5 σημαντικά ψηφία, όπως και ο αριθμός 10.025. Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς ότι **αν ένας αριθμός είναι γραμμένος με τη δεκαδική μορφή και το ακέραιο μέρος του είναι μηδέν, τότε όλα τα μηδενικά που βρίσκονται στην αρχή του αριθμού και ακολουθούν αμέσως μετά την υποδιαστολή είναι μη σημαντικά ψηφία. Το πρώτο σημαντικό ψηφίο είναι το πρώτο μη μηδενικό και ακολουθούν κατά σειρά τα υπόλοιπα.** Έτσι ο αριθμός 0.00010025 μπορεί να γραφεί με όλους τους παρακάτω τρόπους, διατηρώντας τον ίδιο αριθμό (5) σημαντικών ψηφίων.

$$\begin{aligned}
0.00010025 &= 0.0010025 \times 10^{-1} \\
&= 0.010025 \times 10^{-2} \\
&= 0.10025 \times 10^{-3} \\
&= 1.0025 \times 10^{-4} \\
&= 10.025 \times 10^{-5} \\
&= 100.25 \times 10^{-6} \\
&= 1002.5 \times 10^{-7} \\
&= 10025 \times 10^{-8}
\end{aligned}$$

1.6.6 Σημαντικά ψηφία μιας έμμεσης μέτρησης

Είδαμε στην προηγούμενη υποπαράγραφο, ποιά είναι τα σημαντικά ψηφία μιας άμεσης μέτρησης και καθορίσαμε κανόνες σύμφωνα με τους οποίους θα τα γράφουμε και θα τα αντιλαμβανόμαστε. Εκτός από τη χρησιμότητα, που έχουν τα σημαντικά ψηφία στην παράσταση των άμεσων μετρήσεων, η κύρια χρησιμότητά τους είναι στην παράσταση των έμμεσων μετρήσεων. Αν ανατρέξουμε στα δύο προηγούμενα παραδείγματα αυτής της παραγράφου, όπου μέσω της ακτίνας του κύκλου προσδιορίζαμε την περίμετρό του, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι καθώς αυξήθηκε η ακρίβεια με την οποία προσδιορίσαμε την ακτίνα R του κύκλου, αυξήθηκε και ο ελάχιστος αριθμός των ψηφίων με τον οποίο πρέπει να εκφράσουμε το π, και ο ελάχιστος αριθμός των ψηφίων με τον οποίο πρέπει να εκφράσουμε την περιφέρεια l του κύκλου. Αύξηση επομένως των σημαντικών ψηφίων στην ακτίνα R συνεπάγεται αύξηση των σημαντικών ψηφίων στην περίμετρο l, αλλά και αύξηση των "σημαντικών" ψηφίων του π.

Προφανώς το π δεν προέρχεται από μέτρηση, αλλά είναι ένας αριθμός. Όμως ως άρρητος αριθμός που είναι, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όλα του τα ψηφία στις πράξεις μας, αλλά μια προσέγγισή του. Κατά συνέπεια θα μπορούσε κανείς να πει ότι η τιμή του π που χρησιμοποιούμε έχει ένα σφάλμα. Η μόνη διαφορά του σφάλματος αυτού από το σφάλμα των μετρήσεων, είναι ότι θεωρητικά το σφάλμα στο π μπορεί να προσδιοριστεί ακριβώς, αν θεωρήσουμε ότι το π είναι ένας γνωστός αριθμός, ενώ την πραγματική τιμή ενός μεγέθους δεν μπορούμε με κανένα τρόπο να τη γνωρίζουμε και επομένως το σφάλμα μιας μέτρησης είναι απλώς μια εκτίμηση της αβεβαιότητας με την οποία προσεγγίζουμε την πραγματική τιμή. Κατά συνέπεια η ύπαρξη του σφάλματος που κάνουμε στο π, μας επιτρέπει να το χειριστούμε σα να προέρχεται από μέτρηση.

Εκείνο που επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι ότι στην περίπτωση που το R το μετράμε με 3 σημαντικά ψηφία (πρώτη περίπτωση), τότε τόσο το l όσο και το π γράφονται με 3 σημαντικά ψηφία. Στη δεύτερη περίπτωση που το R το γράφουμε με 4 σημαντικά ψηφία, τότε τόσο το l όσο και το π γράφονται με 4 σημαντικά ψηφία. Αυτό είναι ένα γενικό συμπέρασμα και δε συμβαίνει μόνο στα παραδείγματα που είδαμε. **Αν δηλαδή έχουμε μια έμμεση μέτρηση που εξαρτάται από μια και μόνη άμεση μέτρηση, τότε ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων του μεγέθους της έμμεσης μέτρησης πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των ψηφίων του μεγέθους της άμεσης μέτρησης**. Αν στην έμμεση μέτρηση εμπλέκονται άρρητοι αριθμοί όπως το π ή το $\sqrt{2}$ κ.τ.λ., τότε οι αριθμοί αυτοί θα πρέπει να προσεγγίζονται με τον ίδιο αριθμό "σημαντικών" ψηφίων. Ακόμα καλύτερα θα ήταν οι αριθμοί αυτοί να προσεγγίζονται με ένα ψηφίο επιπλέον των σημαντικών, ώστε να εξαλειφθεί η πιθανότητα να εισαχθούν οποιαδήποτε σφάλματα.

Τι γίνεται όμως στην περίπτωση που η έμμεση μέτρηση εξαρτάται από περισσότερες από μια μετρήσεις, των οποίων μάλιστα ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων ενδέχεται να διαφέρει. Σε κάθε περίπτωση τα σφάλματα που θα μεταφερθούν στο μέγεθος της έμμεσης μέτρησης θα προέρχονται κυρίως από τη μέτρηση με το μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων. Μπορούμε επομένως για τον υπολογισμό των σημαντικών ψηφίων της έμμεσης μέτρησης, χωρίς βλάβη της της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι ανάμεσα σε δύο άμεσες μετρήσεις, που χρειάζονται για τον υπολογισμό της έμμεσης μέτρησης, η μέτρηση με το μεγαλύτερο αριθμό σημαντικών ψηφίων δεν έχει σφάλμα. Επομένως το σφάλμα θα προέρχεται μόνο από την άλλη μέτρηση με το μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων και επομένως αυτός ο αριθμός θα προσδιορίσει και τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων του μεγέθους της έμμεσης μέτρησης. Κατά συνέπεια, **αν μια έμμεση μέτρηση προκύπτει ως αποτέλεσμα μετρήσεων περισσότερων του ενός μεγεθών, τότε ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων της έμμεσης μέτρησης είναι ίσος με τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων που έχει η μέτρηση με το μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων.**

1.6.7 Σημαντικά ψηφία του σφάλματος

Επειδή το σφάλμα μιας μέτρησης είναι το μέτρο της αβεβαιότητας με την οποία η μέτρηση προσεγγίζει την αληθινή τιμή, δεν μπορεί το λιγότερο σημαντικό ψηφίο μιας μέτρησης να είναι περισσότερο σημαντικό από το σφάλμα. Δε θα μπορούσαμε π.χ. να έχουμε μια μέτρηση μήκους $x = 1.74m$ και ένα σφάλμα $\delta x = 0.0001m$. Ένα τέτοιο σφάλμα θα σήμαινε ότι μπορούμε να μετρήσουμε αποστάσεις μήκους που να είναι ακέραια πολλαπλάσια του δx. Δηλαδή θα μπορούσαμε να μετρήσουμε ένα μήκος $x = 1.7401m$ $x = 1.7402m$ $x = 1.7403m$ κ.τ.λ. Επομένως είτε αυτή η μέτρηση μήκους είναι γραμμένη λάθος και θα έπρεπε να γραφεί σαν $x = 1.7400m$ (οπότε θα έχει 5 σημαντικά ψηφία αντί για 3), είτε το σφάλμα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο και τουλάχιστον ίσο με $0.01m$. Στην καλύτερη περίπτωση θα μπορούσαμε στο παραπάνω παράδειγμα να δεχτούμε ένα σφάλμα το οποίο θα μπορούσε να είναι το λιγότερο ίσο με $0.005m$.

Κατ' αναλογία, **δεν μπορεί το λιγότερο σημαντικό ψηφίο μιας μέτρησης να είναι λιγότερο σημαντικό από το σφάλμα**. Δε θα είχε νόημα π.χ. να είχαμε μια μέτρηση $x = 1.745m$ και να είχαμε ένα σφάλμα $0.1m$. Με τέτοιο σφάλμα θα μπορούσαμε να μετρήσουμε αποστάσεις που να είναι πολλαπλάσιες του σφάλματος. Θα μπορούσαμε δηλαδή να μετρήσουμε $1.5m$, $1.6m$, $1.7m$, $1.8m$ κ.τ.λ. Επομένως είτε η μέτρηση είναι λάθος και θα πρέπει να στρογγυλοποιηθεί σε $x = 1.7m$[32], είτε το σφάλμα είναι λάθος και θα πρέπει να γίνει της τάξεως του $0.001m$.

Αντιλαμβανόμαστε κατά συνέπεια ότι

> το σφάλμα πρέπει να είναι το ίδιο σημαντικό με το ελάχιστα σημαντικό ψηφίο μιας μέτρησης. Για το λόγο αυτό το σφάλμα πρέπει να αποδίδεται με ένα μόνο σημαντικό ψηφίο.

Αν λοιπόν μετά από πράξεις προκύψει ένα σφάλμα με περισσότερα από ένα σημαντικά ψηφία, θα πρέπει, ακολουθώντας τους παραπάνω κανόνες στρογγυλοποίησης, να το στρογγυλοποιούμε σε ένα μόνο σημαντικό ψηφίο. Στην καλύτερη περίπτωση θα μπορούσαμε να δεχθούμε ένα σφάλμα γραμμένο με δύο σημαντικά ψηφία. Σφάλμα όμως γραμμένο με τρία σημαντικά ψηφία, δε θα είχε κανένα νόημα.

[32] απόσταση $0.045m$ είναι ασήμαντη μπροστά στο σφάλμα

1.6.8 Σχετικό σφάλμα και σημαντικά ψηφία [33]

Είδαμε νωρίτερα ότι την ακρίβεια μιας μέτρησης την καθορίζει το σχετικό σφάλμα. Στην παράγραφο αυτή είδαμε ότι η ακρίβεια μιας μέτρησης καθορίζεται και από τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων με τα οποία γράφεται. Κατά συνέπεια κάποια σχέση πρέπει να υπάρχει ανάμεσα στα σημαντικά ψηφία μιας μέτρησης και στο σχετικό σφάλμα της.

Αν μια μέτρηση γράφεται με n σημαντικά ψηφία, τότε θα περιμέναμε το σφάλμα της να βρίσκεται στο n-οστό σημαντικό ψηφίο της. Αν γράφαμε τη μέτρηση ως $d_1 d_2 \ldots d_n$, όπου τα d_1, d_2, $\ldots$, d_n παριστάνουν τα σημαντικά ψηφία της μέτρησης, ($0 \leq d_1, d_2, \ldots, d_n \leq 9$, $d_1 \neq 0$) τότε το σφάλμα της θα ήταν e_n, όπου $1 \leq e_n \leq 9$ είναι ένα ψηφίο. Το σχετικό σφάλμα θα ήταν

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{e_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} = \frac{e_n}{d_1 . d_2 \ldots d_n} \times 10^{-(n-1)}. \tag{1.25}$$

Επειδή

$$1 \leq d_1 . d_2 \ldots d_n < 10 \Longrightarrow 10^{-1} = \frac{1}{10} < \frac{1}{d_1 . d_2 \ldots d_n} \leq 1$$

και $1 \leq e_n \leq 9$, διαιρώντας τις δυο σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε

$$10^{-1} < \frac{e_n}{d_1 . d_2 \ldots d_n} \leq 9 \Longrightarrow 10^{-n} < \frac{\delta x}{x} \leq 9 \times 10^{-n+1} < 10^{-n+2} \tag{1.26}$$

Λογαριθμώντας την τελευταία σχέση βρίσκουμε

$$\log 10^{-n} < \log \frac{\delta x}{x} < \log 10^{-n+2} \Longrightarrow n > -\log \frac{\delta x}{x} > n - 2 \tag{1.27}$$

Άρα το ακέραιο μέρος του $-\log(\delta x/x)$ θα είναι ίσο με $n-1$ ή

$$\boxed{n = Int\left[-\log\left(\frac{\delta x}{x}\right)\right] + 1. \tag{1.28}}$$

Έτσι αν π.χ. το σχετικό σφάλμα είναι 0.001, τότε ο αρνητικός λογάριθμος του σχετικού σφάλματος είναι 3, οπότε $n = 4$.

Επομένως όντως τα σημαντικά ψηφία σχετίζονται με το σχετικό σφάλμα και λόγω αυτής της σχέσης τους περιγράφουν την ακρίβεια της μέτρησης. **Όσα περισσότερα είναι τα σημαντικά ψηφία μιας μέτρησης, τόσο πιο ακριβής είναι η μέτρηση.**

[33] σε πρώτη ανάγνωση μπορεί κανείς να παραλείψει αυτή την υποπαράγραφο, κρατώντας μόνο την εξίσωση 1.28 και το συμπέρασμα, που συνοψίζεται στην τελευταία πρόταση της υποπαραγράφου

1.6.9 Εν κατακλείδι ...

- Μια μέτρηση γράφεται με τόσα ψηφία όσα είναι τα σημαντικά της ψηφία.
- Αν ο αριθμός που εκφράζει τη μέτρηση έχει δεκαδικό μέρος, τότε τα μηδενικά που βρίσκονται στο τέλος του αριθμού είναι σημαντικά ψηφία.
- Αν ο αριθμός που εκφράζει τη μέτρηση έχει μόνο ακέραιο μέρος και τα τελευταία του ψηφία είναι μηδενικά, τότε αν n είναι τα σημαντικά ψηφία της μέτρησης, γράφουμε τον αριθμό με τα n πρώτα ψηφία του, και τα μηδενικά που περισσεύουν τα γράφουμε με τη μορφή δύναμης του 10.
- Αν ο αριθμός που εκφράζει τη μέτρηση γράφεται με δεκαδική μορφή της οποίας το ακέραιο μέρος είναι μηδέν, τότε όσα μηδενικά ακολουθούν αμέσως μετά την υποδιαστολή δεν είναι σημαντικά ψηφία. Το πρώτο σημαντικό ψηφίο της μέτρησης είναι το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο και ακολουθούν τα υπόλοιπα, εφ' όσον υπάρχουν.
- Σε μια άμεση μέτρηση ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων είναι ίσος με τον αριθμό των ψηφίων που μετρήθηκαν.
- Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων μιας έμμεσης μέτρησης είναι ίσος με τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων που έχει η άμεση μέτρηση με το μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων, η οποία συμμετέχει στον υπολογισμό της έμμεσης μέτρησης.
- Εφ' όσον, μετά από αριθμητικές πράξεις, ο αριθμός των ψηφίων μιας έμμεσης μέτρησης είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των σημαντικών ψηφίων της, τότε στρογγυλοποιούμε τον αριθμό ώστε να γράφεται με το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων.
- Το σφάλμα γράφεται με ένα (ή το πολύ πολύ δύο) σημαντικά ψηφία.
- Το σχετικό σφάλμα σχετίζεται με τον αριθμό σημαντικών ψηφίων μέσω της σχέσης 1.28

1.6.10 Ασκήσεις

1. Γράψτε τους παρακάτω αριθμούς με 3 σημαντικά ψηφία, χρησιμοποιώντας στρογγυλοποίηση
   (α) 830000, (β) 92899, (γ) 0.0092899, (δ) 3.14159, (ε) 3.5, στ) 0.01001

2. Γράψτε τους παρακάτω αριθμούς με 4 σημαντικά ψηφία, χρησιμοποιώντας στρογγυλοποίηση
   (α) 830000, (β) 92899, (γ) 0.0092899, (δ) 3.14159, (ε) 3.5, στ) 0.01001

3. Πόσα σημαντικά ψηφία έχουν οι παρακάτω αριθμοί
α) 0.000001, β) 0.0000010, γ) 0.00100001, δ) 150.00, ε) 23000, στ) 230×10^2, ζ) 230.0×10^2

4. Υπολογίστε τα αντίστοιχα μεγέθη του πίνακα 1.2 για $R = 18.1cm$ και για $R = 18.10cm$. Μέσω του πίνακα αυτού βρείτε με πόσα ψηφία πρέπει να εκφράζεται το π. Πόσο θα είναι τότε η τιμή της περιμέτρου l και πόσο το σφάλμα της δl.

5. Μετρήσαμε τις πλευρές a και b ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου και τις βρήκαμε ίσες με $a = 15.3 \pm 0.1cm$ και $b = 8.3 \pm 0.1cm$. Υπολογίστε το εμβαδόν του και το σφάλμα του, χρησιμοποιώντας αντίστοιχους συλλογισμούς όπως με αυτούς αυτής της παραγράφου.

1.7 Σφάλματα εμμέσων μετρήσεων - Διάδοση σφαλμάτων

1.7.1 Το πρόβλημα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα μέγεθος A, το οποίο εξαρτάται από τα μεγέθη Q_1, Q_2, …, Q_n, δηλαδή $A = A(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$. Ένα τέτοιο μέγεθος είναι π.χ. η πυκνότητα d, που εξαρτάται από τη μάζα m και από τον όγκο V αυτής της μάζας, ($d = m/V$). Αν υποθέσουμε ότι τα μεγέθη αυτά μετρήθηκαν και βρέθηκαν να έχουν τιμές q_1, q_2, …, q_n με σφάλμα δq_1, δq_2, …, δq_n αντίστοιχα [34] και ότι η μέτρηση του μεγέθους A γίνεται με υπολογισμό μέσω των μεγεθών Q_1, Q_2, …, Q_n (έμμεση μέτρηση), το ερώτημα που τίθεται είναι: πόσο είναι το σφάλμα δA του μεγέθους A και πώς αυτό εξαρτάται από τις τιμές q_1, q_2, …, q_n των μεγεθών Q_1, Q_2, …, Q_n και από τα αντίστοιχα σφάλματά τους δq_1, δq_2, …, δq_n.

Πριν απαντήσουμε στο ερώτημα ας ανακαλέσουμε στη μνήμη μας ότι μέτρηση της τιμής q με σφάλμα δq σημαίνει ότι η πραγματική τιμή του μεγέθους βρίσκεται ανάμεσα στις τιμές $q - \delta q$ και $q + \delta q$. Για να βρούμε λοιπόν το σφάλμα στο μέγεθος $A(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$, πρέπει να αναζητήσουμε τις τιμές του, που παράγονται από τις τιμές των Q_1, Q_2, …, Q_n, που βρίσκονται μέσα στα διαστήματα $[q_1 - \delta q_1, q_1 + \delta q_1]$, $[q_2 - \delta q_2, q_2 + \delta q_2]$, …, $[q_n - \delta q_n, q_n + \delta q_n]$ αντίστοιχα. Αν η τιμή $A(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ είναι η τιμή που αντιστοιχεί στη μέτρηση του μεγέθους A, τότε το σφάλμα δA θα προκύπτει από το εύρος των διαφορετικών τιμών που μπορεί να πάρει το A, όταν τα Q_1, Q_2, …, Q_n παίρνουν τιμές στα παραπάνω διαστήματα. Για να βρούμε λοιπόν το δA δε μένει παρά να βρούμε τις τιμές που παίρνει το A.

[34] ξεχωρίζουμε εδώ την τιμή του μεγέθους από το ίδιο το μέγεθος, χρησιμοποιώντας μικρά και κεφαλαία γράμματα αντίστοιχα για να τα συμβολίσουμε. Έτσι το μέγεθος Q έχει τιμή q

1.7.2 Αν το μέγεθος είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής

Ας ξεκινήσουμε με το απλούστερο πρόβλημα, θεωρώντας ότι το A εξαρτάται από ένα μόνο μέγεθος, έστω το Q, ($A = A(Q)$). Ψάχνουμε λοιπόν να βρούμε ποιό είναι το εύρος των τιμών που παίρνει το A, όταν το Q παίρνει τιμές στο διάστημα $[q-\delta q, q+\delta q]$. Μια "καλή" μέτρηση προϋποθέτει ότι το σφάλμα της είναι μικρό σε σχέση με το μέγεθος που μετράει. Αν συμβαίνει αυτό, τότε το διάστημα $[q-\delta q, q+\delta q]$ είναι πολύ μικρό και θα περίμενε κανείς η συνάρτηση $A(Q)$ να είναι μονότονη [35] μέσα στο μικρό αυτό διάστημα [36]. Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι στο διάστημα $[q-\delta q, q+\delta q]$ η συνάρτηση $A(Q)$ είναι μονότονη, τότε οι τιμές του μεγέθους A περιορίζονται ανάμεσα στις τιμές $A(q-\delta q)$ και $A(q+\delta q)$. Με εξαίρεση την περίπτωση όπου το μέγεθος A εξαρτάται με μια γραμμική σχέση από το Q, ($A = aQ+b$, όπου a και b σταθερές), οι τιμές $A(q-\delta q)$ και $A(q+\delta q)$ δεν ισαπέχουν από την τιμή $A(q)$. Αυτό βεβαίως δεν αποτελεί πρόβλημα, απλά μας στερεί τη δυνατότητα να γράψουμε τη μέτρηση με τη μορφή $A(q) \pm \delta A$. Θα μπορούσαμε ωστόσο να πάρουμε ως σφάλμα την ημιδιαφορά αυτών των τιμών, αν λάβουμε υπ' όψη μας (το έχουμε ξαναπεί και νωρίτερα) ότι το σφάλμα δεν είναι ακριβώς η διαφορά ανάμεσα στην πραγματική τιμή του μεγέθους και στη μέτρηση, αλλά είναι ένα, μάλλον υπερεκτιμημένο, εύρος τιμών μέσα στο οποίο περιμένουμε να βρεθεί η μέτρησή μας. Επομένως μικρές διαφορές στην τιμή του σφάλματος δεν επηρεάζουν ουσιαστικά την τιμή του. Μην ξεχνάτε, εξ' άλλου, ότι την τιμή του σφάλματος την παριστάνουμε με ένα σημαντικό ψηφίο. Επομένως **αλλαγές στην τιμή του σφάλματος, που δεν επηρεάζουν την τιμή του ενός και μοναδικού σημαντικού ψηφίου του, είναι απολύτως επιτρεπτές**. Θα μπορούσαμε λοιπόν μ' αυτό τον τρόπο να έχουμε μια εκτίμηση του σφάλματος του A. Εκείνο όμως που δεν έχουμε ακόμα βρει είναι πώς εξαρτάται το σφάλμα δA από το Q και το δQ. Αν αναλογιστούμε το σφάλμα δA ως τη μεταβολή ΔA της συνάρτησης A [37], όταν η μεταβλητή Q μεταβάλλεται κατά δQ, τότε ανακαλώντας τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης[38], μπορούμε μέσω αυτής να βρούμε την εξάρτηση που ψάχνουμε.

Ας θυμηθούμε από τα μαθηματικά ότι ο ορισμός της παραγώγου $A'(Q)$ μιας συνάρτησης $A(Q)$ είναι

$$A'(Q) = \frac{dA(Q)}{dQ} = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{A(Q+\Delta Q) - A(Q)}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{A(Q) - A(Q-\Delta Q)}{\Delta Q}. \tag{1.29}$$

Παράγωγος δηλαδή είναι ο λόγος της μεταβολής $A(Q+\Delta Q) - A(Q)$,που πα-

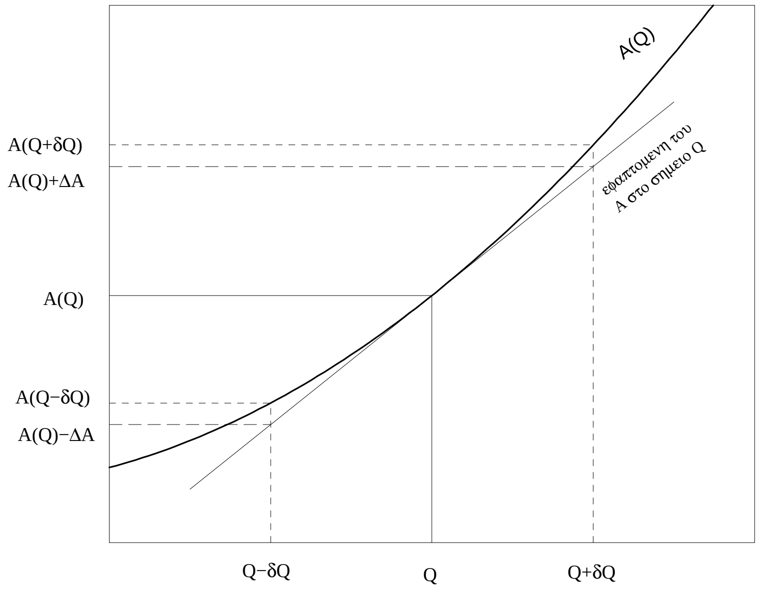
---

[35] ή μόνο να αυξάνεται ή μόνο να μειώνεται με την αύξηση της μεταβλητής της

[36] υπάρχει βεβαίως και η περίπτωση αυτό να μη συμβαίνει. Όμως η περίπτωση αυτή είναι σπάνια και προς στιγμήν δεν την εξετάζουμε.

[37] προκειμένου να διαχωρίσουμε την έννοια της μεταβολής ενός μεγέθους A από το σφάλμα στη μέτρησή του, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα ΔA και δA αντίστοιχα.

[38] για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις παραγώγους δείτε το παράρτημα στη σελίδα 97 στο τέλος του βιβλίου



Σχήμα 1.7: Διάδοση σφάλματος από το Q στο $A(Q)$.

θαίνει η συνάρτηση A, όταν μεταβληθεί η μεταβλητή της Q κατά μια ποσότητα ΔQ που τείνει στο μηδέν, προς αυτή τη μεταβολή ΔQ

Αν θεωρήσουμε ότι, για πολύ μικρές μεταβολές της μεταβλητής Q, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $A(Q)$ συμπεριφέρεται σαν να είναι ευθεία, αντιλαμβανόμαστε ότι η παράγωγος $A'(Q)$ της συνάρτησης $A(Q)$ στο σημείο Q είναι ίση με την κλίση της ευθείας αυτής. Η ευθεία αυτή δεν είναι άλλη παρά η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $A(Q)$ στο σημείο Q (βλέπε εικόνα 1.7).

Προφανώς όταν η μεταβολή ΔQ είναι μικρή, αλλά δεν τείνει στο μηδέν, τότε

$$\frac{A(Q+\Delta Q)-A(Q)}{\Delta Q} \approx A'(Q) \qquad \text{και} \qquad \frac{A(Q)-A(Q-\Delta Q)}{\Delta Q} \approx A'(Q). \tag{1.30}$$

Αυτό επίσης φαίνεται στην εικόνα 1.7. Η πραγματική τιμή της παραγώγου, όπως προκύπτει από την κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο Q, είναι ίση με

$$A'(Q) = \frac{A(Q)-(A(Q)-\Delta A)}{\Delta Q} = \frac{(A(Q)+\Delta A)-A(Q)}{\Delta Q} = \frac{\Delta A}{\Delta Q}, \tag{1.31}$$

όπου η μεταβολή ΔQ της μεταβλητής Q είναι ίση με το σφάλμα της μέτρησης δQ ($\Delta Q = \delta Q$). Όπως φαίνεται οι τιμές $A(Q) - \Delta A$ και $A(Q) + \Delta A$ είναι περίπου ίσες με τις τιμές $A(Q-\Delta Q)$ και $A(Q+\Delta Q)$ αντίστοιχα και οι διαφορές τους είναι πολύ μικρές σε σχέση με τη διαφορά ΔA ή τις διαφορές $A(Q+\Delta Q) - A(Q)$ και $A(Q) - A(Q - \Delta Q)$. Κατά συνέπεια η μεταβολή ΔA αποτελεί μια εκτίμηση του σφάλματος δA. Μπορούμε έτσι να γράψουμε

$$\delta A = A'(q)\delta q = \frac{dA(q)}{dQ}\delta q. \tag{1.32}$$

Δεδομένου ότι θεωρούμε το σφάλμα ως θετική ποσότητα, προκειμένου να αποφύγουμε περιπτώσεις όπου η τιμή της παραγώγου είναι αρνητική, είναι καλό να γράφουμε την παραπάνω σχέση χρησιμοποιώντας απόλυτη τιμή στην παράγωγο. Δηλαδή

$$\boxed{\delta A = |A'(q)|\delta q = \left|\frac{dA(q)}{dQ}\right|\delta q. \tag{1.33}}$$

1.7.3 Αν το μέγεθος είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών

Βρήκαμε λοιπόν το σφάλμα ενός μεγέθους $A(Q)$, που εξαρτάται από ένα μόνο μέγεθος Q. Μένει να βρούμε το σφάλμα δA όταν το A εξαρτάται από περισσότερα από ένα μεγέθη. Η ιδέα και σ' αυτή την περίπτωση είναι ίδια, μόνο που εδώ θα χρειαστεί να εισάγουμε την έννοια της μερικής παραγώγου. Η **μερική παράγωγος** μιας συνάρτησης $A(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ πολλών μεταβλητών ως προς τη μεταβλητή της Q_i είναι η παράγωγος της συνάρτησης A, θεωρώντας όλες τις μεταβλητές Q_1, Q_2, …, Q_n ως σταθερές εκτός από τη μεταβλητή Q_i. Το σύμβολό της είναι $\partial A/\partial Q_i$. Εξ ορισμού λοιπόν θα έχουμε

$$\frac{\partial A}{\partial Q_i} = \lim_{\Delta Q_i \to 0} \frac{A(Q_1, Q_2, \ldots, Q_i + \Delta Q_i, \ldots, Q_n) - A(Q_1, Q_2, \ldots, Q_i, \ldots, Q_n)}{\delta Q_i}. \tag{1.34}$$

Στην περίπτωση που τα Q_1, Q_2, …, Q_n, εκτός του Q_i, είναι σταθερές, τότε η μερική παράγωγος ως προς το Q_i ανάγεται στην απλή παράγωγο που ξέρουμε, ενώ οι υπόλοιπες μερικές παράγωγοι είναι μηδέν. Χρησιμοποιώντας τις μερικές παραγώγους, μπορούμε να γράψουμε το σφάλμα δA ως

$$\boxed{\delta A = \left|\frac{\partial A}{\partial Q_1}\right|\delta Q_1 + \left|\frac{\partial A}{\partial Q_2}\right|\delta Q_2 + \ldots + \left|\frac{\partial A}{\partial Q_n}\right|\delta Q_n \tag{1.35}}$$

Το σφάλμα αυτό λέγεται **μέγιστο σφάλμα**. Οι απόλυτες τιμές στις μερικές παραγώγους μπαίνουν για να αποτρέψουν περιπτώσεις που οι παράγωγοι θα έχουν αρνητικές τιμές, με αποτέλεσμα να μειώνουν το σφάλμα, ενώ αυτό θα μπορούσε να πάρει μεγαλύτερες τιμές. Αν π.χ. $A = Q_1 - Q_2$, το σφάλμα δε θα ήταν $\delta A = \delta Q_1 - \delta Q_2$. Αυτό μπορεί να το δει κανείς αν αναλογιστεί ότι οι τιμές του Q_1 μπορούν να είναι από $q_1 - \delta q_1$ ως $q_1 + \delta q_1$ και οι τιμές του Q_2 από $q_2 - \delta q_2$ ως $q_2 + \delta q_2$. και επομένως η διαφορά $Q_1 - Q_2$ μπορεί να πάρει τιμές από $q_1 - q_2 - (\delta q_1 + \delta q_2)$ (όταν $Q_1 = q_1 - \delta q_1$ και $Q_2 = q_2 + \delta q_2$) μέχρι

$q_1 - q_2 + (\delta q_1 + \delta q_2)$ (όταν $Q_1 = q_1 + \delta q_1$ και $Q_2 = q_2 - \delta q_2$). Το σφάλμα επομένως της διαφοράς $A = Q_1 - Q_2$ θα είναι $\delta A = \delta Q_1 + \delta Q_2$. Το μέγιστο σφάλμα είναι μια μάλλον υπερεκτιμημένη τιμή του σφάλματος. Το σφάλμα παίρνει αυτή την τιμή στην ακραία περίπτωση που τα σφάλματα από όλες τα μεγέθη μεγιστοποιούνται συγχρόνως. Αυτό βεβαίως μπορεί να συμβεί, αλλά θα περίμενε κανείς οι διαφορές ανάμεσα στις πραγματικές τιμές των μεγεθών και στις μετρούμενες ποσότητες να μη μεγιστοποιούνται όλες μαζί συγχρόνως, αλλά ως τυχαία σφάλματα να κατανέμονται γύρω από μια μέση τιμή με μια Γκαουσιανή κατανομή. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε μια άλλη έκφραση για το σφάλμα, η οποία θα ήταν η αντίστοιχη τυπική απόκλιση αυτών των σφαλμάτων και κατά συνέπεια θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$\boxed{\delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial Q_1}\delta Q_1\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial Q_2}\delta Q_2\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial A}{\partial Q_2}\delta Q_2\right)^2} \qquad (1.36)}$$

Το σφάλμα αυτό είναι το **τυπικό σφάλμα** για μια έμμεση μέτρηση. Στην έκφραση αυτή μπορείτε να δείτε την ομοιότητα με την τυπική απόκλιση σε ότι αφορά την άθροιση τετραγώνων διαφορών (επιμέρους σφάλματα), και της τετραγωνικής ρίζας του αποτελέσματος. Η έκφραση αυτή ανάγεται στην σχέση 1.33, όταν τα μεγέθη Q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ εκτός από ένα, είναι σταθερά.

Σε απλές περιπτώσεις, όπως αθροίσεις, διαφορές, γινόμενα, πηλίκα και υψώσεις σε δυνάμεις, οι παραπάνω σχέσεις παίρνουν κάποιες σχετικά απλές μορφές, τις οποίες αναφέρουμε παρακάτω και τις οποίες μπορούμε να τις χρησιμοποιούμε απ' ευθείας.

- Αν $A = c_0 \pm c_1 Q_1 \pm c_2 Q_2 \pm ... \pm c_n Q_n$ τότε

$$\delta A = \sqrt{(c_1 \delta Q_1)^2 + (c_2 \delta Q_2)^2 + ... + (c_n \delta Q_n)^2} \qquad (1.37)$$

- Αν $A = Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} ... Q_n^{m_n}$ ή $A = \dfrac{Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \ldots Q_r^{m_r}}{Q_{r+1}^{m_{r+1}} \ldots Q_n^{m_n}}$ τότε

$$\frac{\delta A}{A} = \sqrt{\left(m_1 \frac{\delta Q_1}{Q_1}\right)^2 + \left(m_2 \frac{\delta Q_2}{Q_2}\right)^2 + ... + \left(m_n \frac{\delta Q_n}{Q_n}\right)^2} \qquad (1.38)$$

Επομένως αν $r \pm \delta r$ είναι η μέτρηση της ακτίνας ενός κύκλου τότε το σφάλμα στη μέτρηση της περιφέρειάς του θα είναι $\delta L = 2\pi \delta r$ και το σφάλμα στη μέτρηση της επιφάνειάς του $\delta S = 2\pi r \delta r$. (Υπενθυμίζουμε ότι η περιφέρεια κύκλου είναι $L = 2\pi r$ και το εμβαδόν της επιφάνειάς του $S = \pi r^2$). Ομοίως αν οι πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $a \pm \delta a$ και $b \pm \delta b$, τότε το σφάλμα δS στο εμβαδόν του θα είναι $\delta S/S = \sqrt{(\delta a/a)^2 + (\delta b/b)^2}$.

1.7.4 Ασκήσεις

1. Με ένα χάρακα μετράμε δύο αποστάσεις των οποίων θέλουμε να βρούμε το άθροισμα. Αν η μια απόσταση είναι $(18.5 \pm 0.1)cm$ και η άλλη είναι $(10.5 \pm 0.1)cm$, βρείτε το άθροισμα αυτών των αποστάσεων και το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα του.

2. Με ένα χάρακα μετράμε δύο αποστάσεις των οποίων ζητάμε τη διαφορά. Αν η μια απόσταση είναι $(18.5 \pm 0.1)cm$ και η άλλη είναι $(10.5 \pm 0.1)cm$, βρείτε τη διαφορά αυτών των αποστάσεων και το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα της. Αν η δεύτερη απόσταση ήταν $(18.6 \pm 0.1)cm$, ποιά θα ήταν η διαφορά των αποστάσεων και το απόλυτο και το σχετικό σφάλμα της; Με βάση τις δύο αυτές περιπτώσεις, τι συμπεράσματα βγάζετε για τη αξιοπιστία της μέτρησης της διαφοράς δύο ποσοτήτων;

3. Με ένα φασματόμετρο μετράμε το μήκος κύματος μιας φωτεινής ακτινοβολίας και το βρίσκουμε να είναι $450 \pm 5nm$. Πόσο είναι το σφάλμα που κάνουμε στην ενέργεια του φωτονίου αυτής της ακτινοβολίας;

4. Προκειμένου να μετρήσουμε την πυκνότητα d ενός σώματος, μετράμε τη μάζα του m και τον όγκο του V. Αν οι μετρήσεις αυτές έχουν σφάλμα δm και δV αντίστοιχα, βρείτε μια έκφραση για το σφάλμα της πυκνότητας. Υπενθυμίζουμε ότι η πυκνότητα d ορίζεται από το πηλίκο $d = m/V$.

5. Σύμφωνα με τον τύπο του Siri, το επί τοις εκατό ποσοστό λίπους ($\%BF$) του ανθρώπινου σώματος δίνεται από τον τύπο $\%BF = 495/d - 450$, όπου d η πυκνότητα του ανθρωπίνου σώματος. Αν στη μέτρηση της πυκνότητας d έχουμε ένα σφάλμα δd, πόσο είναι το σφάλμα $\delta(\%BF)$ στο το επί τοις εκατό ποσοστό λίπους ($\%BF$);

6. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε με τον τύπο του Siri το επί τοις εκατό ποσοστό λίπους ($\%BF$) του ανθρώπινου σώματος με σφάλμα $\delta(\%BF)$ το πολύ ίσο με 1, με πόση ακρίβεια θα πρέπει να μετρήσουμε την πυκνότητα d;

7. Με ένα φασματόμετρο φράγματος που έχει σταθερά φράγματος d ίση με $d = 2000nm$ μετράμε τη γωνία εκτροπής στην πρώτη τάξη περίθλασης και τη βρίσκουμε να είναι $\theta = 14^o 27' \pm 1'$. Πόσο είναι το σφάλμα μέτρησης του μήκους κύματος; (Θεωρήστε ότι η μέτρηση του d δεν έχει σφάλμα).

1.8 Μετρήσεις από διαφορετικά εργαστήρια [39]

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα αποτελέσματα των μετρήσεων ενός μεγέθους από N διαφορετικά εργαστήρια, τα οποία δεν είναι κατ΄ ανάγκη ίδια μεταξύ τους. Αυτό βεβαίως δε σημαίνει ότι τα αποτελέσματα θα διαφέρουν δραματικά το ένα από το άλλο. Όμως λόγω της ύπαρξης των τυχαίων σφαλμάτων, θα έχουν κάποιες μικρές διαφοροποιήσεις. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το εργαστήριο υπ΄ αριθμόν i μέτρησε το υπό μέτρηση μέγεθος αρκετές φορές, έκανε την απαραίτητη στατιστική ανάλυση και βρήκε μια μέση τιμή μ_i και μια τυπική απόκλιση σ_i. Το ίδιο φυσικά έκαναν και τα υπόλοιπα $N-1$ εργαστήρια. Το ερώτημα είναι: ποιά θα πρέπει να είναι τελικά η τιμή που έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι πιο κοντά στην πραγματική τιμή του μεγέθους και ποιό θα είναι το σφάλμα της;

Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα, θα κάνουμε κατ΄ αρχάς την παρατήρηση ότι η πιθανότητα να συμβούν δύο στατιστικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους γεγονότα [40], είναι ίση με το γινόμενο των πιθανοτήτων να συμβεί το κάθε γεγονός από μόνο του. (Π.χ. η πιθανότητα δύο ζάρια να φέρουν το ένα 5 και το άλλο 4 είναι ίση με $1/6 \times 1/6 = 1/36$, όπου $1/6$ είναι η πιθανότητα του κάθε γεγονότος χωριστά.) Στην περίπτωσή μας, οι μετρήσεις των διαφορετικών εργαστηρίων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επομένως η πιθανότητα να μέτρησαν και τα δύο μια συγκεκριμένη τιμή x, είναι ίση με το γινόμενο των αντίστοιχων πιθανοτήτων που βρέθηκε από το κάθε εργαστήριο.

$$P(X_1 = x, X_2 = x, \ldots, X_N = x) = P(X_1 = x)P(X_2 = x)\ldots P(X_N = x), \tag{1.39}$$

όπου X_1, X_2,... X_N οι μετρήσεις κάθε εργαστηρίου. Υποθέτοντας ότι οι μετρήσεις κάθε εργαστηρίου ακολουθούν μια Γκαουσιανή κατανομή, η πυκνότητα πιθανότητας να μετρηθεί μια συγκεκριμένη τιμή x θα είναι ίση με το γινόμενο των επιμέρους πυκνοτήτων πιθανότητας, δηλαδή

$$\begin{aligned} &G(x;\mu_1,\sigma_1)G(x;\mu_2,\sigma_2)\ldots G(x;\mu_N,\sigma_N) = \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{\prod_i (2\pi\sigma_i)}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} - \ldots - \frac{(x-\mu_N)^2}{2\sigma_N^2}\right] \end{aligned} \tag{1.40}$$

Η πιθανότερη τιμή εμφανίζεται εκεί που μεγιστοποιείται η παραπάνω πυκνότητα πιθανότητας. Ας ανακαλέσουμε τώρα στη μνήμη μας ότι μια συνάρτηση γίνεται μέγιστη ή ελάχιστη στα σημεία που μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος. Η παραπάνω πιθανότητα έχει τη μορφή $P(X_1 = x, X_2 = x, \ldots X_N = x) = Ae^{-f(x)}$ και κατά συνέπεια η παράγωγός της είναι $P' = -Ae^{-f(x)}f'(x)$. Ο μηδενισμός

[39] σε πρώτη ανάγνωση ο αναγνώστης μπορεί να παραλείψει αυτή την παράγραφο, κρατώντας μόνο τα συμπεράσματα, που συνοψίζονται στις σχέσεις 1.48 και 1.49

[40] στατιστικώς ανεξάρτητα είναι δύο γεγονότα, όταν η τιμή που παίρνει το ένα δεν επηρεάζει την τιμή που παίρνει το άλλο

αυτής της παραγώγου προϋποθέτει το μηδενισμό της παραγώγου $f'(x)$. Στην περίπτωσή μας η συνάρτηση $f(x)$ είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} + \ldots + \frac{(x-\mu_N)^2}{2\sigma_N^2} \tag{1.41}$$

της οποίας η παράγωγος είναι

$$f'(x) = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{x-\mu_2}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{x-\mu_N}{\sigma_N^2} \tag{1.42}$$

Ο μηδενισμός αυτής της παραγώγου ($f'(x=\mu)=0$) δίνει την πιθανότερη τιμή μ για το μέγεθος X. Μηδενίζοντας αυτή την παράγωγο βρίσκουμε

$$\mu = \frac{\dfrac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \dfrac{\mu_2}{\sigma_2^2} + \ldots + \dfrac{\mu_N}{\sigma_N^2}}{\dfrac{1}{\sigma_1^2} + \dfrac{1}{\sigma_2^2} + \ldots + \dfrac{1}{\sigma_N^2}}. \tag{1.43}$$

Μένει ακόμα να βρούμε την τυπική απόκλιση. Όπως έχουμε πει ήδη νωρίτερα, η τυπική απόκλιση είναι η παράμετρος σ, που υπάρχει στον εκθετικό παράγοντα της σχέσης 1.5. Η συνάρτηση $f(x)$ που εμφανίζεται στον εκθέτη, μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_N^2}\right) x^2 - \\ & - \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{\mu_N}{\sigma_N^2}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{\mu_N^2}{\sigma_N^2}\right) \end{aligned} \tag{1.44}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_N^2}\right)$ παίρνουμε

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_N^2}\right)\left[x^2 - 2\mu x + \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{\mu_2^2}{\sigma_2^2} + \ldots + \dfrac{\mu_N^2}{\sigma_N^2}}{\dfrac{1}{\sigma_1^2} + \dfrac{1}{\sigma_2^2} + \ldots + \dfrac{1}{\sigma_N^2}}\right]. \tag{1.45}$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τον όρο μ^2, δημιουργείται ο τετραγωνικός όρος $x^2 - 2\mu x + \mu^2 = (x-\mu)^2$, οπότε ο εκθέτης γίνεται

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_N^2}\right)(x-\mu)^2 + c, \tag{1.46}$$

όπου το c είναι ένας σταθερός όρος, ο οποίος μπορεί να ενσωματωθεί στον παράγοντα A ως e^c. Κατά συνέπεια ο νέος εκθέτης της Γκαουσιανής κατανομής είναι ο

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_N^2}\right)(x-\mu)^2, \tag{1.47}$$

από τον οποίο, σε σύγκριση με τη σχέση 1.5, προκύπτει ότι η αντίστοιχη τυπική απόκλιση σ θα είναι

$$\boxed{\frac{1}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{1}{\sigma_N^2}} \qquad (1.48)}$$

Βρίσκοντας την τυπική απόκλιση, μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε το τυπικό σφάλμα από τη σχέση 1.7. Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση, μπορούμε να γράψουμε την πιθανότερη τιμή μ ως

$$\boxed{\mu = \sigma^2 \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{\mu_N}{\sigma_N^2} \right) \qquad (1.49)}$$

1.8.1 Ασκήσεις

1. Βρείτε μια μαθηματική έκφραση για την πιθανότερη τιμή και την τυπική απόκλιση, όταν η τυπική απόκλιση είναι ίδια για όλα τα εργαστήρια.

2. Βρείτε μια μαθηματική έκφραση για την πιθανότερη τιμή και την τυπική απόκλιση, όταν η μέση τιμή είναι ίδια για όλα τα εργαστήρια.

3. Υποθέστε ότι δύο διαφορετικά εργαστήρια μετράνε την πυκνότητα του ίδιου ανθρωπίνου σώματος και το ένα τη βρίσκει $d_1 = 1.01 gr/cm^3$ με τυπική απόκλιση $\sigma_1 = 0.02 gr/cm^3$, ενώ το άλλο τη βρίσκει $d_2 = 1.03 gr/cm^3$ με τυπική απόκλιση $\sigma_2 = 0.02 gr/cm^3$ (ίδια τυπική απόκλιση). Πόση είναι η πιθανότερη τιμή της πυκνότητας και με τι σφάλμα;

4. Σε συνέχεια της προηγούμενης άσκησης υποθέστε ότι ένα τρίτο εργαστήριο κάνει την ίδια μέτρηση και βρίσκει $d_3 = 1.01 gr/cm^3$ με τυπική απόκλιση $\sigma_3 = 0.05 gr/cm^3$. Πόση είναι η πιθανότερη τιμή της πυκνότητας και πόσο είναι το σφάλμα της, αν λάβουμε υπ΄ όψη και τη μέτρηση του τρίτου εργαστηρίου;

1.9 Αξιοπιστία της μέσης τιμής

Όπως είναι αναμενόμενο, η μέση τιμή, που προκύπτει από μια σειρά μετρήσεων, δε συμπίπτει κατ΄ ανάγκη με την πραγματική μέση τιμή, η οποία όπως έχουμε πει, θα έχει τη μεγαλύτερη πιθανότητα να είναι ίση με την πραγματική τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα, κατά πόσο είμαστε σίγουροι ότι η μέση τιμή που βρήκαμε είναι η πραγματική μέση τιμή, ή με πόση ακρίβεια η μέση τιμή, που πήραμε από τις μετρήσεις μας, προσδιορίζει την πραγματική μέση τιμή.

Το ερώτημα που τίθεται αφορά την αξιοπιστία της μέσης τιμής που βρίσκουμε. Ένα κριτήριο αυτής της αξιοπιστίας είναι η επαναληψημότητα εύρεσης της ίδιας μέσης τιμής, για διαφορετικές ομάδες μετρήσεων. Αν δηλαδή μετρήσουμε ένα μέγεθος αρκετές φορές και στη συνέχεια χωρίσουμε τις μετρήσεις μας σε ομάδες διαφορετικών μετρήσεων, τότε μια αξιόπιστη μέση τιμή, θα είναι ίδια σε όλες τις ομάδες διαφορετικών μετρήσεων, στις οποίες έχουμε χωρίσει το σύνολο των μετρήσεών μας. Αν αυτό δε συμβαίνει, τότε η μέση τιμή που βρίσκουμε έχει περιορισμένη αξιοπιστία.

Φυσικά δεν περιμένουμε να έχουμε απόλυτη ταύτιση των μέσων τιμών, που προκύπτουν από τις διαφορετικές ομάδες μετρήσεων. Κάτι τέτοιο είναι μάλλον απίθανο να συμβεί. Με την έννοια αυτή καμιά μέση τιμή δεν μπορεί να θεωρηθεί απολύτως αξιόπιστη. Θα πρέπει λοιπόν να καθορίσουμε ένα μέτρο αυτής της αξιοπιστίας. Σε μια σχετικά αξιόπιστη μέση τιμή οι διαφοροποιήσεις μεταξύ των μέσων τιμών των διαφορετικών ομάδων μετρήσεων θα είναι μικρές. Αντιθέτως σε μια λιγότερο αξιόπιστη μέση τιμή οι διαφοροποιήσεις αυτές θα είναι μεγαλύτερες. Με βάση αυτή την παρατήρηση και δεδομένου ότι οι μέσες τιμές που προκύπτουν από τις διαφορετικές ομάδες μετρήσεων, θα ακολουθούν κι αυτές μια Γκαουσιανή κατανομή [41], ένα μέτρο των διαφοροποιήσεων αυτών αποτελεί η τυπική απόκλιση των μέσων τιμών από τη μέση τους τιμή. Δε μένει λοιπόν παρά να υπολογίσουμε αυτή την τυπική απόκλιση των μέσων τιμών.

Στην προηγούμενη παράγραφο βρήκαμε τη μέση τιμή μ και την τυπική απόκλιση σ από τις αντίστοιχες μέσες τιμές μ_i και τις τυπικές αποκλίσεις σ_i N διαφορετικών εργαστηρίων. Αν υποθέσουμε ότι οι ομάδες διαφορετικών μετρήσεων είναι οι μετρήσεις των διαφορετικών εργαστηρίων της προηγούμενης παραγράφου, τότε έχουμε ήδη βρει από την προηγούμενη παράγραφο τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του συνόλου των μετρήσεών μας.

Ειδικότερα στην περίπτωσή μας οι μετρήσεις κάθε διαφορετικής ομάδας μετρήσεων, έγιναν στο ίδιο εργαστήριο, με τα ίδια όργανα μέτρησης και με τις ίδιες μεθόδους. Επομένως τα τυχαία σφάλματα που θα διαφοροποιήσουν τις μετρήσεις μεταξύ τους, οφείλονται στους ίδιους παράγοντες. Κατά συνέπεια η διασπορά των μετρήσεων γύρω από τη μέση τιμή δεν περιμένουμε να διαφέρει σημαντικά από ομάδα σε ομάδα. Όμως αυτή η διασπορά εκφράζεται μέσω της τυπικής απόκλισης. Επομένως θα περιμέναμε, οι τυπικές αποκλίσεις κάθε ομάδας μέτρησης, να μη διαφέρουν σημαντικά η μια από την άλλη.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι οι τυπικές αποκλίσεις των διαφορετικών ομάδων μετρήσεων είναι όλες ίδιες, $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_N$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να δείξουμε (βλέπε άσκηση 1) ότι η μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ παίρνουν αντίστοιχα τις τιμές

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mu_i \qquad \text{και} \qquad \sigma = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}} \tag{1.50}$$

[41] αν τυχαίες μεταβλητές ακολουθούν μια Γκαουσιανή κατανομή, τότε και οι μέσες τους τιμές ακολουθούν κι αυτές Γκαουσιανή κατανομή

και το τυπικό σφάλμα γίνεται

$$\boxed{\sigma_E = \sigma_M = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\sigma = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N-1}} = \frac{\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}{\sqrt{N-1}}. \qquad (1.51)}$$

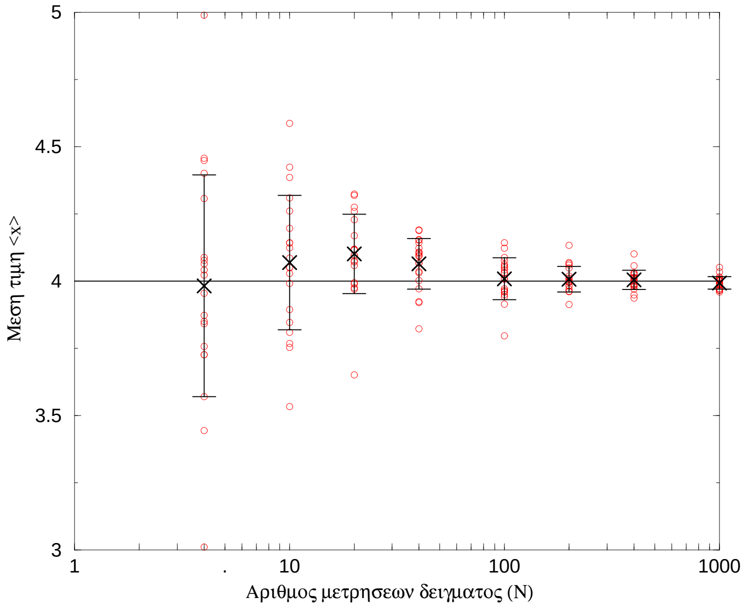
Η έκφραση αυτή για το τυπικό σφάλμα ονομάζεται **τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής** σ_M**, (standard error of the mean)** και η τιμή της αποτελεί ένα μέτρο της αξιοπιστίας της μέσης τιμής. Όσο μικρότερο είναι το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής, τόσο πιο αξιόπιστη είναι η μέση τιμή, δηλαδή τόσο πιο πολύ μπορούμε να είμαστε σίγουροι, ότι η μέση τιμή, που βρίσκουμε, είναι η πραγματική μέση τιμή.

Λαμβάνοντας υπ' όψη (α) ότι ο αριθμός των διαφορετικών ομάδων μετρήσεων ή το πλήθος των μετρήσεων που θα απαρτίζει κάθε ομάδα, είναι αυθαίρετα και (β) το γεγονός ότι η τυπική απόκλιση κάθε ομάδας μέτρησης είναι πρακτικά η ίδια (για τους λόγους που εξηγήσαμε παραπάνω) ανεξάρτητα από το πλήθος των μετρήσεων, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι κάθε μέτρηση είναι από μόνη της μια ομάδα μέτρησης, με μέση τιμή την τιμή της και τυπική απόκλιση την τυπική απόκλιση του συνόλου των μετρήσεων. Κάτω απ' αυτή τη θεώρηση, ο αριθμός των διαφορετικών ομάδων μετρήσεων N και η τυπική απόκλιση σ_1, που εμφανίζονται στον ορισμό του τυπικού σφάλματος της μέσης τιμής, ανάγονται στο συνολικό αριθμό των μετρήσεων και στην τυπική απόκλισή τους αντίστοιχα.

Ένα πολύ βασικό συμπέρασμα που εξάγεται απ' αυτό το αποτέλεσμα είναι ότι το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής είναι αντιστρόφως ανάλογο της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού των μετρήσεων. Αυτό με λίγα λόγια σημαίνει ότι όσες περισσότερες είναι οι μετρήσεις, τόσο πιο αξιόπιστη είναι η μέση τιμή. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει ανεξάρτητα από τη θεώρηση που κάναμε για την ισότητα των τυπικών αποκλίσεων, δεδομένου ότι μπορούμε να δείξουμε ότι σ_{min} και σ_{max} είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα των τυπικών αποκλίσεων σ_i, τότε

$$\frac{\sigma_{min}}{\sqrt{N}} \leq \sigma_M \leq \frac{\sigma_{max}}{\sqrt{N}}. \qquad (1.52)$$

Βλέπουμε ακόμα ότι η αξιοπιστία μιας μέσης τιμής εξαρτάται από την τυπική απόκλιση σ_1 του συνόλου των μετρήσεων, η τιμή της οποίας είναι τόσο μεγαλύτερη, όσο μεγαλύτερα είναι τα τυχαία σφάλματα. Όσο μεγάλη κι αν είναι όμως η τυπική απόκλιση σ_1, μπορούμε να έχουμε μια αξιόπιστη μέση τιμή παίρνοντας πολλές μετρήσεις. Το πόσες πολλές μετρήσεις θα πάρουμε εξαρτάται από το πόσο αξιόπιστη μέση τιμή θέλουμε να έχουμε. Στην εικόνα 1.8 βλέπουμε τις μέσες τιμές που βρέθηκαν για 20 ομάδες διαφορετικών μετρήσεων, που περιέχουν τυχαία σφάλματα, καθώς επίσης και τη μέση τους τιμή, ως συνάρτηση του πλήθους των διαφορετικών μετρήσεων κάθε ομάδας. Στο συγκεκριμένο γράφημα κάθε ομάδα μετρήσεων απαρτιζόταν από το ίδιο πλήθος μετρήσεων. Οι



Σχήμα 1.8: Οι μέσες τιμές 20 ομάδων μετρήσεων ως συνάρτηση του αριθμού των μετρήσεων κάθε ομάδας. Τα error bar παριστάνουν το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής και στη θέση των συμβόλων x εμφανίζονται οι μέσες τιμές των μέσων τιμών των διαφορετικών ομάδων μετρήσεων με τον ίδιο αριθμό μετρήσεων.

ράβδοι σφάλματος (error bar) [42] παριστάνουν την τιμή του τυπικού σφάλματος της μέσης τιμής. Αυτό που βλέπουμε από το γράφημα είναι ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των μετρήσεων ανά ομάδα, τόσο περισσότερο μειώνεται η διασπορά των μέσων τιμών από την πραγματική μέση τιμή. Οι μέσες τιμές συγκεντρώνονται πιο κοντά στην πραγματική μέση τιμή, με αποτέλεσμα το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής να μειώνεται.

Ένα άλλο μέτρο της αξιοπιστίας της μέσης τιμής είναι το λεγόμενο **διάστημα εμπιστοσύνης (confidence interval)**. Συνήθως αναφέρεται ως "διάστημα εμπιστοσύνης 95%", αλλά γενικά μπορούν να οριστούν διαστήματα εμπιστοσύνης άλλων ποσοστών. Το διάστημα εμπιστοσύνης 95% είναι ένα διάστημα μέσα στο οποίο περιμένουμε να βρεθεί η πραγματική μέση τιμή με πιθανότητα 95%. Γενικά μπορεί να ορίσει κανείς το "διάστημα εμπιστοσύνης $(1-a)100\%$", $(0 < a < 1)$, ως το διάστημα μέσα στο οποίο περιμένουμε να βρεθεί η πραγματική μέση τιμή με πιθανότητα $(1-a)100\%$. Αν μ είναι η πραγματική μέση τιμή και $\langle x \rangle$ η μέση τιμή που υπολογίζεται από τις μετρήσεις τότε το διάστημα εμπιστοσύνης $(1-a)100\%$ είναι το διάστημα

[42] για τις ράβδους σφάλματος δες στη σελίδα 94 περί γραφικών παραστάσεων

$$\left[\langle x\rangle - t_{N-1}(a)\frac{\sigma_E}{\sqrt{N}}, \quad \langle x\rangle + t_{N-1}(a)\frac{\sigma_E}{\sqrt{N}}\right] \quad \text{Διάστημα εμπιστοσύνης } (1-a)100\% \tag{1.53}$$

το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$P\left(\langle x\rangle - t_{N-1}(a)\frac{\sigma_E}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \langle x\rangle + t_{N-1}(a)\frac{\sigma_E}{\sqrt{N}}\right) = 1 - a, \tag{1.54}$$

όπου σ_E είναι το τυπικό σφάλμα των μετρήσεων ($\sigma_E = \sqrt{N/(N-1)}\sigma$). Η τιμή της παραμέτρου $t_{N-1}(a)$ προσδιορίζεται μέσω της κατανομής-t Student, η οποία τείνει στη Γκαουσιανή κατανομή όταν ο αριθμός των μετρήσεων N τείνει στο άπειρο ($N \to \infty$). Οι τιμές της παραμέτρου $t_{N-1}(a)$, για διάφορες τιμές των παραμέτρων N και a δίνονται στον πίνακα[43] 1.4.

Τη μέθοδο, που ήδη αναπτύξαμε για την αξιοπιστία της μέσης τιμής, μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την αξιοπιστία κάθε άλλης στατιστικώς εξαγόμενης ποσότητας.

1.9.1 Ασκήσεις

1. Σε ένα δείγμα 20 μετρήσεων ενός μεγέθους βρέθηκε μια μέση τιμή των μετρήσεων ίση με $\langle x\rangle = 51.2$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.5$. Να βρεθεί το τυπικό σφάλμα της μέτρησης καθώς και το διάστημα εμπιστοσύνης 99%.

2. Πώς θα άλλαζε το διάστημα εμπιστοσύνης της πρώτης άσκησης αν οι μετρήσεις ήταν 200 αντί για 20;

3. Πώς θα άλλαζε το διάστημα εμπιστοσύνης της πρώτης άσκησης αν η τυπική απόκλιση ήταν ίση με $\sigma = 0.05$ αντί για $\sigma = 0.5$;

4. Πώς θα άλλαζε το διάστημα εμπιστοσύνης της πρώτης άσκησης αν συγχρόνως οι μετρήσεις ήταν 200 και η τυπική απόκλιση ήταν $\sigma = 0.05$;

[43] Ο πίνακας είναι παρμένος από την ιστοσελίδα
http://en.wikipedia.org/wiki/Student's_tdistribution της wikipedia.

$N-1$	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.5%	99.8%	99.9%
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Πίνακας 1.4: Πίνακας με τις τιμές του παράγοντα $t_{N-1}(a)$ για τον υπολογισμό του διαστήματος εμπιστοσύνης. Ο αριθμός στην αρχή κάθε γραμμής είναι ο $N-1$, ενώ τα ποσοστά της πρώτης γραμμής αντιστοιχούν στο ποσοστό $(1-a)100\%$.

Κεφάλαιο 2

Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων και ανάλυση οπισθοδρόμησης

There are three kinds of lies: lies, damned lies, and statistics.
Benjamin Disraeli (1804-1881)

2.1 Εισαγωγή

Για να μελετήσουμε πειραματικά τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων είναι βολικό να χρησιμοποιούμε τις γραφικές παραστάσεις. Αν πρόκειται να παραστήσουμε μια συγκεκριμένη μαθηματική συνάρτηση $f(x)$, βρίσκουμε τα σημεία $y = f(x)$ της συνάρτησης, που αντιστοιχούν στις τιμές του ορίσματος x, με το γνωστό τρόπο τοποθετούμε τα σημεία (x, y) πάνω στη γραφική παράσταση και τα ενώνουμε μεταξύ τους. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να τοποθετήσουμε πάνω σε μια γραφική παράσταση και τα σημεία (x, y), που προέρχονται από ένα πείραμα, και περιγράφουν την τιμή y, που μετρήσαμε για το μέγεθος Y, όταν το μέγεθος X είχε την τιμή x. Αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων την καμπύλη που προβλέπει η θεωρία για τα σημεία (x, y), τότε περιμένουμε να αναπαράγουμε αυτή την καμπύλη με τα πειραματικά μας σημεία. Όμως επειδή οι μετρήσεις μας έχουν σφάλματα, οι πειραματικές τιμές των ποσοτήτων, που θέλουμε να τις παραστήσουμε με γραφική παράσταση, δε θα συμπίπτουν ακριβώς πάνω στην καμπύλη που υπολογίζουμε ότι αντιστοιχεί στις μετρήσεις μας. Αν π.χ. θέλουμε να μελετήσουμε την αύξηση της θερμοκρασίας σε ένα θερμικά μονωμένο δοχείο που περιέχει νερό, στο οποίο προσφέρουμε θερμότητα με σταθερό ρυθμό, τότε θα περιμέναμε θεωρητικά τα σημεία (x, y) χρόνου - θερμοκρασίας να βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία. Όμως η ύπαρξη σφαλμάτων στις μετρήσεις μας θα έχουν ως αποτέλεσμα, τα πειραματικά σημεία να μην βρίσκονται ακριβώς πάνω σ' αυτή την ευθεία. Λόγω αυτών των αποκλίσεών τους, (οι οποίες είναι τυχαία κατανεμημένες γύρω από την πραγματική τιμή) δεν μπορεί κανείς να χαράξει μονοσήμαντα τη ευθεία που προβλέπει η θεωρία. Θα μπορούσαμε δηλαδή να φτιάξουμε πολλές διαφορετικές ευθείες συνδέοντας ανά δύο τα πειραματικά μας σημεία και τελικά δε θα μπορούσαμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα για το ποιά ευθεία προσεγγίζει με τον καλύτερο τρόπο τα πειραματικά μας δεδομένα. Θα πρέπει κατά συνέπεια να βρούμε ένα τρόπο που θα μας επιτρέψει να χαράξουμε μια ευθεία, η οποία δε θα περνάει κατ' ανάγκη πάνω απ' τα πειραματικά σημεία (μιας και αυτό εκ των πραγμάτων δεν είναι εφικτό), αλλά τουλάχιστον οι αποστάσεις της από τα πειραματικά σημεία θα είναι όσο το δυνατό μικρότερες.

Τη λύση στο πρόβλημα αυτό την έδωσε ο $Gauss$ σε ηλικία μόλις 15 ετών, προτείνοντας ως ευθεία που προσεγγίσει καλύτερα την αληθινή ευθεία, εκείνη που προσαρμόζεται ανάμεσα στα πειραματικά σημεία κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεών τους απ' αυτή.

2.2 Προσαρμογή πειραματικών σημείων σε ευθεία με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι έχουμε τα πειραματικά σημεία (x_i, y_i), $i = 1, 2, ..., N$ και θέλουμε να προσαρμόσουμε ανάμεσα σ' αυτά την ευθεία $y = ax + b$ με τη μέθοδο που πρότεινε ο $Gauss$. Για κάθε πειραματικό δεδομένο x_i η διαφορά ανάμεσα στην τιμή y_i που μετρήθηκε για το μέγεθος U και αυτής που προκύπτει από την ευθεία $y = ax + b$ για το σημείο x_i είναι $\epsilon_i = y_i - y(x_i) = y_i - ax_i - b$. Η διαφορά αυτή οφείλεται σε τυχαία σφάλματα και κατά συνέπεια η κατανομή των ϵ_i πρέπει να είναι μια Γκαουσιανή κατανομή με μέση τιμή το μηδέν. Αν θέλαμε να βρούμε την τυπική απόκλιση σ_ϵ αυτών των σφαλμάτων τότε, επειδή η μέση τους τιμή $\langle\epsilon\rangle$ είναι μηδέν, η τυπική τους απόκλιση σ_ϵ θα είναι ίση με $\sigma_\epsilon = \sqrt{\langle\epsilon^2\rangle}$

Σύμφωνα με τη μέθοδο που πρότεινε ο Gauss θα πρέπει να βρεθούν κατάλληλα a και b που να ελαχιστοποιούν την τυπική απόκλιση σ_ϵ Θα πρέπει κατά συνέπεια να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα

$$\boxed{\sigma_\epsilon^2(a,b) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)^2. \qquad (2.1)}$$

Η ποσότητα αυτή είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών (των a και b), και ελαχιστοποιείται όταν οι μερικές παράγωγοί της $\partial\sigma_\epsilon(a,b)^2/\partial a$ και $\partial\sigma_\epsilon^2/\partial b$, ως προς a

και b αντίστοιχα, γίνουν ίσες με μηδέν [1] Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Ας δούμε λοιπόν τι προκύπτει από τις πράξεις

$$\frac{\partial\sigma_\epsilon^2(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)^2\right) = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)x_i = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\sigma_\epsilon^2(a,b)}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)^2\right) = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b) = 0 \quad (2.3)$$

Από τους μηδενισμούς των μερικών αυτών παραγώγων προκύπτει το γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$\begin{aligned} a\langle x^2\rangle + b\langle x\rangle &= \langle xy\rangle \qquad \text{και} \\ a\langle x\rangle + b &= \langle y\rangle. \end{aligned}$$

Ας σημειωθεί ότι η δεύτερη από τις δύο αυτές εξισώσεις είναι ισοδύναμη με το μηδενισμό της μέσης τιμής των ϵ_i, όπως αναφέραμε νωρίτερα. Λύνοντας αυτό το γραμμικό σύστημα εξισώσεων, βρίσκουμε

$$\boxed{a = \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \qquad \text{και} \qquad b = \langle y\rangle - a\langle x\rangle, \qquad (2.4)}$$

όπου το σύμβολο $\langle w\rangle$ παριστάνει την μέση τιμή του μεγέθους w, όπως έχουμε ήδη δει. Δηλαδή

$$\langle x\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i, \qquad \langle y\rangle = \sum_{i=1}^{N} y_i, \qquad \langle x^2\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i^2, \qquad \langle xy\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \qquad (2.5)$$

Παρατηρώντας ότι στην εξίσωση 2.4 ο παρανομαστής είναι ίσος με σ_x^2, μπορούμε να γράψουμε

$$a = \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\sigma_x^2}. \qquad (2.6)$$

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι ο αριθμητής $\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle$ γράφεται και ως

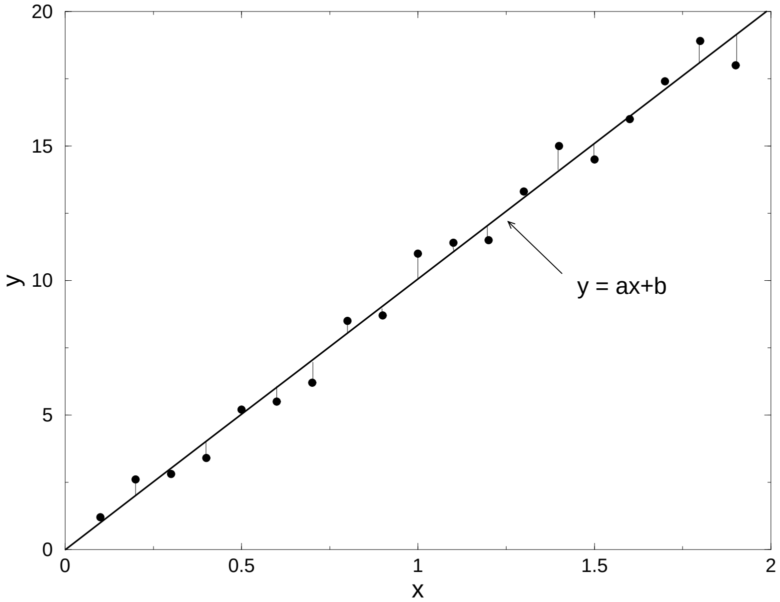
$$\sigma_{xy} = \langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \langle x\rangle)\cdot(y_i - \langle y\rangle). \qquad (2.7)$$

Τη μορφή αυτή θα τη συναντήσουμε παρακάτω και γι' αυτό την αναφέρουμε.

Χρησιμοποιώντας και το συμβολισμό σ_{xy} η κλίση a της ευθείας γράφεται

---

[1] Θυμηθείτε ότι σε συναρτήσεις μιας μεταβλητής, το ελάχιστο ή το μέγιστο βρίσκεται εκεί που μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης. Στην περίπτωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, τα μέγιστα και τα ελάχιστα εμφανίζονται σε σημεία που μηδενίζονται οι μερικές τους παράγωγοι.



Σχήμα 2.1: Η ευθεία προσαρμόζεται στα πειραματικά δεδομένα έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων (οι γραμμούλες που φαίνονται από τα πειραματικά σημεία προς την ευθεία) να γίνεται ελάχιστο.

$$\boxed{a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}. \qquad (2.8)}$$

Τέλος ας σημειωθεί ότι, όπως φαίνεται και από τη δεύτερη εξίσωση 2.4, το σημείο $(\langle x\rangle, \langle y\rangle)$ είναι σημείο της ευθείας.

2.2.1 Σφάλμα της μεθόδου

Είναι λογικό η τυπική απόκλιση των διαφορών $\epsilon_i = y_i - y(x_i)$ (η οποία ελαχιστοποιείται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων) να δίνει μια εκτίμηση της απόκλισης των πειραματικών τιμών y_i από τις αντίστοιχες πραγματικές. Η τυπική απόκλιση λοιπόν σ_ϵ θα μπορούσε να εκληφθεί ως σφάλμα των τιμών $y(x)$ της ευθείας $y(x) = ax + b$. Δεδομένου ότι με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων η τυπική απόκλιση σ_ϵ ελαχιστοποιείται, θα πρέπει να βρούμε την τιμή της $\sigma_\epsilon(a, b)$, όταν τα a και b είναι αυτά που προκύπτουν από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Ας βρούμε λοιπόν την τιμή του σ_ϵ. Για ευκολία παίρνουμε την έκφραση του σ_ϵ^2, που δεν έχει την τετραγωνική ρίζα. Αντικαθιστώντας το b με $b = \langle y\rangle - a\langle x\rangle$ (βλέπε εξίσωση 2.4)έχουμε

$$(\sigma_\epsilon)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[(y_i - \langle y\rangle) - a(x_i - \langle x\rangle)\right]^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \langle y\rangle)^2 + a^2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \langle x\rangle)^2 - \\ &\quad -2a\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \langle y\rangle)(x_i - \langle x\rangle) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις εξισώσεις 2.7 και 2.8 έχουμε

$$\begin{aligned} (\sigma_\epsilon)^2 &= \sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2 - 2a\sigma_{xy} = \sigma_y^2 + a^2\sigma_x^2 - 2a^2\sigma_x^2 = \sigma_y^2 - a^2\sigma_x^2 \qquad (2.10) \\ &= \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^4}\sigma_x^2 = \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = \sigma_y^2\left(1 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}\right) = \sigma_y^2(1 - r^2), \end{aligned}$$

όπου

$$\boxed{r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}} \tag{2.11}$$

είναι ο λεγόμενος **συντελεστής συσχέτισης**, την έννοια του οποίου θα τη δούμε παρακάτω.

Καταλήγουμε λοιπόν στην έκφραση

$$\sigma_\epsilon = \sigma_y\sqrt{1 - r^2}. \tag{2.12}$$

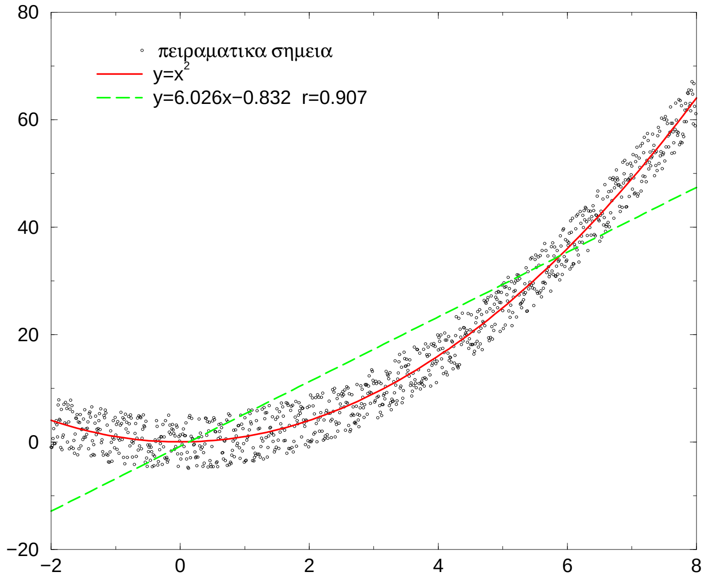
Κατ' αναλογία με τον ορισμό του τυπικού σφάλματος (βλέπε εξίσωση 1.7) ορίζουμε το **τυπικό σφάλμα εκτίμησης - Standard Error of Estimate (**SEE**)** από τη σχέση

$$\boxed{SEE = \sqrt{\frac{N}{N-2}}\sigma_\epsilon = \sqrt{\frac{N}{N-2}}\sigma_y\sqrt{1 - r^2}.} \tag{2.13}$$

Αυτό θα θεωρούμε ως σφάλμα των τιμών y της ευθείας. Ας σημειωθεί ακόμα ότι επειδή $y(0) = b$, το SEE μπορεί να θεωρηθεί ως το σφάλμα στον υπολογισμό του σταθερού όρου b της ευθείας $y = ax + b$.

2.2.2 Πότε τα πειραματικά σημεία αντιστοιχούν σε ευθεία

Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, που μόλις αναπτύξαμε, μπορούμε να προσαρμόσουμε τη βέλτιστη ευθεία στα πειραματικά μας σημεία. Προφανώς εμείς μπορούμε πάντα να βρίσκουμε την ευθεία αυτή, που προκύπτει με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Αυτό όμως σε καμιά περίπτωση δε σημαίνει ότι τα πειραματικά σημεία αντιστοιχούν σε ευθεία. Για να αντιστοιχούν σε ευθεία, θα πρέπει να υπάρχουν τουλάχιστον κάποιες "αποχρώσες ενδείξεις" ότι συμβαίνει αυτό. Σε πρώτη προσέγγιση θα πρέπει η οπτική αίσθηση που δίνουν τα πειραματικά σημεία να αντικατοπτρίζει την εικόνα μιας ευθείας, ή



Σχήμα 2.2: Η ευθεία $y = 6.026x - 0.832$, που προσαρμόζεται στα πειραματικά σημεία με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, καμιά σχέση δεν έχει με τα πειραματικά δεδομένα, τα οποία προσαρμόζονται καλύτερα στην παραβολή $y = x^2$

θα πρέπει η θεωρία που βρίσκεται πίσω από το πείραμα, να προβλέπει ότι η σχέση μεταξύ των πειραματικών σημείων (x_i, y_i) είναι ευθεία. Αν δε συμβαίνει κάτι τέτοιο, τότε δεν έχει κανένα απολύτως νόημα να βρούμε την ευθεία που προκύπτει από τα πειραματικά σημεία με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Ειδικότερα σε περιπτώσεις που η εικόνα των πειραματικών σημείων δεν αφήνει καμιά αμφιβολία ότι η γραφική τους παράσταση δεν είναι ευθεία, τότε η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων δεν είναι δυνατό να παριστάνει την εξάρτηση των y_i από τα x_i, παρ' όλο που έτσι κι αλλιώς μπορούμε να τη βρούμε, κάνοντας τις παραπάνω πράξεις. Ως παράδειγμα δείχνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 2.2. Τα πειραματικά σημεία φαίνεται να ταιριάζουν περισσότερο στην παραβολή $y = x^2$, που φαίνεται στη γραφική παράσταση. Βεβαίως η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων μπορεί κάλλιστα να βρεθεί και τη βρίσκουμε να είναι η $y = 6.026x - 0.832$. Ωστόσο η ευθεία αυτή σε καμιά περίπτωση δεν παριστάνει την σχέση ανάμεσα στα y_i και x_i των πειραματικών σημείων.

Ένα μέτρο της προσαρμοστικότητας των πειραματικών σημείων πάνω στην ευθεία είναι ο λεγόμενος **συντελεστής συσχέτισης**, τον οποίο ήδη αναφέραμε παραπάνω και θα μιλήσουμε εκτενέστερα στη συνέχεια.

Συντελεστής συσχέτισης

Εκείνο το οποίο κάναμε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, είναι ότι ελαχιστοποιήσαμε την τυπική απόκλιση των διαφορών $\epsilon_i = y_i - y(x_i)$, δηλαδή των διαφορών ανάμεσα στα y_i των πειραματικών σημείων (x_i, y_i) και των αντίστοιχων τιμων $y(x_i)$, που προκύπτουν από την ευθεία που προσαρμόζεται σ' αυτά. Θα μπορούσε όμως κανείς να σκεφτεί ότι εκτός αυτές τις διαφορές, υπάρχουν και οι διαφορές ανάμεσα στο x_i και στο αντίστοιχο x της ευθείας που αντιστοιχεί στο ίδιο y_i του πειραματικού σημείου. Θα μπορούσαμε δηλαδή αντί να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα $\sum_i (y_i - ax_i - b)^2$, να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα $\sum_i (x_i - x(y_i))^2 = \sum_i (x_i - Ay_i - B)^2$, όπου $x(y) = Ay + B$ η ευθεία, που θα προέκυπτε απ' αυτή την ελαχιστοποίηση. Ιδωμένο απ' αυτή την άποψη, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το προηγούμενο πρόβλημα με εναλλαγή ρόλων μεταξύ x και y. Με την εναλλαγή αυτών των ρόλων, και κατ' αναλογία με αυτά που έχουμε ήδη βρεί για τα a και b (βλέπε εξισώσεις 2.4, και 2.8), η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος $\sum_i (x_i - Ay_i - B)^2$ θα δώσει

$$A = \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle y^2\rangle - \langle y\rangle^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} \qquad \text{και} \qquad B = \langle x\rangle - A\langle y\rangle. \tag{2.14}$$

Αν λύσουμε την εξίσωση της ευθείας $y = ax + b$ ως προς x παίρνουμε $x = y/a - b/a$. Η σχέση του x ως προς y συνεχίζει να είναι ευθεία, με κλίση όμως τώρα $1/a$. Θα περίμενε ίσως κανείς οι ευθείες $x = y/a - b/a$ και $x = Ay + B$ να συμπίπτουν. Αυτό ωστόσο δε συμβαίνει σχεδόν ποτέ. Μοναδική περίπτωση που συμβαίνει αυτό, είναι όταν τα πειραματικά σημεία είναι σημεία της ίδιας ευθείας και αυτό θα δείξουμε στη συνέχεια [2].

Κατ' αρχήν ας δούμε ότι στην περίπτωση αυτή η ευθεία $y = ax + b$ είναι η ευθεία που θα προέκυπτε από τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Αν τα πειραματικά σημεία (x_i, y_i) βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = ax + b$, τότε $y_i = ax_i + b$ και επομένως $\sum_i (y_i - ax_i - b)^2 = 0$. Επειδή το άθροισμα $\sum_i (y_i - ax_i - b)^2 = 0$ είναι άθροισμα θετικών ποσοτήτων, ο μηδενισμός του συνεπάγεται την ελαχιστοποίησή του. Επομένως η ευθεία $y = ax+b$ είναι όντως η ευθεία που θα προέκυπτε με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, αφού αυτή ελαχιστοποιεί το άθροισμα.

Ας δούμε τώρα τι τιμή θα πάρει η κλίση A της ευθείας $x = Ay + B$. Επειδή $y_i = ax_i + b$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\langle x(ax+b)\rangle - \langle x\rangle\langle ax+b\rangle}{\langle (ax+b)^2\rangle - \langle ax+b\rangle^2} = \frac{a\langle x^2\rangle \cdot b\langle x\rangle - a\langle x\rangle^2 - b\langle x\rangle}{a^2\langle x^2\rangle + 2ab\langle x\rangle + b^2 - (a\langle x\rangle + b)^2} \\ &= a\frac{\sigma_x^2}{a^2\langle x^2\rangle + 2ab\langle x\rangle + b^2 - a^2\langle x\rangle^2 - 2ab\langle x\rangle - b^2} = a\frac{\sigma_x^2}{a^2\sigma_x^2} = 1/a \end{aligned}$$

Επίσης

$$B = \langle x\rangle - A\langle y\rangle = \langle x\rangle - \frac{1}{a}\langle y\rangle = \frac{a\langle x\rangle - \langle y\rangle}{a} = -\frac{b}{a}. \tag{2.15}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι στην περίπτωση που τα πειραματικά σημεία πέφτουν πάνω σε ευθεία, τότε οι ευθείες $y = ax + b$ και $x = Ay + B$, που προκύπτουν από τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ταυτίζονται.

[2] η απόδειξη μπορεί να παραληφθεί σε πρώτη ανάγνωση

Ας δούμε τώρα αν ισχύει το αντίστροφο. Ας υποθέσουμε δηλαδή ότι οι ευθείες $y = ax + b$ και $x = Ay + B$ ταυτίζονται κι ας δούμε αν τα πειραματικά σημεία πέφτουν πάνω σ' αυτές [3]. Ταύτιση των ευθειών $y = ax+b$ και $x = Ay+B$ σημαίνει $A = 1/a$ και $B = -b/a$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 2.8 και 2.14, η ισότητα $A = 1/a$ γίνεται

$$A = \frac{1}{a} \Longrightarrow \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{xy}} \Longrightarrow \sigma_{xy}^2 = \sigma_x^2\sigma_y^2 \Longrightarrow \sigma_{xy} = \pm\sigma_x\sigma_y. \tag{2.16}$$

Τότε

$$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \pm\frac{\sigma_y}{\sigma_x} \tag{2.17}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση η τυπική απόκλιση σ_ϵ μέσω της εξίσωσης 2.10 γράφεται ως

$$\sigma_\epsilon = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - ax_i - b)^2 = \sigma_y^2 - a^2\sigma_x^2 = \sigma_y^2 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\sigma_x^2 = 0. \tag{2.18}$$

Αν λοιπόν $A = 1/a$ τότε η τυπική απόκλιση σ_ϵ μηδενίζεται. Είδαμε όμως παραπάνω ότι σ' αυτή την περίπτωση θα πρέπει κάθε όρος της να είναι ίσος με μηδέν. Κατά συνέπεια θα πρέπει $y_i = ax_i + b$ για όλα τα πειραματικά σημεία (x_i, y_i). Αυτό προφανώς σημαίνει ότι τα πειραματικά σημεία βρίσκονται πάνω στην ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι **οι ευθείες** $y = ax + b$ **και** $x = Ay + B$ **συμπίπτουν, τότε και μόνο τότε, όταν τα πειραματικά σημεία πέφτουν πάνω σ' αυτές.** Από τη σχέση $A = 1/a$, που όπως είδαμε ισχύει σ' αυτή την περίπτωση, και από τις σχέσεις 2.8 και 2.14, έχουμε

$$Aa = 1 \Longrightarrow \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} = 1. \tag{2.19}$$

Την ποσότητα $\sigma_{xy}/\sigma_x\sigma_y$ την είδαμε στη σελίδα 61 και είχαμε πει ότι είναι **ο συντελεστής συσχέτισης**. Όπως βλέπουμε εδώ, το γινόμενο των κλίσεων των δύο ευθειών Aa είναι ίσο με το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης ($r^2 = Aa$). Σύμφωνα με όσα συμπεράναμε παραπάνω, ο συντελεστής συσχέτισης παίρνει την τιμή $r = 1$, τότε και μόνο τότε, όταν τα πειραματικά σημεία πέφτουν πάνω σε ευθεία. Επομένως σε κάθε άλλη περίπτωση $r \neq 1$.

Αξίζει εδώ να σημειώσουμε [4] ότι η τιμή $r = 1$ και $r = -1$ είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή αντίστοιχα, που μπορεί να πάρει ο συντελεστής συσχέτισης. Αυτό προκύπτει από την ανισότητα Cauchy - Schwarz η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$\left(\sum_{i=1}^{N} X_iY_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{N} Y_i^2. \tag{2.20}$$

[3] η απόδειξη επίσης μπορεί να παραληφθεί σε πρώτη ανάγνωση

[4] η απόδειξη που ακολουθεί, μπορεί να παραληφθεί σε πρώτη ανάγνωση

Αν θεωρήσουμε ότι $X_i = x_i - \langle x \rangle$ και $Y_i = y_i - \langle y \rangle$ και διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με N^2, η παραπάνω ανισότητα 2.20 γίνεται

$$\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle)(y_i - \langle y \rangle) \right)^2 \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \langle x \rangle)^2 \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \langle y \rangle)^2. \quad (2.21)$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της εξίσωσης 2.7 και τον ορισμό της τυπικής απόκλισης (βλέπε εξίσωση 1.4), η ανισότητα 2.21 γράφεται

$$\sigma_{xy}^2 \leq \sigma_x^2 \sigma_y^2 \quad (2.22)$$

και επομένως

$$-\sigma_x \sigma_y \leq \sigma_{xy} \leq \sigma_x \sigma_y. \quad (2.23)$$

Κατά συνέπεια

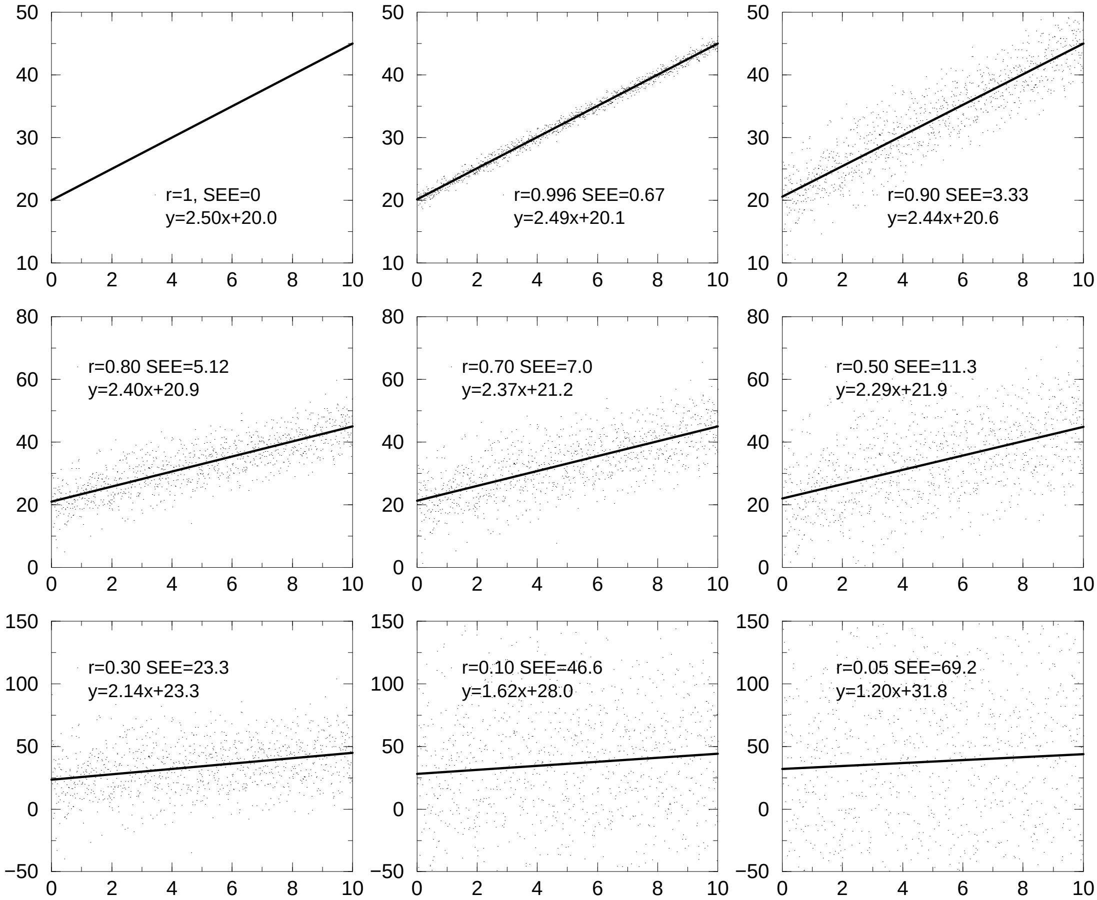
$$-1 \leq \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \leq 1 \quad (2.24)$$

Ο συντελεστής συσχέτισης αποτελεί ένα μέτρο της προσαρμοστικότητας των πειραματικών σημείων (x_i, y_i) στην ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων. Όσο πιο κοντά στην ευθεία βρίσκονται τα πειραματικά σημεία, τόσο πιο κοντά στο 1 ή στο -1 βρίσκεται ο συντελεστής συσχέτισης. Αντιστρόφως όσο ο συντελεστής συσχέτισης απομακρύνεται από το 1 ή το -1, τόσο λιγότερο προσαρμόσιμα είναι τα πειραματικά σημεία στην ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή του συντελεστή συσχέτισης, ως κριτήριο της προσαρμοστικότητας των πειραματικών σημείων σε μια καμπύλη, δεν έχει νόημα να εφαρμόζεται αν η καμπύλη δεν είναι η ευθεία. Ως παράδειγμα αναφέρουμε τα πειραματικά σημεία της γραφικής παράστασης 2.2, στην οποία είναι φανερό ότι τα πειραματικά σημεία δεν προσαρμόζονται σωστά σε ευθεία. Παρ' όλα αυτά ο συντελεστής συσχέτισης είναι ίσος με $r = 0.907$, ($r^2 = 0.823$), πράγμα που σημαίνει υψηλή συσχέτιση μεταξύ των πειραματικών σημείων.

Αν τα x_i και y_i δεν έχουν καμιά απολύτως συσχέτιση (είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους), τότε $r = 0$.

Στο σχήμα 2.3 βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν από τα "πειραματικά" σημεία που ανήκουν στην ευθεία $y = 2.5x + 20$, στην οποία έχουμε προσθέσει τυχαία σφάλματα. Τα τυχαία αυτά σφάλματα είναι επιλεγμένα ώστε να ακολουθούν τη Γκαουσιανή κατανομή και να έχουν μέση τιμή μηδέν.

Όπως μπορεί να δει κανείς, όσο αυξάνεται η τυχαιότητα (δηλαδή όσο τα σημεία κατανέμονται τυχαία στο χώρο και όχι πάνω στην ευθεία, τόσο ο συντελεστής συσχέτισης πλησιάζει την τιμή 0.



Σχήμα 2.3: Ο συντελεστής συσχέτισης οδηγείται στο 0, όσο αυξάνεται η τυχαιότητα.

2.2.3 Προσαρμογή σε καμπύλες που δεν είναι ευθείες

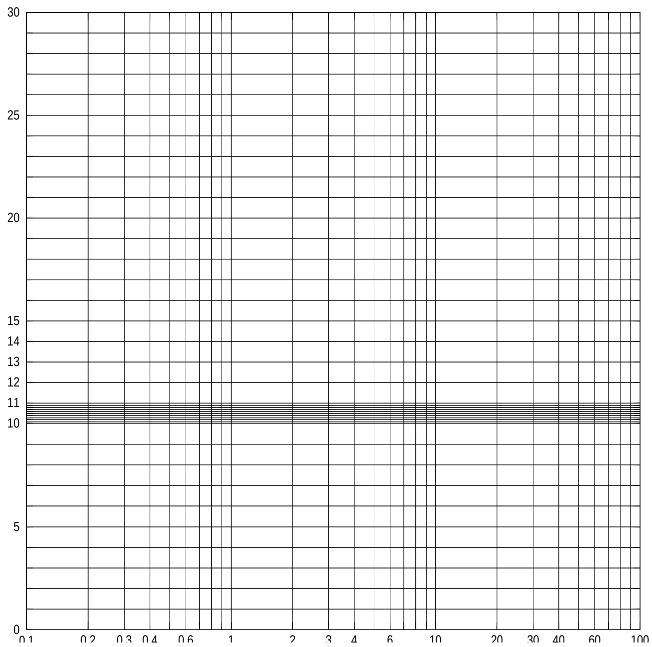
Προφανώς τα πειραματικά σημεία δεν ακολουθούν πάντα μια ευθεία. Αυτό φαίνεται να δυσκολεύει τα πράγματα. Στην πραγματικότητα όμως τα πράγματα δεν είναι και τόσο δύσκολα, αν αναλογιστεί κανείς ότι η ιδέα παραμένει η ίδια. Αν π.χ. πρέπει στα πειραματικά σημεία να προσαρμοστεί η καμπύλη $f(x) = f(x; a, b, c, \ldots)$, η οποία έχει ως ελεύθερες παραμέτρους τα a, b, c κ.τ.λ., τότε θα πρέπει και πάλι να ελαχιστοποιηθεί το άθροισμα $\sum_i (y_i - f(x_i))^2$. Και σ' αυτή την περίπτωση θα πρέπει να μηδενιστούν οι μερικές παράγωγοι του αθροίσματος ως προς τις ελεύθερες παραμέτρους a, b, c κ.τ.λ., όπως ακριβώς κάναμε και με την περίπτωση της ευθείας. Θα προκύψει έτσι ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, από τη λύση του οποίου θα προκύψουν οι τιμές των παραμέτρων a, b, c κ.τ.λ., που δίνουν τη βέλτιστη καμπύλη.

Η ίδια ακριβώς μεθοδολογία θα εφαρμοζόταν και στην περίπτωση, που η συνάρτηση f δεν ήταν συνάρτηση μιας μεταβλητής, αλλά πολλών μεταβλητών, π.χ. να έχει τη μορφή $f(x, y, z) = ax^2 + bx + cy + dz + eyz + f$. Και σ' αυτή την περίπτωση ο μηδενισμός των αντίστοιχων μερικών παραγώγων οδηγεί σε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, η λύση των οποίων δίνει τις τιμές των ελεύθερων παραμέτρων.

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις που περιγράψαμε η εύρεση των παραμέτρων είναι μια σχετικά εύκολη υπόθεση, αν το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων που θα προκύψει για τις ελεύθερες παραμέτρους a, b, c κ.τ.λ., είναι ένα γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Το πρόβλημα αρχίζει να δυσκολεύει όταν το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων, που προκύπτει από τους μηδενισμούς των μερικών παραγώγων ως προς τις ελεύθερες παραμέτρους, δεν είναι γραμμικό. Π.χ. $f(t) = f(t; A, \omega) = A \cos \omega t$, με ελεύθερες παραμέτρους A και ω. Σε τέτοιες περιπτώσεις η λύση δίνεται συνήθως μόνο αριθμητικά και όχι αναλυτικά, και ο βαθμός δυσκολίας επίλυσης τέτοιων συστημάτων εξισώσεων αυξάνεται.

2.2.4 Περιπτώσεις που ανάγονται σε ευθείες

Αν θέλουμε να προσαρμόσουμε μια καμπύλη σε πειραματικά δεδομένα, Θα ήταν ιδιαίτερα βολικό αν μπορούσαμε να μετατρέψουμε τη μορφή της σε ευθεία. Αυτό δε γίνεται πάντα. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις στις οποίες γίνεται. Είδαμε παραπάνω ότι ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων σε μια ευθεία, είναι δύο (η κλίση a και η τεταγμένη b). Κατά συνέπεια δε μπορούμε να μετασχηματίσουμε μια καμπύλη σε ευθεία, αν έχει περισσότερες από δύο ελεύθερες και ανεξάρτητες μεταξύ τους παραμέτρους. Βασική επομένως προϋπόθεση για να μπορεί μια καμπύλη να αναχθεί σε ευθεία, είναι να έχει δύο το πολύ ελεύθερες παραμέτρους. Ωστόσο αυτό δε γίνεται πάντα και ένα παράδειγμα είδαμε μόλις πριν λίγο με τη συνάρτηση $f(t) = f(t; A, \omega) = A \cos \omega t$. Στη συνέχεια θα δείξουμε περιπτώσεις συναρτήσεων $y = f(x; a, b)$, που με κατάλληλο μετασχηματισμό



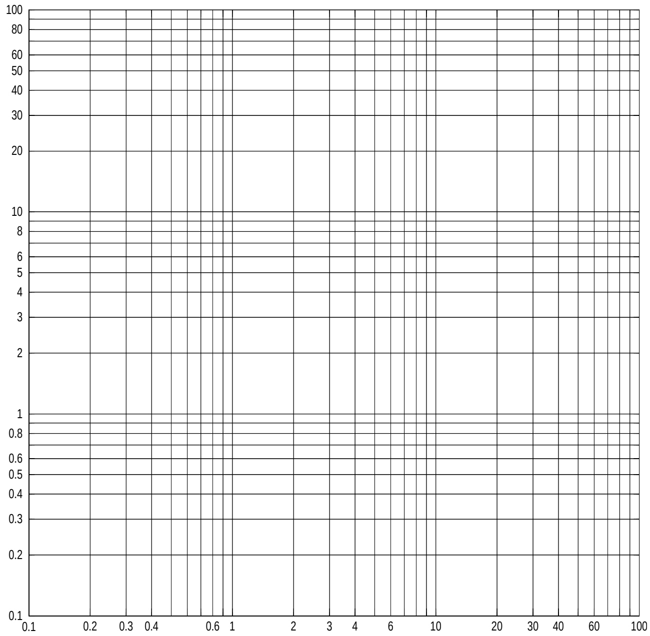
Σχήμα 2.4: Το ημιλογαριθμικό χαρτί. Πάνω στις κάθετες στον άξονα xx' γραμμές, βρίσκονται οι τιμές των λογαρίθμων των ορισμάτων που είναι σημειωμένα. (Εκεί που γράφει 0.7 βρίσκεται ο $\log_{10} 0.7$)

των x και y σε X και Y αντίστοιχα, μετασχηματίζονται σε ευθείες $Y = AX + B$.

Η σχέση $\underline{y = ax^n + b}$ (με γνωστό n) μετασχηματίζεται στην ευθεία $Y = aX + b$ αν $X = x^n$ και $Y = y$. Μετατρέπουμε λοιπόν τα ζεύγη μετρήσεων (x_i, y_i) σε (x_i^n, y_i).

Η σχέση $\underline{y = be^{ax}}$, μετασχηματίζεται στην ευθεία $Y = aX + \ln b$, αν $X = x$ και $Y = \ln y$. (Παίρνοντας τους λογαρίθμους των δύο μελών, έχουμε $\ln y = \ln b + a \ln ex = \ln b + ax$). Μετατρέπουμε λοιπόν τα ζεύγη μετρήσεων (x_i, y_i) σε $(x_i, \ln y_i)$. Μπορεί επίσης να γίνει λογαρίθμηση της σχέσης σε άλλη βάση. Με βάση το 10 η σχέση θα μετασχηματίζονταν στην ευθεία $Y = a \log eX + \log b$, όπου $X = x$ και $Y = \log y$ ($\log e = 0.43429448$). Οπότε τα ζεύγη μετρήσεων (x_i, y_i) μετατρέπονται σε $(x_i, \log y_i)$.

Τέτοιες γραφικές παραστάσεις είναι εύκολες να γίνουν στο λεγόμενο ημιλογαριθμικό χαρτί (βλέπε σχήμα 2.4). Αυτό το χαρτί είναι διαγραμμισμένο όπως το μιλιμετρέ. Στο μιλιμετρέ χαρτί κάθε γραμμή ισαπέχει από τις διπλανές της και στους δύο άξονες. Στο ημιλογαριθμικό χαρτί οι γραμμές του ενός άξονα ισαπέχουν μεταξύ τους (όπως στο μιλιμετρέ) ενώ για τις γραμμές του άλλου άξονα ισαπέχουν τα ορίσματα των λογαρίθμων τους. Με λίγα λόγια οι γραμμές του δεύτερου άξονα του ημιλογαριθμικού χαρτιού παριστάνουν τις θέσεις των δεκαδικών λογαρίθμων. Η ευκολία δηλαδή που παρέχει το ημιλογαριθμικό χαρτί είναι ότι δε χρειάζεται να υπολογιστούν οι λογάριθμοι των μετρήσεων, γιατί οι ίδιες οι γραμμές του λογαριθμικού άξονα, δίνουν τις τιμές



Σχήμα 2.5: Το λογαριθμικό χαρτί. Οι κάθετες γραμμές και στους δύο άξονες παριστάνουν τους λογαρίθμους των ορισμάτων που είναι σημειωμένα.

των λογαρίθμων. Π.χ. οι γραμμές του ενός άξονα που παριστάνουν ισαπέχουσες αποστάσεις μπορεί να αντιστοιχούν στις τιμές 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 κ.τ.λ. ενώ οι γραμμές του άλλου (λογαριθμικού) άξονα μπορεί να παριστάνουν τις τιμές $\log 0.1$, $\log 0.2$, $\log 0.3$, $\log 0.4$ κ.τ.λ. Έτσι είναι βολική η χρήση του γιατί δε χρειάζεται να βρίσκουμε τους λογαρίθμους και να τους τοποθετούμε πάνω στο διάγραμμα, αλλά τους τοποθετούμε εκεί που μας δείχνουν τα ορίσματα.

Η σχέση $\underline{y = bx^a}$μετασχηματίζεται στην ευθεία $Y = aX + \log b$, αν $X = \log x$ και $Y = \log y$. (Λογαριθμίζοντας τη σχέση, παίρνουμε $\log y = \log b + a \log x$). Σ' αυτή την περίπτωση τα ζεύγη μετρήσεων (x_i, y_i) μετατρέπονται σε $(\log x_i, \log y_i)$. Τέτοιες γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν εύκολα στο λεγόμενο λογαριθμικό χαρτί, του οποίου και οι δύο άξονες έχουν λογαριθμική κλίμακα (βλέπε σχήμα 2.5).

2.3 Ανάλυση οπισθοδρόμησης ή παλινδρόμησης (Regression Analysis)

Ο προσδιορισμός των ελεύθερων παραμέτρων μιας εξίσωσης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, που μόλις περιγράψαμε, ονομάζεται **ανάλυση οπισθοδρόμησης ή παλινδρόμησης (Regression Analysis)**. Μέχρι τώρα είδαμε πώς να προσαρμόσουμε μια καμπύλη στα πειραματικά δεδομένα, η μορφή της οποίας είναι συγκεκριμένη και δεδομένη, και προβλέπεται από κάποια θεωρία.

Το μόνο που έχουμε να κάνουμε σ' αυτή την περίπτωση, είναι να προσδιορίσουμε την τιμή των ελεύθερων παραμέτρων της εξίσωσης που αντιστοιχεί στην καμπύλη των πειραματικών σημείων. Η ανάλυση οπισθοδορόμησης σ' αυτή την περίπτωση ονομάζεται **ιεραρχική οπισθοδρόμηση (hierarchical regression)**.

Υπάρχει όμως και το ενδεχόμενο να μην υπάρχει κάποιο σαφές και ξεκάθαρο θεωρητικό υπόβαθρο πίσω από τα πειραματικά δεδομένα, ώστε η θεωρία η ίδια να προβλέπει την εξίσωση που θα διέπει τα πειραματικά δεδομένα. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση που διέπει τα πειραματικά δεδομένα μπορεί να κατασκευαστεί μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Στις περιπτώσεις αυτές ο σκοπός είναι να κατασκευαστεί μια εξίσωση πρόβλεψης (prediction equation), μέσω της οποίας θα μπορεί να προβλεφθεί η τιμή του υπό εξέταση μεγέθους, αν είναι γνωστές οι τιμές των μεγεθών από τα οποία εξαρτάται. Επίσης μέσω τέτοιων εξισώσεων θα μπορούν να αξιολογηθούν οι πειραματικές μέθοδοι και θα μπορέσουν να ερμηνευθούν τα πειραματικά δεδομένα. Ο τρόπος κατασκευής μιας τέτοιας εξίσωσης γίνεται συνήθως βηματικά. Κατ' αρχήν βρίσκουμε το μέγεθος από το οποίο υπάρχει η μεγαλύτερη εξάρτηση του υπό εξέταση μεγέθους. Χρησιμοποιώντας ότι θεωρητικά εργαλεία έχουμε στη διάθεσή μας, αλλά και τη μορφή των πειραματικών σημείων, όπως αυτή απεικονίζεται πάνω σε ένα γράφημα, προσδιορίζουμε τη γενική μορφή που περιμένουμε να έχει η εξίσωση μεταξύ των δύο αυτών μεγεθών. Στη συνέχεια, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προσδιορίζουμε τις τιμές των ελευθέρων παραμέτρων, που θα έχει η εξίσωση αυτή. Σε κάθε επόμενο βήμα εισάγουμε στην εξίσωση του προηγούμενου βήματος την εξάρτηση που περιμένουμε να έχει το υπό εξέταση μέγεθος, από το αμέσως πιο σημαντικό μέγεθος. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρις ότου η εξίσωση πρόβλεψης να μη βελτιώνεται περισσότερο, εισάγοντας σ' αυτή εξαρτήσεις από άλλα μεγέθη. Η ανάλυση οπισθοδρόμησης σ' αυτή την περίπτωση ονομάζεται **βηματική οπισθοδρόμηση (stepwise regression)** και είναι αυτή η μορφή της ανάλυσης οπισθοδρόμησης, που θα μας απασχολήσει κατά κύριο λόγο.

Μια καλή εξίσωση πρόβλεψης έχει σταθερές τιμές στις ελεύθερες παραμέτρους της. Αυτό σημαίνει ότι αν με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων υπολογίσουμε τις τιμές των ελεύθερων παραμέτρων από δύο διαφορετικές ομάδες πειραματικών σημείων, τότε οι τιμές αυτές πρέπει να είναι ίδιες, ή στη χειρότερη περίπτωση να μη διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους. Προκειμένου να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το δείγμα των πειραματικών σημείων να είναι μεγάλο, ώστε οι διαφορές των μέσων τιμών να ελαχιστοποιούνται.

2.4 Τεχνικές εξακρίβωσης της εγκυρότητας μιας εξίσωσης

Οι τεχνικές εξακρίβωσης της εγκυρότητας (cross - validation techniques) μιας εξίσωσης, είναι τεχνικές που μας επιτρέπουν να αξιολογήσουμε την ακρίβεια με την οποία μια εξίσωση πρόβλεψης, προβλέπει αυτά που προβλέπει. Με τις μεθόδους αυτές ελέγχεται κατά πόσο μια εξίσωση που έχει προκύψει με την ανάλυση οπισθοδρόμησης από μια ομάδα πειραματικών σημείων, κάνει σωστές προβλέψεις σε ένα άλλο δείγμα από πειραματικά σημεία.

Υπάρχουν τρία είδη εξακρίβωσης της εγκυρότητας, η εξωτερική (external cross - validation), η εσωτερική (internal cross - validation) και η μικτή.

Η εξωτερική εξακρίβωσης εγκυρότητας συνίσταται στην εφαρμογή της εξίσωσης πρόβλεψης σε μια ομάδα πειραματικών σημείων ανεξάρτητων απ' αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της. Εννοείται ότι τα πειραματικά σημεία αυτής της ομάδας έχουν ληφθεί με τις ίδιες πειραματικές μεθόδους και με τα ίδια όργανα μέτρησης με τα οποία ελήφθησαν τα πειραματικά σημεία από τα οποία κατασκευάστηκε η υπό εξέταση εξίσωση.

Η εσωτερική εξακρίβωσης εγκυρότητας συνίσταται στην εφαρμογή της εξίσωσης πρόβλεψης σε μια ομάδα πειραματικών σημείων από αυτά από τα οποία κατασκευάστηκε η εξίσωση, τα οποία επιλέγονται με τυχαίο τρόπο. Μια παραλλαγή της τεχνικής αυτής είναι να δημιουργηθούν δύο ισοπληθή ομάδες πειραματικών σημείων με τυχαία επιλογή και να κατασκευαστούν με ανάλυση οπισθοδρόμησης δύο εξισώσεις, μία για κάθε ομάδα πειραματικών σημείων. Στη συνέχεια κάθε εξίσωση εφαρμόζεται στην άλλη ομάδα πειραματικών σημείων, προκειμένου να ελεγχθεί η εγκυρότητά της. Στην περίπτωση που οι δύο εξισώσεις είναι παρόμοιες και προκύπτει καλή ακρίβεια πρόβλεψης, τότε κατασκευάζεται μια εξίσωση από το σύνολο των πειραματικών σημείων. Η τεχνική αυτή ονομάζεται **εξακρίβωση εγκυρότητας διπλής κατεύθυνσης (double cross - validation)**. Μερικές φορές αυτό το οποίο κάνουν ορισμένοι ερευνητές είναι να μοιράζουν με τυχαίο τρόπο τα πειραματικά σημεία σε μια ομάδα που περιέχει τα $2/3$ αυτών και μια ομάδα που περιέχει το $1/3$. Χρησιμοποιώντας την ομάδα των $2/3$ των πειραματικών σημείων κατασκευάζουν την εξίσωση και με την ομάδα του $1/3$ ελέγχουν την εγκυρότητά της.

Εναλλακτικά υπάρχουν άλλες δύο μέθοδοι για εξακρίβωση της εγκυρότητας. Η μια είναι η **τεχνική του σουγιά (jackknife technique)**, σύμφωνα με την οποία τα πειραματικά σημεία μοιράζονται με τυχαίο τρόπο σε ισοπληθείς ομάδες μετρήσεων. Εξαιρώντας μια ομάδα κάθε φορά, η εξίσωση κατασκευάζεται από τα πειραματικά σημεία όλων των υπολοίπων ομάδων μαζί. Στη συνέχεια, για τα πειραματικά σημεία της ομάδας που εξαιρέθηκε, υπολογίζονται τα αθροίσματα των τετράγωνων των διαφορών μεταξύ της εξίσωσης πρόβλεψης και των πειραματικών σημείων. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για όλες τις ομάδες μετρήσεων και η εγκυρότητα της εξίσωσης υπολογίζεται από το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών των πειραματικών σημείων κάθε ομάδας από την εκάστοτε εξίσωση πρόβλεψης.

Η άλλη τεχνική είναι η **τεχνική της πρόβλεψης του αθροίσματος των τετραγώνων (prediction of sum of squares (PRESS))**, γνωστή και ως (bootstrap technique). Η τεχνική αυτή είναι παρόμοια με την προηγούμενη. Η διαφορά είναι ότι αντί να εξάγεται μια ομάδα πειραματικών σημείων κάθε φορά και να υπολογίζεται η εξίσωση από τα υπόλοιπα, στην τεχνική αυτή εξάγεται ένα πειραματικό σημείο κάθε φορά και η εξίσωση υπολογίζεται από τα υπόλοιπα. Στη συνέχεια υπολογίζεται το τετράγωνο της διαφοράς ανάμεσα στο πειραματικό αυτό σημείο και στην εξίσωση πρόβλεψης. Στη συνέχεια η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για όλα τα πειραματικά σημεία και υπολογίζεται το τετράγωνο της διαφοράς ανάμεσα στο πειραματικό σημείο που δε συμμετέχει στην κατασκευή της εξίσωσης και στην εκάστοτε εξίσωση πρόβλεψης. Η εξακρίβωση της εγκυρότητας υπολογίζεται από το άθροισμα των τετραγώνων αυτών των διαφορών για όλα τα πειραματικά σημεία.

Σε κάθε περίπτωση υπολογίζεται το **συνολικό σφάλμα (Total Error (TE)) της εξίσωσης**, το οποίο ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής των τετραγώνων των διαφορών ανάμεσα στην προβλεφθείσα τιμή του μεγέθους από την εξίσωση πρόβλεψης και στη μέτρηση. Το συνολικό σφάλμα της εξίσωσης παριστάνει το μέσο όρο των αποκλίσεων των μετρήσεων γύρω από τη **γραμμή ταύτισης (line of identity)**. Η γραμμή ταύτισης είναι μια ευθεία με κλίση $a = 1$ και τεταγμένη $b = 0$. Είναι δηλαδή η ευθεία $y = x$. Η γραμμή ταύτισης είναι η ευθεία που περιμένουμε να προκύψει από τις τιμές που προβλέπει η εξίσωση πρόβλεψης και από τις μετρήσεις του μεγέθους, τις τιμές του οποίου προσπαθεί να προβλέψει η εξίσωση πρόβλεψης. Αν δηλαδή ο άξονας x παριστάνει τις προβλέψεις της εξίσωσης και ο άξονας y τις τιμές που μετρήθηκαν, τότε για μια καλή εξίσωση πρόβλεψης, οι δύο αυτές τιμές θα πρέπει να σχεδόν να συμπίπτουν. Κατά συνέπεια θα πρέπει να πέφτουν πολύ κοντά στην ευθεία $y = x$, που δεν είναι καμιά άλλη από τη γραμμή ταύτισης.

Κεφάλαιο 3

Επιστημονικές γκάφες από εσφαλμένη χρήση της θεωρίας σφαλμάτων

> A few observation and much reasoning lead to error; many observations and a little reasoning to truth.
> Alexis Carrel (1873-1944)

Η εσφαλμένη χρήση της θεωρίας σφαλμάτων και κατ' επέκταση της στατιστικής, μπορεί να οδηγήσει σε τεράστιες επιστημονικές γκάφες, που κάθε σοβαρός επιστήμονας θα ήθελε να αποφύγει. Τρεις χαρακτηριστικές τέτοιες περιπτώσεις [1] μπορεί κανείς να βρει στις σημειώσεις του καθηγητή D. M. Harrison του πανεπιστημίου του Τορόντο του Καναδά, πάνω στη θεωρία σφαλμάτων. Τις σημειώσεις αυτές μπορείτε να βρείτε στην ιστοσελίδα http://www.upscale.utoronto.ca/PVB/Harrison/ErrorAnalysis/All.pdf, από την οποία τις αλίευσα και τις παρουσιάζω εδώ. Είναι επίσης καλό να δείτε το άρθρο του καθηγητή του πανεπιστημίου Ιωαννίνων, Γίαννη Ιωαννίδη με τίτλο "Γιατί τα ευρήματα των δημοσιευμένων ερευνών είναι λάθος"[2], όπως επίσης και το άρθρο του εκδότη στο ίδιο περιοδικό [3]

3.1 Γκάφα Νο 1: Ψυχρή πυρηνική σύντηξη

Το 1989, οι ερευνητές Stanley Pons και Martin Fleischmann, ανακοίνωσαν ότι κατάφεραν να προκαλέσουν πυρηνική σύντηξη στο εργαστήριό τους χρησιμοποιώντας μια συσκευή που είχε ράβδους παλλαδίου εμβυθισμένους μέσα

---

[1] υπάρχουν πολλές περισσότερες

[2] John P. A. Ioannidis, PLoS Medicine **2, e124 (2005)**

[3] The PLoS Medicine Editors, PLoS Medicine **2, e272 (2005)**

σε ένα λουτρό από δευτέριο [4] ή βαρύ νερό [5]. Όπως είπαν, η συσκευή αυτή εξέπεμπε νετρόνια και ακτίνες γ, που είναι χαρακτηριστικά για την ύπαρξη πυρηνικών αντιδράσεων.

Όπως ήταν αναμενόμενο, αυτή η ανακοίνωση προκάλεσε μια τεράστια αναστάτωση στο ευρύ κοινό και οι εφημερίδες άρχισαν να γράφουν για την αρχή μιας νέας εποχής με απεριόριστη τσάμπα ενέργεια. Ωστόσο η ανακάλυψη των δύο επιστημόνων δεν ήταν τίποτα άλλο παρά μια επιστημονική γκάφα. Ψυχρή σύντηξη, κατά την έννοια που το εννοούσαν δεν μπορεί να υπάρξει. Μεταξύ άλλων λαθών που έκαναν, παρέλειψαν να κάνουν μια απλή εφαρμογή της θεωρίας σφαλμάτων στα αποτελέσματά τους, η οποία αμέσως θα τους είχε δείξει ότι δεν είχαν επιτύχει την ψυχρή σύντηξη που φανταζόταν, στο εργαστήριό τους.

3.2 Γκάφα Νο 2: Φυτικές ίνες ενάντια στον καρκίνο

Στις αρχές της δεκαετίας του 1970 υπήρξαν αναφορές ερευνητών [6], σύμφωνα με τις οποίες τροφές πλούσιες σε φυτικές ίνες περιορίζουν την πιθανότητα εμφάνισης πολύποδων του παχέος εντέρου, που αποτελούν προπομπό καρκίνου. Ως αποτέλεσμα αυτών των ερευνών, πολλοί άνθρωποι στράφηκαν στην κατανάλωση φυτικών τροφών. Ωστόσο τον Ιανουάριο του 1999 μια μαζική έρευνα, που δημοσιεύτηκε στο επιστημονικό περιοδικό New England Journal of Medicine,[7] έδειξε ότι η κατανάλωση τροφών πλούσιων σε φυτικές ίνες δεν επηρεάζει την εμφάνιση αυτών των πολύποδων. Ποιά από τις δύο επιστημονικές εκδοχές είναι η σωστή;

Στις αρχικές μελέτες της δεκαετίας του 1970 το δείγμα ανθρώπων πάνω στο οποίο έγιναν οι μελέτες αυτές, ήταν περιορισμένο. Αναμενόμενο ήταν λοιπόν, με ένα τέτοιο μικρό στατιστικό δείγμα, τα αποτελέσματα να έχουν μεγάλο στατιστικό λάθος. Το λάθος αυτό ήταν τόσο μεγάλο ώστε περιελάμβανε μέσα στο εύρος του τα αποτελέσματα και των δύο ερευνών, τα οποία βεβαίως ήταν διαφορετικά. Αυτό ωστόσο δεν τον έλαβαν υπ' όψη τους (ή δεν το αντιλήφθηκαν) οι πρώτοι ερευνητές, με αποτέλεσμα να παρουσιάσουν ένα λάθος συμπέρασμα.

Έχει επομένως μεγάλη σημασία, τα αποτελέσματα που παίρνουμε από μια στατιστική έρευνα, να είμαστε σε θέση να τα ερμηνεύσουμε σωστά, προσδιορίζοντας το αντίστοιχο στατιστικό σφάλμα. Διαφορετικά μπορούμε πολύ εύκολα να καταλήξουμε σε λάθος συμπεράσματα.

Παρ' όλα αυτά οι επιστημονικές απόψεις σχετικά με το κατά πόσο οι τροφές, που είναι πλούσιες σε φυτικές ίνες, επιδρούν ή όχι στην εμφάνιση καρκίνου ακόμα διίστανται.

[4] υδρογόνο με δύο νετρόνια

[5] το βαρύ νερό είναι νερό αποτελούμενο από δευτέριο αντί για υδρογόνο

[6] Bourkit, Lancet **ii**, 1229 (1969)

[7] C. S. Fuchs et al., New Eng. J. Med **340**, 169 (1999)

3.3 Γκάφα Νο 3: Μια βλακώδης προσαρμογή καμπύλης σε πειραματικά δεδομένα

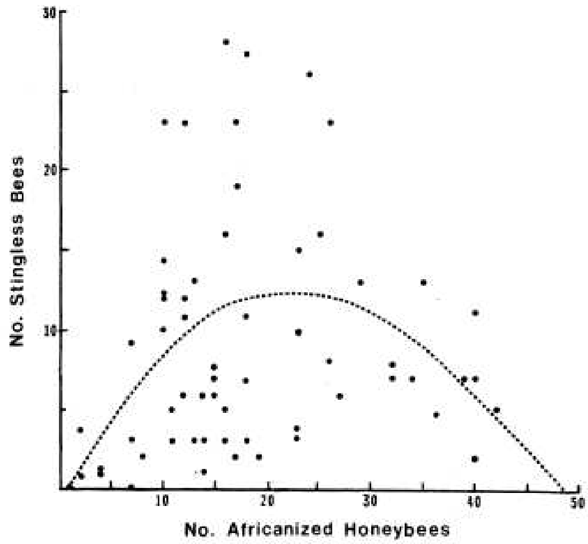
Έχοντας μια σειρά από πειραματικά δεδομένα μπορούμε ΠΑΝΤΑ να βρούμε μια καμπύλη με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, η οποία να προσαρμόζεται στα πειραματικά σημεία. Αυτό βεβαίως σε καμιά περίπτωση δε σημαίνει ότι τα πειραματικά σημεία προσαρμόζονται ΣΩΣΤΑ σ' αυτή την καμπύλη. Έχουμε ήδη αναφέρει ότι ένα μέτρο της "προσαρμοστικότητας" αυτής μας δίνει ο συντελεστής συσχέτισης, όμως, όπως φαίνεται, υπάρχουν σοβαροί ερευνητές, που δεν τα λαμβάνουν πολύ σοβαρά υπόψη τους όλα αυτά. Βεβαίως αυτό έχει ως αποτέλεσμα να σχολιάζουμε σήμερα τη δουλειά τους όχι με τα καλύτερα σχόλια.

Τα επιστημονικά περιοδικά Nature και Science είναι δύο από τα εγκυρότερα επιστημονικά περιοδικά παγκοσμίως. Δείτε ωστόσο στην εικόνα 3.1 μια γραφική παράσταση με την υποσημείωσή της, που δημοσιεύθηκε στο περιοδικό Science από τον David W. Roubik [8]. Η γραφική παράσταση αυτή αναφέρεται στον πληθυσμό δύο τύπων μελισσών. Σύμφωνα με την υποσημείωση της γραφικής παράστασης, η διακεκομμένη γραμμή είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού (παραβολή), το οποίο προσαρμόζεται με τον καλύτερο τρόπο στα πειραματικά σημεία. Φαίνεται ωστόσο καθαρά από τις θέσεις των σημείων της γραφικής παράστασης, ότι δεν υπάρχει καμιά σχέση (συσχέτιση) ανάμεσα στις δύο τύπους μελισσών και κατά συνέπεια η καλύτερη δυνατή προσαρμογή για την οποία μιλάει ο κ. Roubik δεν έχει καμιά σχέση με τα πειραματικά δεδομένα που παρουσιάζει. Όπως παρατηρεί ο καθηγητής Harrison στις σημειώσεις του, τα πειραματικά σημεία δίνουν περισσότερο την εικόνα μιας πάπιας, παρά μιας παραβολής [9].

[8] David W. Roubik, Science **201**, 1030 (1978)

[9] δείτε το σχετικό annimation σε Flash στην ιστοσελίδα http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/MSW2004/BeesDuck.html

Fig. 1. The relations of Africanized and stingless (meliponine) bee abundances on flowering *Melochia villosa*. The dashed line is a quadratic polynomial (given by $y = -0.516 + 1.08x - 0.023x^2$) which gave the best fit to the points (*7*).



Σχήμα 3.1: Μια βλακώδης προσαρμογή καμπύλης.

Παράρτημα Α΄

Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων ενός υπολογισμού

> In all science, error precedes the truth, and it is better it should go first than last.
> Hugh Walpole (1884 - 1941)

Α΄.1 Γιατί να αξιολογούμε τα αποτελέσματα

Προκειμένου να καταλήξουμε σε ένα αποτέλεσμα, συνήθως είναι απαραίτητο να κάνουμε μια σειρά από μαθηματικούς υπολογισμούς. Σε αρκετές περιπτώσεις οι υπολογισμοί αυτοί έχουν αρκετή δουλειά και όσο περισσότερη είναι αυτή η δουλειά, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να γίνουν αριθμητικά λάθη. Εκτός από την πιθανότητα αυτή, υπάρχει και η πιθανότητα να έχουμε κάνει κάποιο λάθος στις μαθηματικές σχέσεις που χρησιμοποιούμε για να λύσουμε το πρόβλημα.

Προκειμένου να ανακαλύψουμε, αν πράγματι έχουμε κάνει κάποιο λάθος, είναι χρήσιμο να επινοούμε διάφορα τεστ για να αξιολογούμε την ορθότητα των αποτελεσμάτων μας. Αυτά τα τεστ συνήθως δεν μπορούν να μας πουν, αν το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι το σωστό, μπορούν όμως να μας πουν αν το αποτέλεσμα που παίρνουμε είναι λάθος. Αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό, μιας και η πείρα έχει δείξει, ότι το μεγαλύτερο μέρος των λαθών που κάνουμε μπορούμε να το εντοπίσουμε με αυτά τα τεστ. Με τα τεστ αυτά συνήθως είτε κάνουμε κάποιες χονδροειδείς προβλέψεις για το αποτέλεσμα των υπολογισμών και στη συνέχεια προσπαθούμε να δούμε αν το αποτέλεσμα που βρήκαμε είναι συμβατό με αυτές, (π.χ. αν κάνουμε ένα υπολογισμό και βρούμε ότι η ημερήσια δόση ενέργειας που πρέπει να παίρνει ένας άνθρωπος σε ημερήσια βάση είναι 0.00015 θερμίδες, τότε θα πρέπει απ΄ ευθείας να καταλάβουμε ότι έχουμε κάνει κάποιο λάθος στους υπολογισμούς μας, μιας και η ποσότητα αυτή ενέργειας είναι πρακτικά ίση με μηδέν), είτε προσπαθούμε να δούμε τις συνέπειες που έχει το αποτέλεσμα που βρήκαμε (π.χ. αν καταλήξουμε σε ένα συμπέρασμα ότι το βάρος ενός ανθρώπου είναι αντιστρόφως ανάλογο του ύψους του, τότε οι ψηλότεροι θα έπρεπε να είναι ελαφρύτεροι από τους κοντότερους, πράγμα που μας οδηγεί να καταλάβουμε ότι κάπου έχουμε κάνει λάθος).

Αντιλαμβάνεται κανείς ότι για να μπορέσει να θέσει τα ερωτήματα που τίθενται μέσω αυτών των τεστ, απαιτείται πολύ καλή γνώση του θεωρητικού υποβάθρου που βρίσκεται πίσω από τους μαθηματικούς τύπους και τους αριθμούς. Συγκεκριμένα τεστ που να καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις δεν υπάρχουν. Τα τεστ αυτά πρέπει κανείς να τα επινοεί για κάθε διαφορετική περίπτωση. Υπάρχουν ωστόσο ορισμένα βασικά τεστ που μπορεί κανείς πάντα να τα ελέγχει πριν δεχθεί την ορθότητα του αποτελέσματος που έχει πάρει.

Α΄.2 Βασικά τεστ

Έλεγχος με διαστατική ανάλυση

Ένα τέτοιο τεστ μας προσφέρει η διαστατική ανάλυση. Κάνοντας ανάλυση των διαστάσεων του υπό εξέταση μεγέθους, μπορούμε να διαπιστώσουμε αν η μαθηματική σχέση, που υποτίθεται ότι εκφράζει το υπό εξέταση μέγεθος είναι σωστή διαστατικά ή όχι.

Έλεγχος μέσω των μονάδων μέτρησης

Όμοιο με αυτό το τεστ είναι και το τεστ που μπορεί να κάνει κανείς με τις μονάδες του μεγέθους. Αν η τιμή ενός μεγέθους εκφράζεται σε διαφορετικές μονάδες απ΄ αυτές που αντιστοιχούν σ΄ αυτό το μέγεθος, τότε σίγουρα έχουμε κάνει κάπου λάθος.

Έλεγχος μέσω χονδροειδών υπολογισμών τάξεως μεγέθους

Για την εκτίμηση της τιμής ενός μεγέθους είναι καλό να κάνουμε χονδροειδείς υπολογισμούς, κρατώντας μόνο τα πιο σημαντικά ψηφία των αριθμών. Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε ακόμα και να στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς κατά το δοκούν, εφ΄ όσον αυτό μας βολεύει στην απλοποίηση των υπολογισμών. Αν π.χ. έχουμε να κάνουμε τον υπολογισμό $512.3 \times 3.14 \times 8 \times 10^5 / 7.7 \times 10^-2$ τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το 7.7 του παρανομαστή είναι περίπου 8, οπότε απαλείφεται με το 8 του αριθμητή και $512.3 \times 3.14 \approx 500 \times 3 = 1500$. Οπότε το αποτέλεσμα περίπου είναι ίσο με $1500 \times 10^{5+2} = 1500 \times 10^7$. Αν κάνουμε τις ακριβείς πράξεις βρίσκουμε 1671.29×10^7. Όπως βλέπετε δεν πέσαμε και πολύ έξω. Αν όμως βρίσκαμε 3124.4×10^7, τότε θα έπρεπε να υποψιαστούμε ότι κάτι δεν πάει καλά. Σ΄ αυτή την περίπτωση θα έπρεπε να ξανακάνουμε τον υπολογισμό από την αρχή. Ας δούμε άλλο ένα παράδειγμα, π.χ. τον υπολογισμό $3.14 \times 8.01/51.3$. Εδώ ο αριθμητής είναι ίσος με περίπου $3 \times 8 = 24 \approx 25$ και ο παρανομαστής είναι περίπου ίσος με 50. Οπότε το αποτέλεσμα είναι περίπου ίσο με 0.5. Η πραγματική τιμή, που προκύπτει από τους ακριβείς υπολογισμούς είναι 0.49028. Αν επομένως βρίσκαμε κάτι σαν 13.28 θα έπρεπε να καταλάβουμε ότι έχουμε κάνει λάθος. Σε τέτοιους χονδροειδείς υπολογισμούς πρέπει να δοθεί μεγάλη προσοχή στις δυνάμεις. Η πραγματική αξία του αριθμού βρίσκεται σ΄ αυτές και κατά συνέπεια προσεγγίσεις τέτοιου τύπου με τις δυνάμεις δεν κάνουμε. Κατά συνέπεια τις πράξεις στις δυνάμεις πρέπει να τις κάνουμε ακριβώς.

Έλεγχος προβλέψεων της μαθηματικής σχέσης

Αν κάνουμε μαθηματικές πράξεις προκειμένου να καταλήξουμε σε μια μαθηματική σχέση, θα πρέπει να δούμε τι προβλέπει αυτή η μαθηματική σχέση για τις διάφορες περιπτώσεις. Αν οι προβλέψεις της είναι εσφαλμένες, τότε σίγουρα κάπου έχουμε κάνει λάθος. Π.χ. ας υποθέσουμε ότι σύμφωνα με μια μαθηματική σχέση, που προβλέπει το βάρος ενός ανθρώπου από τα σωματομετρικά χαρακτηριστικά του, το βάρος του ανθρώπου είναι αντιστρόφως ανάλογο με το ύψος του. Είναι προφανές ότι η σχέση αυτή είναι λάθος, ή στην καλύτερη περίπτωση θα πρέπει να τη δούμε με σκεπτικισμό. Αν το βάρος του ανθρώπου ήταν αντιστρόφως ανάλογο του ύψους του, τότε όσο ψηλότερος ήταν κάποιος, τόσο μικρότερο θα ήταν το βάρος του. Η κοινή εμπειρία όμως άλλα λέει.

Σε πολλές περιπτώσεις, ο έλεγχος των προβλέψεων μιας μαθηματικής σχέσης είναι καλό να γίνεται, σε ακραίες περιπτώσεις, για τις οποίες συνήθως μπορεί να εξαχθεί ένα χαρακτηριστικό αποτέλεσμα, που θα μας επιτρέψει να καταλάβουμε, αν η σχέση που βγάλαμε είναι σωστή ή λάθος. Π.χ. όπως ίσως θα έχετε δει (ή θα δείτε) υπάρχει ένας τύπος, ο λεγόμενος τύπος του Siri, σύμφωνα με τον οποίο το επί τοις εκατό ποσοστό λίπους σε ένα άνθρωπο ($\%BF$) δίνεται από τη σχέση $\%BF = 495/d_B - 450$, όπου d_B είναι η πυκνότητα του ανθρωπίνου σώματος σε gr/cm^3. Ο τύπος αυτός υποθέτει ότι το σώμα αποτελείται από λίπος (BF)και άλιπη μάζα (FFM), η πυκνότητα των οποίων είναι $d_{BF} = 0.900gr/cm^3$ και $d_{FFM} = 1.100gr/cm^3$ αντίστοιχα. Στην ακραία υποθετική περίπτωση , που ο άνθρωπος αποτελείται από 100% λίπος [1], τότε θα έπρεπε η πυκνότητά του να είναι ίση με την πυκνότητα του λίπους, δηλ. $0.900gr/cm^3$. Αν λοιπόν $d_B = d_{BF} = 0.900gr/cm^3$, τότε από τον τύπο του Siri παίρνουμε $\%BF = 495/0.900 - 450 = 550 - 450 = 100$. Άρα η πρόβλεψη είναι αναμενόμενη. Αντίστοιχα, στο άλλο άκρο, αν ο άνθρωπος δεν είχε καθόλου λίπος, τότε η πυκνότητά του θα έπρεπε να είναι ίση με αυτή της άλιπης μάζας, δηλ. $d_B = d_{FFM} = 1.100gr/cm^3$. Τότε ο τύπος του Siri γίνεται $\%BF = 495/1.100 - 450 = 450 - 450 = 0$. Αναμενόμενα λοιπόν και σ΄ αυτή την περίπτωση τα αποτελέσματα, άρα φαίνεται ότι η εξίσωση είναι μάλλον

[1] αυτή η περίπτωση δεν μπορεί να εμφανιστεί σε άνθρωπο, αλλά ο τύπος του Siri, ως μαθηματική οντότητα, δεν απαγορεύεται να πάρει τέτοιες τιμές

σωστή. Αν όμως σε κάποια από τις δύο ακραίες περιπτώσεις που είδαμε, δεν βρίσκαμε αυτά τα αναμενόμενα αποτελέσματα, τότε σίγουρα ο τύπος του Siri θα είχε κάπου λάθος.

Έχοντας ήδη κάνει αυτή την ανάλυση, μπορούμε να αντιληφθούμε ότι ακόμα κι αν δε θυμόμαστε αν ο τύπος του Siri γράφεται ως $\%BF = 495/d_B - 450$ ή ως $\%BF = 450/d_B - 495$ (αν δηλαδή δε θυμόμαστε "σε ποια θέση" βρίσκεται το 495 και το 450, εύκολα θα μπορούσαμε να το βρούμε κοιτάζοντας ποια από τις δύο σχέσεις ικανοποιεί τις ακραίες αυτές καταστάσεις. Όμως ακόμα κι αν δε θυμόμασταν καν τα νούμερα 495 και 450 και απλώς θυμόμασταν τη μορφή της εξίσωσης, ότι δηλαδή $\%BF = A/d_B - B$, τότε θα μπορούσαμε κάνοντας τις παραπάνω σκέψεις για τις δύο ακραίες καταστάσεις, να βρούμε τις τις τιμές των A και B από το σύστημα των εξισώσεων $100 = A/0.9 - B$ και $0 = A/1.1 - B$, η λύση του οποίου δίνει $A = 495$ και $B = 450$.

Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς πόσο πολλαπλά ωφελημένοι βγαίνουμε από μια τέτοια ανάλυση των προβλέψεων μιας εξίσωσης.

Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς πόσο χρήσιμο είναι να κάνει κανείς αυτούς τους ελέγχους στα αποτελέσματά του. Αν κανείς καταφέρει να εξαλείψει τα "χονδροειδή" λάθη, που μπορεί να τα εντοπίσει με αυτά τα τεστ, τότε η πιθανότητα να έχει κάνει κάποιο μικρότερο λάθος ελαχιστοποιείται.

Στη συνέχεια θα αναφέρουμε μερικές απλές παρατηρήσεις, που αφορούν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν τεστ για την ανίχνευση πιθανών λαθών. Οι μαθηματικές αποδείξεις, που παρουσιάζονται παρακάτω, δίνονται μόνο για πληρότητα του κειμένου και μπορούν να παραληφθούν σε πρώτη ανάγνωση.

Α΄.3 Τεστ για τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση

Α΄.3.1 Επίδραση αθροιστικού όρου στη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σειρά μετρήσεων $x_1, x_2, \ldots, x_N$, οι οποίες έχουν μέση τιμή $\langle x \rangle = 1/N \sum x_i$ και τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το μέγεθος που μας ενδιαφέρει προκύπτει απ' αυτές τις μετρήσεις, αν σ' αυτές προστεθεί ένας σταθερός όρος c. Κατά συνέπεια οι τιμές που θα έχουμε μετρήσει για το μέγεθος που μας ενδιαφέρει (με έμμεση μέτρηση αφού προσθέτουμε κάποιο σταθερό όρο) θα είναι: $x'_1, x'_2, \ldots x'_N$ όπου $x'_1 = x_1 + c$, $x'_2 = x_2 + c$, $\ldots$, $x'_N = x_N + c$. Ας συμβολίσουμε με $\langle x' \rangle$ τη μέση τιμή αυτών των μετρήσεων και με $\sigma' = \sqrt{\langle x'^2 \rangle - \langle x' \rangle^2}$ την τυπική τους απόκλιση.

Η μέση τιμή $\langle x' \rangle$ αυτών των μετρήσεων θα είναι:

$$\begin{aligned} \langle x' \rangle &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x'_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i + c) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c = \langle x \rangle + \frac{1}{N}Nc = \langle x \rangle + c \end{aligned}$$

Επομένως

$$\langle x' \rangle = \langle x \rangle + c \tag{Α΄.1}$$

που σημαίνει ότι **ο αθροιστικός όρος που αθροιζόταν στις μετρήσεις, απλώς μεταφέρεται αθροιζόμενος και στη μέση τιμή**.

Ας δούμε τώρα τι γίνεται με την τυπική απόκλιση σ'. Θα βρούμε πρώτα τι τιμή παίρνει η ποσότητα $\langle x'^2 \rangle$. Θα είναι:

$$\begin{aligned} \langle x'^2 \rangle &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i'^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i + c)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i^2 + 2x_i c + c^2) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 2x_i c + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c^2 = \langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle c + c^2. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\langle x'^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle c + c^2. \tag{Α΄.2}$$

Από την άλλη, η ποσότητα $\langle x' \rangle^2$ είναι ίση με:

$$\langle x' \rangle^2 = (\langle x \rangle + c)^2 = \langle x \rangle^2 + 2\langle x \rangle c + c^2.$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sqrt{\langle x'^2 \rangle - \langle x' \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle c + c^2 - \langle x \rangle^2 - 2\langle x \rangle c - c^2} \\ &= \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sigma \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια:

$$\sigma' = \sigma \tag{Α΄.3}$$

Επομένως **αν προστεθεί κάποιος σταθερός όρος στις μετρήσεις μας, η τυπική απόκλιση δεν αλλάζει.**

Α΄.3.2 Επίδραση πολλαπλασιαστικού παράγοντα στη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση

Όπως και πριν, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σειρά μετρήσεων $x_1, x_2, \ldots, x_N$, οι οποίες έχουν μέση τιμή $\langle x \rangle = 1/N \sum x_i$ και τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$

και ας υποθέσουμε επίσης ότι το μέγεθος που μας ενδιαφέρει, προκύπτει απ΄ αυτές τις μετρήσεις, αν αυτές πολλαπλασιαστούν με ένα σταθερό παράγοντα λ. Κατά συνέπεια οι τιμές που θα έχουμε μετρήσει για το μέγεθος που μας ενδιαφέρει (με έμμεση μέτρηση αφού πολλαπλασιάζουμε με κάποιο σταθερό παράγοντα) θα είναι: $x'_1, x'_2, \ldots x'_N$, όπου $x'_1 = \lambda x_1$, $x'_2 = \lambda x_2$, …, $x'_N = \lambda x_N$. Όπως και πριν, ας συμβολίσουμε με $\langle x' \rangle$ τη μέση τιμή αυτών των μετρήσεων και με $\sigma' = \sqrt{\langle x'^2 \rangle - \langle x' \rangle^2}$ την τυπική τους απόκλιση.(Προφανώς τα τονούμενα μεγέθη σ΄ αυτή την περίπτωση καμιά σχέση δεν έχουν με τα τονούμενα μεγέθη της προηγούμενης περίπτωσης, όπου αθροιζόταν στις μετρήσεις ένας σταθερός όρος. Χρησιμοποιούμε απλώς και εδώ τονούμενα μεγέθη χάριν ευκολίας.)

Για τη νέα μέση τιμή λοιπόν θα έχουμε:

$$\langle x' \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x'_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lambda x_i = \lambda \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \lambda \langle x \rangle$$

Επομένως

$$\langle x' \rangle = \lambda \langle x \rangle \tag{Α΄.4}$$

Αν λοιπόν οι μετρήσεις μας πολλαπλασιάζονται με ένα σταθερό παράγοντα, πολλαπλασιάζεται επίσης και η μέση τιμή.

Για τη νέα τυπική απόκλιση, $\sigma' = \sqrt{\langle x'^2 \rangle - \langle x' \rangle^2}$, θα πρέπει όπως και πριν να υπολογίσουμε τον όρο $\langle x'^2 \rangle$. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\langle x'^2 \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i'^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (\lambda x_i)^2 = \lambda^2 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \lambda^2 \langle x^2 \rangle$$

Κατά συνέπεια:

$$\sigma' = \sqrt{\langle x'^2 \rangle - \langle x' \rangle^2} = \sqrt{\lambda^2 \langle x^2 \rangle - \lambda^2 \langle x \rangle^2} = \lambda \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \lambda \sigma$$

Επομένως:

$$\sigma' = \lambda \sigma \tag{Α΄.5}$$

Επομένως **αν οι μετρήσεις μας πολλαπλασιάζονται με ένα σταθερό παράγοντα, τότε η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται με τον ίδιο σταθερό αυτό παράγοντα.**

Α΄.3.3 Εκτίμηση της μέσης τιμής

Είναι προφανές (ή τουλάχιστον θα έπρεπε να είναι προφανές) ότι η μέση τιμή μιας σειράς μετρήσεων βρίσκεται ανάμεσα στις μετρήσεις αυτές. Τι “μέση τιμή” θα ήταν άλλωστε, αν δεν βρισκόταν κάπου στο μέσο αυτών των τιμών; Επειδή όμως για κάποιους ίσως αυτό δεν είναι και τόσο προφανές, θα ο αποδείξουμε στις παρακάτω γραμμές.

Η μέση τιμή μιας σειράς μετρήσεων $x_1, x_2, \ldots, x_N$ βρίσκεται ανάμεσα στη μέγιστη και στην ελάχιστη τιμή τους.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι x_{min} είναι η ελάχιστη τιμή και x_{max} η μέγιστη τιμή μιας σειράς μετρήσεων $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Τότε για κάθε μιά από τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_N$ θα ισχύει:

$$\begin{array}{ccccc} x_{min} & \leq & x_1 & \leq & x_{max} \\ x_{min} & \leq & x_2 & \leq & x_{max} \\ & & \vdots & & \\ x_{min} & \leq & x_N & \leq & x_{max} \end{array}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε:

$$N x_{min} \leq x_1 + x_2 + \ldots + x_N \leq N x_{max}$$

και διαιρώντας με N :

$$x_{min} \leq \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N) \leq x_{max}.$$

Όμως $\langle x \rangle = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$ και επομένως:

$$x_{min} \leq \quad \langle x \rangle \quad \leq x_{max} \tag{Α΄.6}$$

Κατά συνέπεια αν βρείτε μια μέση τιμή που να μην είναι ανάμεσα στη μέγιστη και στην ελάχιστη τιμή των μετρήσεων, είναι απολύτως βέβαιο ότι έχετε κάνει λάθος στις πράξεις.

Α΄.3.4 Εκτίμηση της τυπικής απόκλισης

Έχουμε πει ότι η τυπική απόκλιση δίνει ένα μέτρο της διασποράς των μετρήσεων από τη μέση τιμή. Όσο πιο πολύ έχουν διασπαρθεί οι μετρήσεις γύρω από τη μέση τιμή, τόσο μεγαλύτερη είναι η τυπική απόκλιση. Είναι επομένως αναμενόμενο, η τυπική απόκλιση να σχετίζεται με το εύρος της διασποράς των μετρήσεων. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι:

Η τυπική απόκλιση είναι μικρότερη από τη διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των μετρήσεών μας. (Σε μια άλλη διατύπωση, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η τυπική απόκλιση είναι το πολύ ίση με τη διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη και στην ελάχιστη τιμή των μετρήσεων.)

Αν, κατά συνέπεια, βρείτε μια τιμή για την τυπική απόκλιση που είναι μεγαλύτερη από τη διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των μετρήσεων, έχετε μετά βεβαιότητας κάνει λάθος στις πράξεις σας και θα πρέπει να τις επαναλάβετε.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε, (όπως και πριν) ότι η μέγιστη τιμή των μετρήσεων μας είναι η x_{max} και η ελάχιστη η x_{min}. Επειδή η τυπική απόκλιση είναι: $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τις τιμές των $\langle x^2 \rangle$ και $\langle x \rangle^2$. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι οι μετρήσεις μας είναι θετικές ποσότητες [2].

Αποδείξαμε προηγουμένως ότι: $x_{min} \leq \quad < x > \quad \leq x_{max}$. Δεδομένου ότι όλες οι ποσότητες αυτής της σχέσης είναι θετικές, αν υψώσουμε στο τετράγωνο θα πάρουμε: $x_{min}^2 \leq \quad \langle x \rangle^2 \quad \leq x_{max}^2$. Πολλαπλασιάζοντας με -1 θα έχουμε:

$$-x_{max}^2 \leq \quad -\langle x \rangle^2 \quad \leq -x_{min}^2. \tag{Α'.7}$$

Ας δούμε τώρα τι γίνεται για την ποσότητα $\langle x^2 \rangle$. Είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη ότι για κάθε μέτρηση x_i είχαμε: $x_{min} \leq x_i \leq x_{max}$. Υψώνοντας στο τετράγωνο, (και δεδομένου ότι έχουμε υποθέσει ότι οι μετρήσεις μας είναι θετικές ποσότητας) θα έχουμε: $x_{min}^2 \leq x_i^2 \leq x_{max}^2$. Θα είναι δηλαδή:

$$\begin{array}{ccccc} x_{min}^2 & \leq & x_1^2 & \leq & x_{max}^2 \\ x_{min}^2 & \leq & x_2^2 & \leq & x_{max}^2 \\ & & \vdots & & \\ x_{min}^2 & \leq & x_N^2 & \leq & x_{max}^2 \end{array}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις θα έχουμε:

$$N x_{min}^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2 \leq N x_{max}^2$$

και διαιρώντας με N :

$$x_{min}^2 \leq \frac{1}{N}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2) \leq x_{max}^2.$$

Όμως $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{N}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2)$ και επομένως:

$$x_{min}^2 \leq \quad \langle x^2 \rangle \quad \leq x_{max}^2 \tag{Α'.8}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (7) και (8), έχουμε:

$$-(x_{max}^2 - x_{min}^2) \leq \quad \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad \leq x_{max}^2 - x_{min}^2$$

και επομένως:

$$\sigma \leq \sqrt{x_{max}^2 - x_{min}^2} = \sqrt{(x_{max} - x_{min})(x_{max} + x_{min})}$$

Είδαμε ήδη ότι αν προσθέσουμε κάποιο σταθερό όρο στις μετρήσεις μας, η τυπική απόκλιση δεν αλλάζει. Επομένως στην τελευταία σχέση τα x_{max} και

[2] Ακόμα κι αν δεν είναι θετικές ποσότητες, μπορούμε να προσθέσουμε σ' αυτές ένα σταθερό όρο, έτσι ώστε να γίνουν θετικές. Όπως είδαμε νωρίτερα, η πρόσθεση ενός σταθερού όρου στις μετρήσεις μας, δεν επηρεάζει την τυπική απόκλιση.

x_{min} μπορούν να μετατοπιστούν προς τα πάνω ή προς τα κάτω κατά ένα σταθερό όρο, χωρίς να αλλάξει η τυπική απόκλιση. Θα πρέπει ωστόσο να προσέξουμε η μετατόπιση αυτή να μη μετακινήσει τις μετρήσεις μας σε αρνητικές τιμές, γιατί τότε οι ανισότητες που γράψαμε παρά πάνω, όταν υψώσαμε στο τετράγωνο, μπορεί να μην ισχύουν. Θα πρέπει δηλαδή η ελάχιστη τιμή των μετρήσεων να είναι θετική ή μηδέν ($x_{min} \geq 0$). Εκείνο όμως που μένει αμετάβλητο, ανεξάρτητα από την προς τα πάνω ή προς τα κάτω μετατόπιση των μετρήσεών μας, είναι η διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή τους. Ας ονομάσουμε αυτή τη διαφορά $\Delta = x_{max} - x_{min}$. Μέσω αυτής της διαφοράς η τελευταία σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$\sigma \leq \sqrt{\Delta(x_{max} - x_{min} + 2x_{min})} = \sqrt{\Delta(\Delta + 2x_{min})}$$

Σ΄ αυτή την τελευταία σχέση το μόνο που μπορεί να μετατοπίζεται, χωρίς να αλλάζει η τυπική απόκλιση, είναι το x_{min}, το οποίο όπως είπαμε, έχουμε θεωρήσει ότι είναι θετικό ή μηδέν. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, για οποιαδήποτε θετική τιμή του x_{min}, η ποσότητα $\Delta(\Delta + 2x_{min})$ είναι μεγαλύτερη από την τιμή που παίρνει η ίδια ποσότητα για $x_{min} = 0$. Κατά συνέπεια ένα πάνω όριο για την τυπική απόκλιση μπορούμε να πάρουμε, αν θέσουμε $x_{min} = 0$. [3] Τότε έχουμε:

$$\sigma \leq \sqrt{\Delta^2} = \Delta. \tag{Α΄.9}$$

Επισημαίνουμε λοιπόν ξανά ότι αν βρεθεί τυπική απόκλιση μεγαλύτερη από το εύρος των μετρήσεών μας (δηλαδή από τη διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη και στην ελάχιστη τιμή), τότε μετά βεβαιότητας υπάρχει λάθος στον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης.

Α΄.3.5 Μετατόπιση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης μετά από απόρριψη ακραίων μετρήσεων

Ας υποθέσουμε ότι η μικρότερη (μεγαλύτερη) τιμή μιας σειράς μετρήσεων απορρίπτεται. Τότε η νέα μέση τιμή των μετρήσεων μεγαλώνει (μικραίνει).

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σειρά μετρήσεων $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N$ τις οποίες τις έχουμε διατάξει κατ΄ αύξουσα σειρά. Η μέση τους τιμή είναι $\langle x \rangle = 1/N(x_1 + x_2 + \ldots + x_N)$. Αν απ΄ αυτές τις μετρήσεις απορριφθεί η

[3] Όλη αυτή τη συζήτηση θα μπορούσαμε να την κάνουμε θεωρώντας από την αρχή ότι μετατοπίζουμε τις μετρήσεις μας κατά ένα σταθερό προσθετικό όρο, έτσι ώστε $x_{min} = 0$. Τότε θα είχαμε: $\langle x^2 \rangle \leq x_{max}^2$ και $-\langle x \rangle^2 \leq 0$, οπότε: $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \leq \sqrt{x_{max}^2 - 0} = x_{max}$. Επειδή όμως $x_{min} = 0$, το x_{max} είναι ίσο με το εύρος Δ των μετρήσεων (ή με τη διαφορά ανάμεσα στη μέγιστη x_{max} και την ελάχιστη τιμή x_{min} των μετρήσεων) και κατά συνέπεια $\sigma \leq \Delta$.

μικρότερη μέτρηση, τότε η νέα μέση τιμη $\langle x' \rangle$ θα είναι:

$$\begin{aligned} \langle x' \rangle &= \frac{1}{N-1}(x_2 + x_3 + \ldots + x_N) = \frac{N}{N-1} \cdot \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N - x_1) \\ &= \frac{N}{N-1}\langle x \rangle - \frac{x_1}{N-1} = \frac{N-1+1}{N-1}\langle x \rangle - \frac{x_1}{N-1} = \langle x \rangle + \frac{\langle x \rangle - x_1}{N-1} \end{aligned}$$

Επειδή η μέτρηση x_1 είναι η μικρότερη μέτρηση, η διαφορά $\langle x \rangle - x_1$ θα είναι θετική ή στην ακραία περίπτωση, θα είναι μηδέν ($\langle x \rangle - x_1 \geq 0$). Επομένως: $\langle x' \rangle \geq \langle x \rangle$

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι αν απορρίπτεται και η αμέσως επόμενη μέτρηση x_2, τότε η νέα μέση τιμή θα είναι ακόμα μεγαλύτερη. Επίσης με όμοιο τρόπο μπορεί να δείξει κανείς ότι αν απορρίπτεται η μεγαλύτερη μέτρηση (x_N), τότε η νέα μέση τιμή μικραίνει. Δεν μπορούμε να βγάλουμε άμεσα συμπέρασμα αν μικραίνει ή μεγαλώνει η μέση τιμή, στην περίπτωση που απορρίπτεται και η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των μετρήσεων.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει με την τυπική απόκλιση στην περίπτωση που απορρίπτεται κάποια ακραία μέτρηση. Ας χρησιμοποιήσουμε τονούμενα σύμβολα, για να συμβολίσουμε τις νέες τιμές τυπικής απόκλισης και μέσης τιμής. Είδαμε προηγουμένως ότι: $\langle x' \rangle = \langle x \rangle + (\langle x \rangle - x_1)/(N-1)$. Στη σχέση αυτή είχαμε θεωρήσει ότι το x_1 είναι η μικρότερη ακραία τιμή που απορρίπτεται. Η σχέση όμως θα ήταν ίδια και αν το x_1 ήταν η μεγαλύτερη ακραία τιμή που θα έπρεπε να απορριφθεί. Κατά συνέπεια για τις νέες μέσες τιμές που προκύπτουν μετά την απόρριψη της ακραίας τιμής x_1 (ανεξάρτητα αν αυτή είναι η ελάχιστη ή η μέγιστη τιμή που απορρίπτεται), θα έχουμε:

$$\langle x' \rangle^2 = \left(\langle x \rangle + \frac{\langle x \rangle - x_1}{N-1} \right)^2 = \langle x \rangle^2 + 2\langle x \rangle \frac{\langle x \rangle - x_1}{N-1} + \left(\frac{\langle x \rangle - x_1}{N-1} \right)^2$$

Από την άλλη:

$$\begin{aligned} \langle x'^2 \rangle &= \frac{1}{N-1}(x_2^2 + x_3^2 + \ldots x_N^2) = \frac{N}{N-1} \cdot \frac{1}{N}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_N^2 - x_1^2) \\ &= \frac{N}{N-1}\langle x^2 \rangle - \frac{x_1^2}{N-1} = \frac{N-1+1}{N-1}\langle x^2 \rangle - \frac{x_1^2}{N-1} = \langle x^2 \rangle + \frac{\langle x^2 \rangle - x_1^2}{N-1} \end{aligned}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} \sigma'^2 &= \langle x'^2 \rangle - \langle x' \rangle^2 \\ &= \langle x^2 \rangle + \frac{\langle x^2 \rangle - x_1^2}{N-1} - \langle x \rangle^2 - 2\langle x \rangle \frac{\langle x \rangle - x_1}{N-1} - \left(\frac{\langle x \rangle - x_1}{N-1} \right)^2 \\ &= \sigma^2 + \frac{1}{N-1}(\langle x^2 \rangle - x_1^2 - 2\langle x \rangle^2 + 2\langle x \rangle x_1) - \left(\frac{\langle x \rangle - x_1}{N-1} \right)^2 \\ &= \sigma^2 + \frac{1}{N-1}(\sigma^2 - (\langle x \rangle - x_1)^2) - \left(\frac{\langle x \rangle - x_1}{N-1} \right)^2 \end{aligned}$$

Όπως είπαμε προηγουμένως, μια ακραία μέτρηση x_i απορρίπτεται, αν βρίσκεται έξω από το διάστημα $[\langle x\rangle - \beta\sigma, \langle x\rangle + \beta\sigma]$. Επομένως γι αυτές τις ακραίες μετρήσεις θα ισχύει: $|x_i - \langle x\rangle| > \beta\sigma \Longrightarrow (x_i - \langle x\rangle)^2 > \beta^2\sigma^2 \Longrightarrow -(x_i - \langle x\rangle)^2 < -\beta^2\sigma^2$.

Κατά συνέπεια :

$$\begin{aligned}
\sigma'^2 &< \sigma^2 + \frac{1}{N-1}(\sigma^2 - \beta^2\sigma^2) - \Big(\frac{\beta^2\sigma^2}{N-1}\Big)^2 \\
&= \sigma^2 + \sigma^2\Big[\frac{1-\beta^2}{N-1} - \Big(\frac{\beta}{N-1}\Big)^2\Big] \\
&= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{(N-1)^2}((N-1)(1-\beta^2) - \beta^2) \\
&= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{(N-1)^2}(N - 1 - N\beta^2 + \beta^2 - \beta^2) \\
&= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{(N-1)^2}(N(\beta^2 - 1) + 1).
\end{aligned}$$

Επειδή η ποσότητα $N(\beta^2 - 1) + 1$ είναι πάντα θετική (δες τις τιμές που παίρνει το β στον πίνακα του βιβλίου), η ποσότητα $\frac{\sigma^2}{(N-1)^2}(N(\beta^2-1)+1)$ θα είναι επίσης θετική και κατά συνέπεια

$$\sigma' < \sigma. \tag{Α΄.10}$$

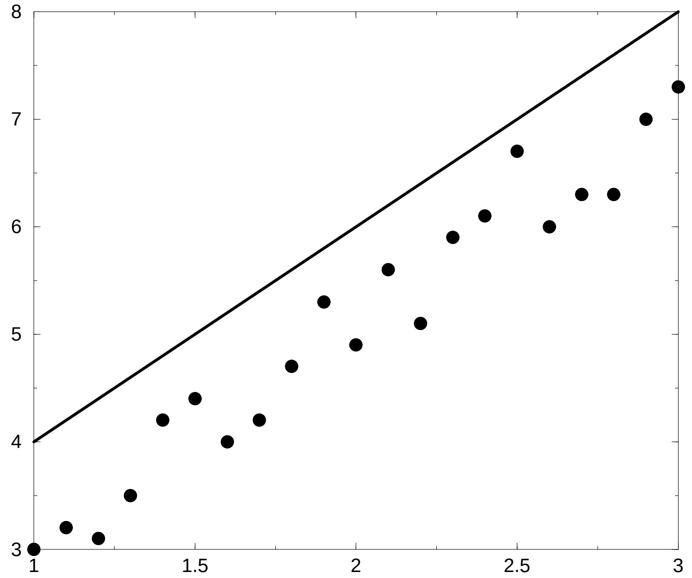
Άρα όταν απορρίπτονται ακραίες μετρήσεις, η τυπική απόκλιση μειώνεται. Αν κατά συνέπεια απορρίψετε κάποιες τιμές με το κριτήριο Chauvenet και η νέα τυπική απόκλιση σάς βγει μεγαλύτερη από την αρχική, τότε μετά βεβαιότητας έχετε κάνει κάπου λάθος στις πράξεις και θα πρέπει να τις επαναλάβετε.

Α΄.4 Ευθείες ελαχίστων τετραγώνων

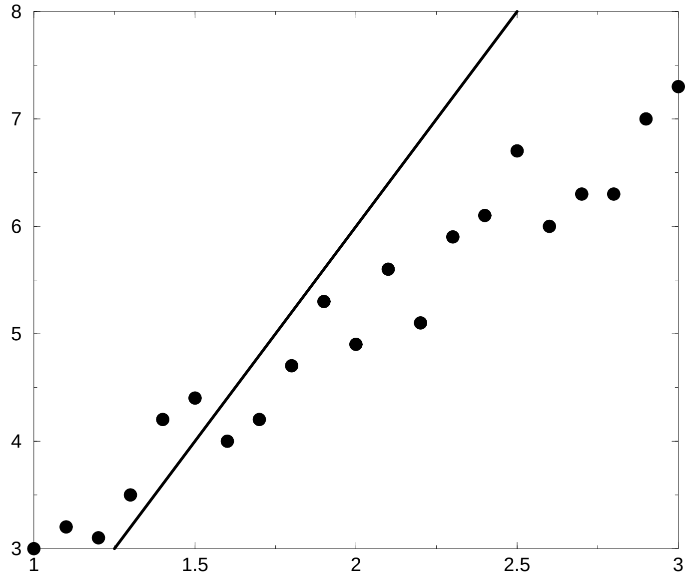
Εξ ορισμού η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων ελαχιστοποιεί τις αποστάσεις ανάμεσα στις τιμές y_i των πειραματικών σημείων (x_i, y_i) και τα αντίστοιχα y της ευθείας για το ίδιο x_i. Είναι λοιπόν προφανές ότι η ευθεία αυτή πρέπει να περνάει ανάμεσα στα πειραματικά σημεία. Θα ήταν λάθος λοιπόν αν βρίσκαμε μια ευθεία:

♠ για την οποία τα πειραματικά σημεία βρίσκονται όλα από τη μια μεριά της, όπως στο σχήμα Α΄.1.

♠ η κατεύθυνση της οποίας διαφέρει από την κατεύθυνση της ευθείας που δείχνει η εικόνα των πειραματικών σημείων, όπως στο σχήμα Α΄.2.



Σχήμα Α΄.1: Η ευθεία αυτή δεν μπορεί να είναι η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων



Σχήμα Α΄.2: Η ευθεία αυτή δεν μπορεί να είναι η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων

Παράρτημα Β΄

Γραφικές παραστάσεις

Μια εικόνα, χίλιες λέξεις
Αγνώστου

Β΄.1 Γιατί χρησιμοποιούμε γραφικές παραστάσεις

Οι γραφικές παραστάσεις είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στη μελέτη και την ανάλυση ενός φαινομένου. Μας επιτρέπουν με μια σύντομη ματιά να αποκτήσουμε εποπτεία για το υπό εξέταση φαινόμενο. Μας επιτρέπουν να καταλάβουμε με μια ματιά αν το φαινόμενο που μελετούμε αυξάνεται ή μειώνεται, αν αυξάνεται απότομα ή ομαλά, πού εμφανίζει ελάχιστο και πού μέγιστο, πού μηδενίζεται, αν ταλαντώνεται καθώς και τόσες άλλες χρήσιμες πληροφορίες. Σε μια γραφική παράσταση μπορεί κανείς με μια ματιά να δει όλα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του υπό εξέταση φαινομένου, ενώ παράλληλα μπορεί να καταλάβει και τι τιμές περίπου παίρνει το μέγεθος που περιγράφει το φαινόμενο. Ο ρόλος λοιπόν των γραφικών παραστάσεων και η μεγάλη αξία που έχουν στην επιστήμη, είναι ότι μας επιτρέπουν με μια ματιά να καταλάβουμε πάρα πολλά πράγματα για το φαινόμενο που περιγράφουν.

Στον αντίποδα των γραφικών παραστάσεων βρίσκονται οι αριθμοί από τους οποίους αυτές δημιουργήθηκαν. Όσο πιο πολλοί είναι αυτοί οι αριθμοί, τόσο πιο δύσκολα μπορεί κανείς να τους χειριστεί για να βγάλει χρήσιμα συμπεράσματα. Όσο κι αν οι αριθμοί περιγράφουν με ακριβή τρόπο ένα φαινόμενο, δεν είναι ικανοί να συναγωνιστούν την εποπτεία επί του φαινομένου, που προσφέρει μια γραφική παράσταση. Αν πάλι μας ενδιαφέρει να βρούμε ποσοτικά χαρακτηριστικά του φαινομένου, αν μας ενδιαφέρει να βγάλουμε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα, τότε οι ‘άριθμοί” είναι συνήθως προτιμότεροι από τις γραφικές παραστάσεις. Σε κάθε περίπτωση όμως οι γραφικές παραστάσεις είναι αναντικατάστατες για γρήγορα και ασφαλή ποιοτικά συμπεράσματα και η χρησιμότητά τους αυτή τις καθιστά απολύτως απαραίτητες.

Β′.2 Κατασκευή γραφικών παραστάσεων

Σε μια γραφική παράσταση θέλουμε να έχουμε μια ξεκάθαρη και όσο το δυνατό λεπτομερέστερη εικόνα των δεδομένων (x, y) που παρουσιάζονται σ' αυτή. Κυρίως θα πρέπει να ξέρουμε τι θέλουμε να δείξουμε ώστε να φροντίσουμε να το κάνουμε εμφανές. Με γνώμονα αυτές τις απαιτήσεις θα δώσουμε μερικούς γενικούς κανόνες για την κατασκευή γραφικών παραστάσεων και θα επισημάνουμε ορισμένα λάθη που συνήθως γίνονται.

Περιοχή γραφικής παράστασης - Αρχή των αξόνων

Το πρώτο που πρέπει να κάνουμε, πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή της γραφικής παράστασης, είναι να δούμε την περιοχή μέσα στην οποία υπάρχουν τα δεδομένα που θέλουμε να παραστήσουμε. Υπάρχει η εσφαλμένη αντίληψη ότι οι άξονες x και y πρέπει να ξεκινάνε από το 0, (δηλαδή το σημείο τομής των αξόνων να είναι το σημείο $(0, 0)$). Αυτό βεβαίως καμιά βάση δεν έχει. Πώς θα γινόταν άλλωστε να παρασταθεί μια γραφική παράσταση που το x παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές; Όχι λοιπόν μόνο δεν είναι απαραίτητο κάτι τέτοιο, αλλά αντιθέτως υπάρχει το ενδεχόμενο να περιοριστεί η γραφική παράσταση σε μια πολύ μικρή περιοχή του γραφήματος, χωρίς έτσι να μπορούμε να δούμε λεπτομέρειες, αφήνοντας παράλληλα όλο τον σχεδόν το χώρο του γραφήματος κενό.

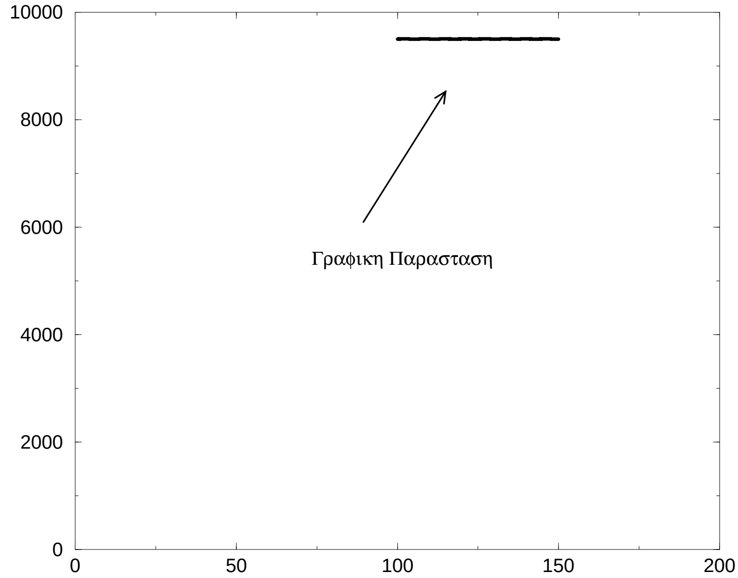
Δείτε για παράδειγμα τη γραφική παράσταση Β′.1 της συνάρτησης $f(x) = 9500 + \sin(x)e^{-0.1(x-100)}$, για x να παίρνει τιμές στο διάστημα $[100, 150]$.

Αντιθέτως αν η γραφική παράσταση κατασκευαστεί μέσα στην περιοχή όπου εμφανίζονται οι τιμές της, τότε πετυχαίνουμε να καλυφθεί όλος ο χώρος με αυτή και να δούμε πολλές περισσότερες λεπτομέρειες. Στην περίπτωσή μας η συνάρτηση, την οποία θέλουμε να παραστήσουμε γραφικά, παίρνει τιμές στο διάστημα $[9499, 9501]$, ενώ η μεταβλητή της x παίρνει τιμές στο διάστημα $[100, 150]$. Δείτε στην εικόνα Β′.2 πόσο καλύτερα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης μέσα σε αυτά τα όρια. Σ' αυτή την εικόνα η τομή των αξόνων δεν είναι το σημείο $(0, 0)$, αλλά το $(100, 9499)$ και δε μας νοιάζει καθόλου που συμβαίνει αυτό.

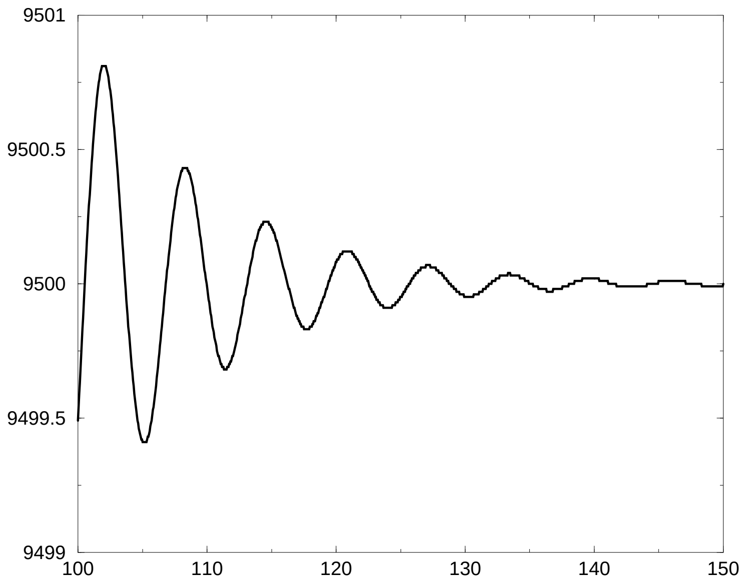
Επιλογή κλίμακας στους άξονες. Επιλογή αρχής και τέλους αξόνων.

Εφ' όσον η γραφική παράσταση γίνεται σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, η επιλογή της κλίμακας γίνεται ‘αυτόματα” [1], εκτός κι αν εμείς του δώσουμε εντολές να το κάνει διαφορετικά. Εφ' όσον όμως πρόκειται να την κατασκευάσουμε σε μιλιμετρέ χαρτί, θα πρέπει πρωτίστως να βρούμε την κλίμακα με την οποία θα την κατασκευάσουμε. Με τον όρο κλίμακα εννοούμε την αναλογία μεταξύ των γραμμών (χιλιοστών) που υπάρχουν στο μιλιμετρέ χαρτί και της μονάδας

[1] την επιλέγει ο υπολογιστής



Σχήμα Β′.1: Ξεκινώντας οι άξονες από το σημείο $(0, 0)$, η γραφική παράσταση περιορίζεται στην πάνω δεξιά γωνία σα μια μικρή γραμμούλα, χωρίς να μας επιτρέπει να δούμε την παραμικρή λεπτομέρεια.



Σχήμα Β′.2: Η ίδια γραφική παράσταση με αυτή της εικόνας Β′.1. Οι λεπτομέρειες φαίνονται εδώ.

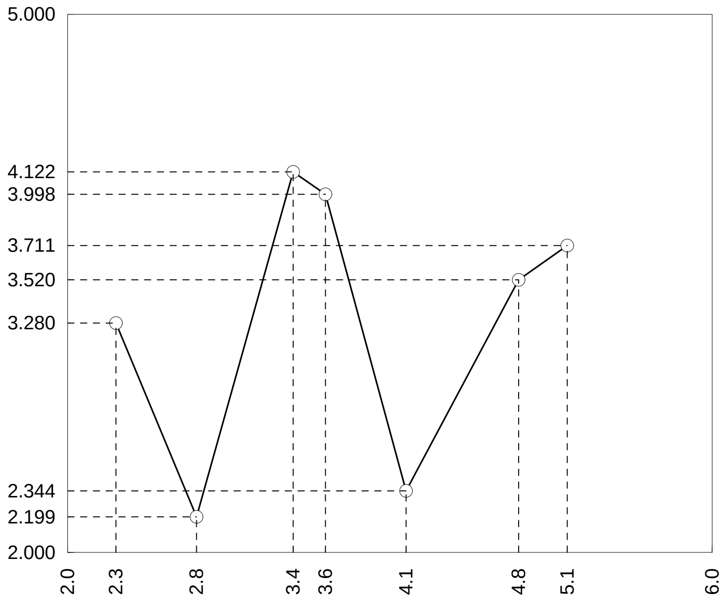
μέτρησης του μεγέθους που θέλουμε να παραστήσουμε. Το πρώτο που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε το εύρος των τιμών των x και y. Το εύρος αυτό καθορίζεται από τη διαφορά της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής, που παίρνουν τα x και y. Φροντίζουμε στη συνέχεια το εύρος αυτό να το παραστήσουμε με ένα μήκος πάνω στο χαρτί, ώστε η αναλογία μήκους - εύρους να είναι μια απλή αναλογία και το εύρος των τιμών να χωράει στο χαρτί. Επίσης θα πρέπει η αρχή και το τέλος του κάθε άξονα να επιλεχθεί έτσι ώστε να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με το εύρος των τιμών.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Αν η ελάχιστη τιμή που παίρνει το x είναι το 0.62752 και η μέγιστη το 0.83251, τότε το εύρος των τιμών είναι $0.83251 - 0.62752 = 0.20499$. Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσε η γραφική παράσταση να αρχίζει από το 0.6 και να τελειώνει στο 0.9, ή θα μπορούσε να αρχίζει από το 0.62 και να τελειώνει στο 0.84. Στην πρώτη επιλογή το εύρος τιμών γίνεται 0.3 και στη δεύτερη 0.22. Στην πρώτη επιλογή θα ήταν βολική μια κλίμακα, όπου το κάθε mm του χαρτιού θα αντιστοιχούσε σε 0.003 μονάδες, ενώ στη δεύτερη θα ήταν βολική μια κλίμακα, όπου το κάθε mm του χαρτιού θα αντιστοιχούσε σε 0.002 μονάδες. Στην πρώτη επιλογή το εύρος των 0.3 μονάδων θα αντιστοιχούσε σε $10cm$, ενώ στη δεύτερη επιλογή το εύρος των 0.22 μονάδων θα αντιστοιχούσε σε $11cm$. Ας σημειωθεί ότι η επιλογή της κλίμακας, όπως και η επιλογή της αρχής και του τέλους των αξόνων δεν είναι μοναδικά. Ο καθένας μπορεί να κάνει τις δικές του επιλογές, αρκεί να ακολουθεί τους παραπάνω απλούς κανόνες. Σίγουρα πάντως δε θα ήταν καθόλου ‘ωραίο” η αρχή του άξονα στο προηγούμενο παράδειγμα να ήταν το 0.62752, όπως επίσης δε θα ήταν ‘ωραίο” η αρχή του άξονα να ήταν το 0.62, αν η ελάχιστη τιμή που παίρνει το x είναι το 0.62752 και η μέγιστη είναι το 17.125. Μια καλή επιλογή γι' αυτή την περίπτωση θα ήταν η αρχή του άξονα να είναι το 0 και το τέλος το 20.

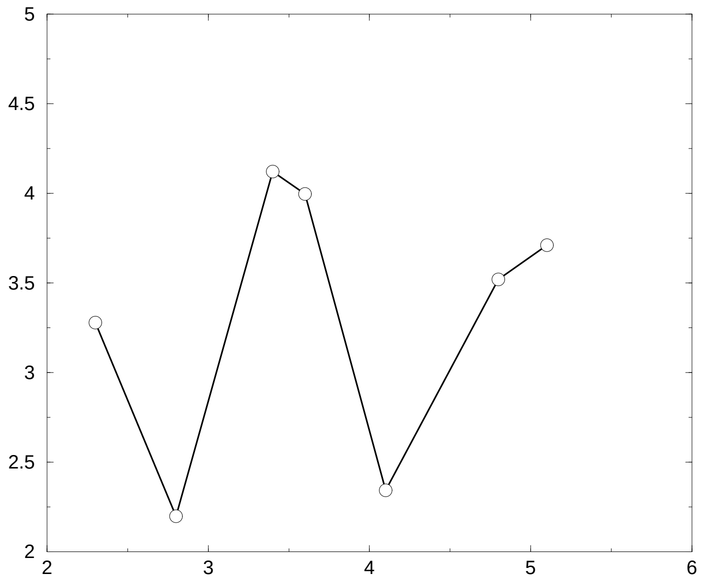
Διαστήματα χωρισμού

Είναι βολικό ο άξονας να χωρίζεται σε ίσα διαστήματα, στα άκρα των οποίων θα αναφέρονται οι τιμές του άξονα σ' αυτά τα σημεία. Έτσι θα γίνεται εύκολη η αναγνώριση των τιμών που έχουν τα σημεία της γραφικής παράστασης, χωρίς μεγάλη απόκλιση από την πραγματική τους τιμή. Τα διαστήματα αυτά δεν πρέπει να είναι πάρα πολλά, γιατί τότε δε θα είναι εύκολο να τα διαχωρίσουμε μεταξύ τους με μια ματιά.

Ένα μεγάλο λάθος που κάνουν οι άπειροι φοιτητές, αντί αυτού του χωρισμού σε διαστήματα, χαράζουν παράλληλες γραμμές στους άξονες από τα αντίστοιχα σημεία x και y των αξόνων και μάλιστα σημειώνουν και πάνω στον άξονα τα σημεία x και y. Αυτό βεβαίως είναι βολικό για τους ίδιους στην τοποθέτηση των σημείων στο μιλιμετρέ χαρτί. Ωστόσο δημιουργεί ένα ακαλαίσθητο αποτέλεσμα με ένα σωρό γραμμές, που αλλοιώνουν την εικόνα, το οποίο γίνεται “καταστροφικό” όσο ο αριθμός των σημείων αυξάνεται. Επιπλέον αυτές οι γραμμές όπως και η σημείωση πάνω στους άξονες των τιμών των x και y των σημείων, δεν έχουν να προσφέρουν καμία απολύτως πληροφορία σ' αυτόν που θέλει να “διαβάσει” τη γραφική παράσταση. Είναι επομένως καλό οι γραμμές αυτές όπως επίσης και η σημείωση των τιμών των x και y των σημείων, να μην εμφανίζονται στη γραφική παράσταση. Δείτε για παράδειγμα πόσο ακαλαίσθητο και πόσο “χαοτικό” είναι το γράφημα της εικόνας Β′.3 και πόσο πιο ξεκάθαρο



Σχήμα Β΄.3: Η χαοτική εικόνα των παράλληλων γραμμών και των τιμών των σημείων



Σχήμα Β΄.4: Η ίδια γραφική παράσταση με την Β΄.3 χωρίς τις παράλληλες γραμμές και τις τιμές των σημείων είναι το ίδιο γράφημα στην εικόνα Β′.4.

Ενδείξεις αξόνων

Οι ενδείξεις των τιμών πάνω στους άξονες, ενδέχεται να έχουν πάρα πολύ μικρές ή πάρα πολύ μεγάλες τιμές. Π.χ. 0.00000005 ή 50000000. Τέτοιες τιμές δεν είναι βολικό να γράφονται ως ενδείξεις στους άξονες, γιατί καταλαμβάνουν όλο το χώρο. Αντί αυτών εκείνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να γράψουμε τη δύναμη του 10 που θα "κόψει" τα μηδενικά, μαζί με τη μονάδα μέτρησης στο όνομα του άξονα, ή να αλλάξουμε πρόθεμα στη μονάδα μέτρησης.

Αν π.χ. έχουμε να παραστήσουμε ένα μήκος $0.00000005m$ θα μπορούσαμε να γράψουμε ως ένδειξη "50" και στον τίτλο του άξονα να γράψουμε "Μήκος (nm)" ή να γράψουμε ως ένδειξη "5" και στον τίτλο του άξονα να γράψουμε "Μήκος ($\times 10^{-8}m$)".

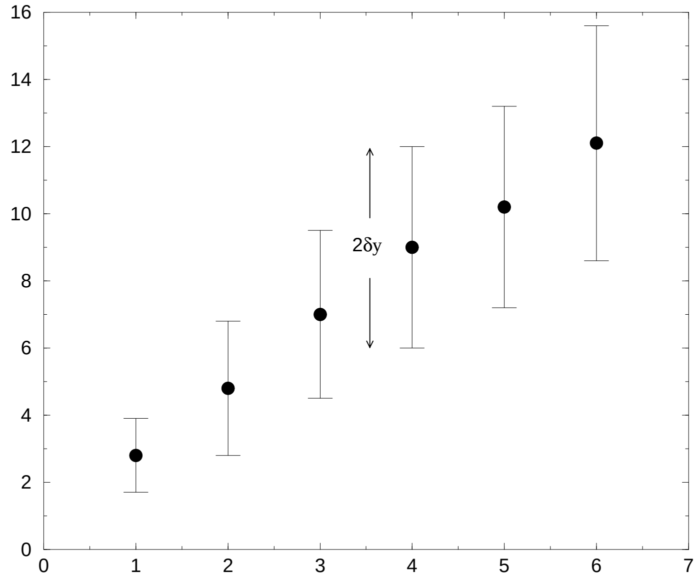
Η μορφή της γραφικής παράστασης

Από ένα πείραμα εκείνο το οποίο αντλούμε προκειμένου να κάνουμε μια γραφική παράσταση είναι τα πειραματικά σημεία (x_i, y_i). Δεδομένου ότι τα σημεία αυτά δεν παριστάνουν τις ακριβείς τιμές, αλλά αυτές που μετρήθηκαν, θα υπάρχουν κάποιες αποκλίσεις από την πραγματική εικόνα της γραφικής τους παράστασης. Περιμένουμε λοιπόν η γραφική τους παράσταση να μην προέρχεται από την ένωση των σημείων τους και κατά συνέπεια θα ήταν μάλλον λάθος να ενώσουμε τα πειραματικά σημεία για να δείξουμε τη γραφική παράσταση του μεγέθους που παριστάνεται στον άξονα y σε σχέση με το μέγεθος που παριστάνεται στον άξονα x. Το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να παραστήσουμε σωστά τα πειραματικά σημεία και να βρούμε μια καμπύλη που θα προσαρμόζεται στα πειραματικά δεδομένα και θα παριστάνει τη γραφική παράσταση του μεγέθους y ως προς το μέγεθος x. Η προσαρμογή μιας τέτοιας καμπύλης στα πειραματικά σημεία μπορεί να γίνει με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, που ήδη είδαμε.

Είναι επίσης καλό να εμφανίζονται στη γραφική παράσταση οι ράβδοι σφάλματος (error bar). Η ράβδος σφάλματος δεν είναι τίποτα άλλο παρά η παράσταση του σφάλματος πάνω στα πειραματικά σημεία με μια γραμμούλα. Η γραμμούλα αυτή μπορεί να αναφέρεται στο σφάλμα δx ή στο σφάλμα δy και είναι παράλληλη στον άξονα x ή y αντίστοιχα. Έχει μήκος διπλάσιο από το σφάλμα και το κέντρο της βρίσκεται πάνω στο σημείο. Στο σχήμα Β′.5 φαίνεται η γραφική παράσταση κάποιων πειραματικών σημείων με τους ράβδους σφάλματος δy.

Πολλές γραφικές παραστάσεις σε ένα γράφημα

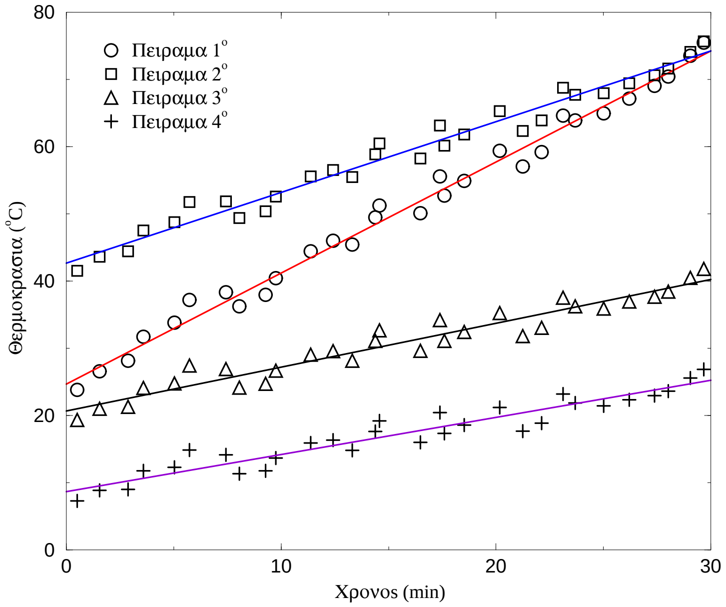
Κανένας κανόνας δεν υπάρχει που να επιβάλει ότι σε μια γραφική παράσταση πρέπει να υπάρχει ένα μόνο γράφημα. Κάλλιστα μπορούμε να έχουμε περισ-



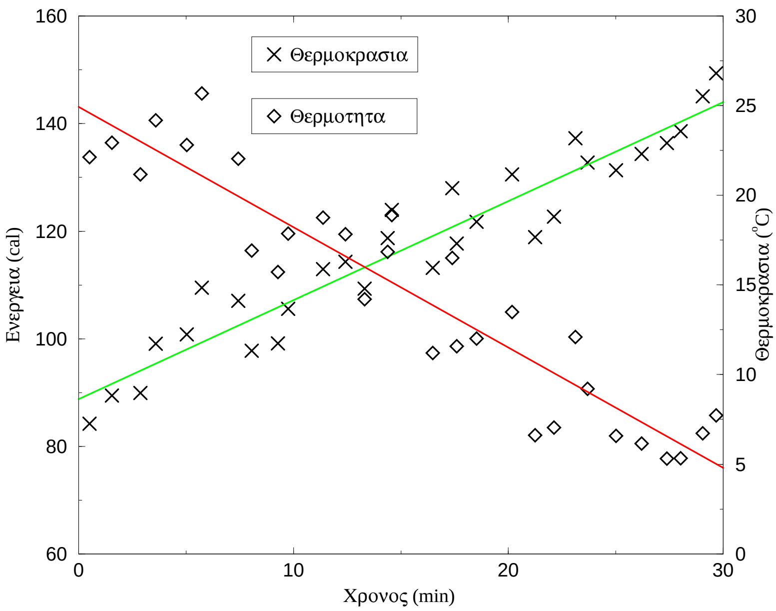
Σχήμα Β′.5: Οι ράβδοι σφάλματος δy. Θα μπορούσαν να είχαν παρασταθεί και οι αντίστοιχοι ράβδοι σφάλματος δx

σότερες από μία γραφικές παραστάσεις στο ίδιο γράφημα. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει όμως να μπορούμε να τις διακρίνουμε μεταξύ τους και να μπορούμε να καταλάβουμε ποιά αντιστοιχεί σε κάθε περίπτωση. Για το λόγο αυτό είναι καλό να χρησιμοποιούμε διαφορετικά σύμβολα (κύκλους, τετράγωνα, αστεράκια κ.τ.λ.) ή/και χρώματα εφ′ όσον πρόκειται για σημεία, και διαφορετικούς τύπους ευθειών (συμπαγείς, διακεκομμένες, εστιγμένες κ.τ.λ.) ή/και διαφορετικά χρώματα, εφ όσον πρόκειται για συνεχείς γραμμές. Δείτε σαν παράδειγμα την εικόνα Β′.6 η οποία παριστάνει τα πειραματικά σημεία από τέσσερα διαφορετικά πειράματα στα οποία έχουμε μετρήσει τη θερμοκρασία ενός υγρού ως συνάρτηση του χρόνου.

Θα μπορούσε ακόμα να παριστάνονται στο ίδιο γράφημα γραφικές παραστάσεις που δεν αντιστοιχούν στο ίδιο μέγεθος y. Θα μπορούσε δηλαδή να παριστάνεται ένα μέγεθος y_1 σα συνάρτηση του x και ένα άλλο μέγεθος y_2 σα συνάρτηση επίσης του x. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται ως άξονας που θα παραστήσει το μέγεθος y_1 ο δεξιός άξονας του γραφήματος, ενώ ο αριστερός χρησιμοποιείται για να παραστήσει το μέγεθος y_2. Δείτε σαν παράδειγμα την εικόνα Β′.7, η οποία παριστάνει δύο γραφικές παραστάσεις από διαφορετικά μεγέθη. Η μία παριστάνει τη θερμοκρασία ως συνάρτηση του χρόνου ενός κρύου σώματος, η οποία αυξάνεται καθώς ένα σώμα πιο ζεστό έρχεται σε επαφή μαζί του. Η άλλη παριστάνει την ενέργεια που μένει στο ζεστό σώμα σα συνάρτηση του χρόνου, υπό την προϋπόθεση ότι ο ρυθμός απώλειας της θερμότητας είναι σταθερός.



Σχήμα Β΄.6: Πολλές γραφικές παραστάσεις στο ίδιο γράφημα



Σχήμα Β΄.7: Γραφικές παραστάσεις διαφορετικών μεγεθών στο ίδιο γράφημα.

Παράρτημα Γ΄

Παράγωγοι

Do not worry about your difficulties in Mathematics. I can assure you that mine are still greater.
Albert Einstein (1879 - 1955)

Γ΄.1 Ορισμός

Παράγωγος $f'(x)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της. Δηλαδή είναι το πηλίκο της μεταβολής, που παθαίνει η συνάρτηση $f(x)$ όταν η μεταβλητή της μεταβάλλεται, προς τη μεταβολή της μεταβλητής x, στο όριο που η μεταβολή του x τείνει στο μηδέν.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}. \qquad (Γ΄.1)}$$

Την παραπάνω μαθηματική έκφραση της παραγώγου μπορεί κανείς να τη συναντήσει και με άλλες μορφές, όπως

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x-\delta x)}{2\delta x} \qquad (Γ΄.2)$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x-\delta x)}{\delta x} \qquad (Γ΄.3)$$

$$= \lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \qquad (Γ΄.4)$$

$$= \lim_{x_1 - x_2 \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}. \qquad (Γ΄.5)$$

Διαφορικό $df(x, dx)$ μιας συνάρτησης $f(x)$ λέγεται η ποσότητα

$$\boxed{df(x, dx) = f'(x)dx, \qquad (Γ΄.6)}$$

όπου το dx εκφράζει μια πολύ μικρή μεταβολή της μεταβλητής x. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του διαφορικού, η παράγωγος μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$\boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx}. \qquad (\Gamma'.7)}$$

Αυτό φυσικά δεν είναι τίποτα άλλο από ένας διαφορετικός συμβολισμός για την παράγωγο, ο οποίος καμιά φορά μπορεί να είναι πιο βολικός από το συμβολισμό $f'(x)$. Ας σημειωθεί ότι το διαφορικό της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι ίσο με dx.

Γ'.2 Αριθμητικός υπολογισμός παραγώγου από τον ορισμό

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε την παράγωγο μιας συνάρτησης $f(x)$ σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο του πεδίου ορισμού της. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι δε γνωρίζουμε κανένα από τους κανόνες παραγώγισης, αλλά μόνο τον ορισμό της παραγώγου, που δώσαμε παραπάνω. Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε την τιμή του πηλίκου της εξίσωσης ορισμού Γ'.1, στο όριο που η μεταβολή δx τείνει στο μηδέν. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να μειώνουμε συνεχώς την τιμή της μεταβολής δx και να δούμε σε ποιο όριο τείνει το πηλίκο της εξίσωσης ορισμού Γ'.1.

Ας βρούμε λοιπόν μ' αυτό τον τρόπο την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = 5x^2$ στο σημείο $x = 4$

- Για $\delta x = 0.1$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x=4) &\approx \frac{f(4+0.1)-f(4)}{0.1} = \frac{5\times 4.1^2 - 5\times 4^2}{0.1} \\ &= \frac{84.05-80}{0.1} = \frac{4.05}{0.1} = 40.5 \end{aligned}$$

- Για $\delta x = 0.01$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x=4) &\approx \frac{f(4+0.01)-f(4)}{0.01} = \frac{5\times 4.01^2 - 5\times 4^2}{0.01} \\ &= \frac{80.4005-80}{0.01} = \frac{0.4005}{0.01} = 40.05 \end{aligned}$$

- Για $\delta x = 0.001$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x=4) &\approx \frac{f(4+0.001)-f(4)}{0.001} = \frac{5\times 4.001^2 - 5\times 4^2}{0.001} \\ &= \frac{80.040005-80}{0.001} = \frac{0.040005}{0.001} = 40.005 \end{aligned}$$

- Για $\delta x = 0.0001$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x=4) &\approx \frac{f(4+0.0001)-f(4)}{0.0001} = \frac{5\times 4.0001^2 - 5\times 4^2}{0.0001} \\ &= \frac{80.00400005-80}{0.0001} = \frac{0.00400005}{0.0001} = 40.0005 \end{aligned}$$

- Για $\delta x = 0.00001$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x=4) &\approx \frac{f(4+0.00001)-f(4)}{0.00001} = \frac{5\times 4.00001^2 - 5\times 4^2}{0.00001} \\ &= \frac{80.0004000005-80}{0.00001} = \frac{0.0004000005}{0.00001} = 40.00005 \end{aligned}$$

- Για $\delta x = 0.000001$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x=4) &\approx \frac{f(4+0.000001)-f(4)}{0.000001} = \frac{5\times 4.000001^2 - 5\times 4^2}{0.000001} \\ &= \frac{80.000040000005-80}{0.000001} = \frac{0.000040000005}{0.000001} \\ &= 40.000005 \end{aligned}$$

Αντιλαμβάνεται λοιπόν κανείς ότι όσο το δx γίνεται μικρότερο τόσο η τιμή της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $x = 4$ τείνει στην τιμή 40. Αυτό εύκολα μπορούμε να το διαπιστώσουμε αν ανακαλέσουμε στη μνήμη μας ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = ax^2$ είναι η $f'(x) = 2ax$. Κατά συνέπεια η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = 5x^2$ είναι η $f'(x) = 10x$, η οποία για $x = 4$ παίρνει την τιμή 40, όπως ακριβώς το βρήκαμε αριθμητικά.

Γ΄.3 Παραγωγίσεις βασικών συναρτήσεων

Φυσικά δεν είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω αριθμητικό τρόπο εύρεσης της παραγώγου, αν μπορούμε να έχουμε μια αναλυτική έκφραση γι' αυτή. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε τις παραγώγους μερικών βασικών συναρτήσεων.

$$f(x) = c \qquad f'(x) = 0, \qquad (c \in \mathcal{R}) \tag{Γ'.8}$$
$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}, \qquad (n \neq 0) \tag{Γ'.9}$$
$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \tag{Γ'.10}$$
$$f(x) = a^x \qquad f'(x) = \ln(a)a^x \tag{Γ'.11}$$
$$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \tag{Γ'.12}$$
$$f(x) = \log_a x \qquad f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \tag{Γ'.13}$$
$$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x \tag{Γ'.14}$$
$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x \tag{Γ'.15}$$
$$f(x) = \tan x \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{Γ'.16}$$
$$f(x) = \cot x \qquad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{Γ'.17}$$
$$f(x) = \arcsin x \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{Γ'.18}$$
$$f(x) = \arccos x \qquad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{Γ'.19}$$
$$f(x) = \arctan x \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{Γ'.20}$$

Γ'.4 Κανόνες παραγώγισης

Οι συνήθεις συναρτήσεις είναι συνδυασμός των παραπάνω βασικών συναρτήσεων ή είναι σύνθετες συναρτήσεις, που προκύπτουν απ' αυτές, ή και τα δύο. Προκειμένου λοιπόν να βρούμε τις παραγώγους των συναρτήσεων αυτών πρέπει να γνωρίζουμε, πώς να αντιμετωπίζουμε την παραγώγιση των συνδυασμών αυτών των βασικών συναρτήσεων, καθώς επίσης και των σύνθετων συναρτήσεων, που προκύπτουν απ' αυτές. Η αντιμετώπιση τέτοιων περιπτώσεων γίνεται μέσω των λεγόμενων κανόνων παραγώγισης, τους οποίους παραθέτουμε παρακάτω. Αν $f(x)$ και $g(x)$ συναρτήσεις τότε

Παράγωγος αθροίσματος

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)} \tag{Γ'.21}$$

π.χ. $(x^3 + x)' = 3x^2 + 1$, όπου $f(x) = x^3$ και $g(x) = x$.

Παράγωγος γινομένου συνάρτησης επί σταθερά

$$(cf(x))' = cf'(x) \tag{Γ.22}$$

π.χ. $(13.2x^7)' = 13.2 \cdot 7x^6 = 92.4x^6$, όπου $c = 13.2$ και $f(x) = x^7$.
Με συνδυασμό των κανόνων παραγώγισης αθροίσματος και γινομένου παίρνουμε $(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$, όπου a, b σταθερές
π.χ. $(13.2x^7 + 2x^3 + x)' = 13.2 \cdot 7x^6 + 2 \cdot 3x^2 + 1 = 92.4x^6 + 6x^2 + 1$

Παράγωγος γινομένου συναρτήσεων

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{Γ.23}$$

π.χ. $(x^2e^x)' = (x^2)'e^x + x^2(e^x)' = 2xe^x + +x^2e^x = e^x(x^2 + 2x)$

Παράγωγος πηλίκου συνάρτησεων

$$\left(\frac{f(x)}{gx}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \tag{Γ.24}$$

$$\begin{aligned} \text{π.χ.} \quad (\tan x)' &= (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης - Αλυσιδωτή παραγώγιση

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{Γ.25}$$

Με το συμβολισμό των διαφορικών θα γράφαμε

$$(f(g(x)))' = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \tag{Γ.26}$$

$$\text{π.χ.} \quad (e^{x^2})' = \frac{de^{x^2}}{dx} = \frac{de^{x^2}}{dx^2} \cdot \frac{dx^2}{dx} = \frac{de^y}{dy} \cdot \frac{dx^2}{dx} = e^y \cdot 2x = 2xe^{x^2}, \quad \text{όπου} \quad y = x^2.$$

Γ'.5 Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Επειδή η παράγωγος $f'(x)$ είναι κι αυτή μια συνάρτηση, θα έχει κι αυτή μια παράγωγο. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζονται οι λεγόμενες **παράγωγοι υψηλότερης τάξης**. Η παράγωγος της παραγώγου μιας συνάρτησης $f(x)$ είναι η **δεύτερη παράγωγος της** $f(x)$ και συμβολίζεται $f''(x)$ ή $\frac{d^2f}{dx^2}$.

$$\boxed{f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{f'(x+\delta x)-f'(x)}{\delta x}. \qquad (Γ'.27)}$$

Η παράγωγος της δεύτερης παραγώγου, είναι η τρίτη παράγωγος και συμβολίζεται $f'''(x)$ ή $\frac{d^3f}{dx^3}$. Γενικά η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ συμβολίζεται ως $f^{(n)}(x)$ ή $\frac{d^nf}{dx^n}$ και εξ ορισμού είναι η παράγωγος της $(n-1)-$παραγώγου της $f(x)$.

Γ'.6 Μερικές παράγωγοι

Μέχρι στιγμής είδαμε τις παραγώγου συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Γενικά όμως οι συναρτήσεις μπορούν να εξαρτώνται από περισσότερες από μια μεταβλητές. Σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ορίζουμε τις λεγόμενες **μερικές παραγώγους** ως προς μια μεταβλητή της συνάρτησης. Ο ορισμός της μερικής παραγώγου μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών, ως προς μια μεταβλητή της, είναι ακριβώς ο ίδιος με τον ορισμό της παραγώγου μιας συνάρτησης μιας μεταβλητής, υπό την προϋπόθεση ότι έχουμε θεωρήσει ότι οι υπόλοιπες μεταβλητές (πλην αυτής ως προς την οποία υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο) είναι σταθερές. Αν δηλαδή έχουμε τη συνάρτηση $f(x,y,z,\ldots)$ της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο ως προς y, τότε εξ ορισμού,

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y,z,\ldots)}{\partial y} = \lim_{\delta y\to 0}\frac{f(x,y+\delta y,z,\ldots)-f(x,y,z,\ldots)}{\delta y}. \qquad (Γ'.28)}$$

Π.χ. Οι μερικές παράγωγοι της $f(x,y,z) = 3x^2y + e^xz + z^2$ είναι οι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= 3\cdot 2x^{2-1}y + e^xz + 0 = 6xy + e^xz \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= 3x^2\cdot 1 + 0 + 0 = 3x^2 \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= 0 + e^x\cdot 1 + 2z^{2-1} = e^x + 2z
\end{aligned}$$

Παράρτημα Δ΄

Παραδείγματα

Δ΄.1 Μέτρηση του δείκτη μάζας σώματος

Admitting Error clears the Score,
And proves you Wiser than before.
Arthur Guiterman (1871 - 1943)

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μετρήσουμε το δείκτη μάζας σώματος BMI ενός παιδιού. Εξ ορισμού ο δείκτης μάζας σώματος δίνεται από τη σχέση

$$BMI = \frac{m}{h^2}, \tag{Δ΄.1}$$

όπου m το βάρος του και h το ύψος του. Για να υπολογίσουμε λοιπόν το BMI, χρειάζεται να μετρήσουμε το βάρος και το ύψος του παιδιού. Ας υποθέσουμε ότι μετράμε το ύψος του παιδιού και το βρίσκουμε $1.23 \pm 0.01m$. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι μετράμε 10 φορές το βάρος του παιδιού με μια ζυγαριά, η οποία έχει σφάλμα $\delta m = 1kgr$ και ότι οι μετρήσεις που βρήκαμε είναι αυτές που παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα [1].

α/α μέτρησης	1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η	9η	10η
μέτρηση (kgr)	27	19	18	17	21	20	20	26	19	21

Παρατηρούμε ότι όλες οι μετρήσεις μας έχουν ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφίων. Στις πράξεις που θα κάνουμε στη συνέχεια θα προκύψουν περισσότερα από δύο σημαντικά ψηφία. Θα τα κρατήσουμε όλα αυτά τα ψηφία (κι ας μην είναι σημαντικά) και τη στρογγυλοποίηση, που θα μας δώσει το σωστό

[1] οι μετρήσεις δεν είναι και τόσο ρεαλιστικές, αλλά ας τις δεχτούμε για τις ανάγκες του παραδείγματος

αριθμό σημαντικών ψηφίων (δηλ. 2), θα την κάνουμε στο τελικό αποτέλεσμα που μας ενδιαφέρει (δηλ. στο δείκτη μάζας σώματος).

Κατ΄ αρχήν θα βρούμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση αυτών των μετρήσεων, με σκοπό να βρούμε (εφαρμόζοντας το κριτήριο Chauvenet) αν κάποια (ή κάποιες) τιμές απορρίπτονται ως ακραίες μετρήσεις, που έχουν μικρή πιθανότητα εμφάνισης και κατά συνέπεια δε θα έπρεπε να κάνουν την εμφάνισή τους, για το συγκεκριμένο αριθμό μετρήσεων (10) που κάναμε.

Η μέση τιμή αυτών των μετρήσεων για τη μάζα m είναι:

$$\begin{aligned}\langle m\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i \\ &= \frac{27+19+18+17+21+20+20+26+19+21}{10} = 20.8kgr\end{aligned}$$

Η τυπική απόκλιση σ δίνεται από τη σχέση $\sigma = \sqrt{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2}$. Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τον ορισμό της, σύμφωνα με τον οποίο $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(m_i - \langle m\rangle)^2}$. Όμως ο υπολογισμός αυτός είναι χρονοβόρος και κοπιαστικός γιατί απαιτεί περισσότερες πράξεις από ότι να υπολογίσουμε το $\langle m^2\rangle = \sum_{i=1}^{N} m_i^2)/N$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\langle m^2\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m^2 \\ &= \frac{27^2+19^2+18^2+17^2+21^2+20^2+20^2+26^2+19^2+21^2}{10} \\ &= \frac{729+361+324+289+441+400+676+361+441}{10} = 442.2kgr^2\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2} = \sqrt{442.2 - 20.8^2} \\ &= \sqrt{442.2 - 432.64} = \sqrt{9.56} = 3.0919kgr\end{aligned}$$

Αφού έχουμε βρει τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση θα εφαρμόσουμε το κριτήριο Chauvenet για να δούμε αν απορρίπτεται κάποια τιμή. Κοιτάζοντας τον πίνακα 1.1, βλέπουμε ότι το β που αντιστοιχεί σε 10 μετρήσεις είναι $\beta = 1.960$. Σύμφωνα με το κριτήριο Chauvenet υπολογίζουμε το διάστημα

$$\begin{aligned}[\langle m\rangle - \beta\sigma, \langle m\rangle + \beta\sigma] &= [20.8 - 1.960 \times 3.0919, 20.8 + 1.960 \times 3.0919] \\ &= [14.740, 26.860].\end{aligned}$$

Μετρήσεις που βρίσκονται έξω απ΄ αυτό το διάστημα, απορρίπτονται. Μοναδική μέτρηση που βρίσκεται έξω απ΄ αυτό το διάστημα είναι η μέτρηση $28kgr$ και επομένως απορρίπτεται. Μετά την απόρριψη αυτής της μέτρησης, μένουν οι 9 μετρήσεις, για τις οποίες πρέπει να βρούμε τη μέση τιμή τους και το τυπικό σφάλμα. Η μέση τους τιμή, η οποία είναι και η πιθανότερη τιμή και αυτή θα θεωρούμε ως μέτρηση που προέρχεται από τη στατιστική ανάλυση, που μόλις κάναμε, θα έχει την τιμή

$$\langle m\rangle = \frac{19+18+17+21+20+20++26+19+21}{9} = 20.11111\ldots kgr$$

Με στρογγυλοποίηση σε 2 σημαντικά ψηφία παίρνουμε $m = 20kgr$. Αυτή είναι λοιπόν η πιθανότερη τιμή του βάρους του.

Για να βρούμε το τυπικό σφάλμα σ_S, χρειαζόμαστε την τυπική απόκλιση σ, αφού $\sigma_S = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\sigma$, όπου τώρα $N = 9$. Με τον ίδιο τρόπο που βρήκαμε την τυπική απόκλιση για τις 10 μετρήσεις νωρίτερα, θα βρούμε την τυπική απόκλιση των εννέα μετρήσεων που απέμειναν, μετά την απόρριψη της μίας. Θα βρούμε πρώτα το $\langle m^2\rangle$.

$$\begin{aligned}\langle m^2\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i^2 = \frac{19^2+18^2+17^2+21^2+20^2+20^2+26^2+19^2+21^2}{9}\\ &= \frac{361+324+289+441+400++676+361+441}{9} = 410.333\ldots kgr^2\end{aligned}$$

Η τυπική απόκλιση σ θα είναι

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\langle m^2\rangle - \langle m\rangle^2} = \sqrt{410.333\ldots - 20.111\ldots^2} =\\ &= \sqrt{410.333\ldots - 404.45679} = \sqrt{5.876543} = 2.4241kgr\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια το τυπικό σφάλμα θα είναι

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{N}{N-1}}\sigma = \sqrt{\frac{9}{9-1}} \times 2.4241 = 2.5711kgr$$

Με στρογγυλοποίηση σε ένα σημαντικό ψηφίο, το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής παίρνει την τιμή $\sigma_E = 3kgr$. Το σφάλμα επομένως του βάρους είναι το μέγιστο ανάμεσα στο τυπικό σφάλμα και στο σφάλμα του οργάνου (δηλ. της ζυγαριάς). Το σφάλμα της ζυγαριάς είναι όπως είπαμε $1kgr$, που είναι μικρότερο από το $\sigma_E = 3kgr$. Επομένως το σφάλμα που κάνουμε στη μέτρηση του βάρους είναι $\delta m = 3kgr$.

Γνωρίζοντας ήδη την τιμή του ύψους και το σφάλμα μου και έχοντας ήδη υπολογίσει την πιθανότερη τιμή του βάρους και το σφάλμα της μέτρησής του, μπορούμε να μετρήσουμε (με υπολογισμό, δηλ. ως έμμεση μέτρηση) την τιμή του συντελεστή μάζας σώματος BMI, από τη σχέση

$$BMI = \frac{m}{h^2} \pm \delta(BMI) \qquad \text{όπου} \qquad \frac{\delta(BMI)}{BMI} = \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\delta h}{h}\right)^2}$$

όπου το $\delta(BMI)$ είναι το σφάλμα [2] του BMI. Έτσι βρίσκουμε

$$BMI = \frac{m}{h^2} = \frac{20.111}{0.93^2} = 23.25,$$

που με στρογγυλοποίηση σε δύο ψηφία δίνει $BMI = 23$.[3]

$$\begin{aligned}\frac{\delta(BMI)}{BMI} &= \sqrt{\left(\frac{3}{20}\right)^2 + \left(2\frac{0.01}{0.93}\right)^2} = \sqrt{0.15^2 + 0.021505^2} \\ &= \sqrt{0.0225 + 0.00046248} = \sqrt{0.022962} = 0.15153\end{aligned}$$

Επομένως $\delta(BMI) = 0.15153(BMI) = 0.15153 \times 23.25 = 3.52$, που με στρογγυλοποίηση σε ένα ψηφίο δίνει $\delta(BMI) = 4$.

Καταλήγουμε έτσι στη μέτρηση $BMI = 23 \pm 4$.

Δ′.2 Προσαρμογή με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

Ας υποθέσουμε ότι σ' ένα πείραμα μετράμε τη θερμοκρασία, ως συνάρτηση του χρόνου, ενός δοχείου με νερό το οποίο είναι θερμικά μονωμένο και στο οποίο δίνουμε θερμότητα με ένα σταθερό ρυθμό. Ας υποθέσουμε ακόμα ότι για κάθε λεπτό που περνάει, μετράμε και καταγράφουμε τη θερμοκρασία του νερού, η οποία φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

$t(min)$	$\Theta(^oC)$
0	5.1
1	12.6
2	26.3
3	33.4
4	47.2
5	55.4

Δεδομένων των συνθηκών του πειράματος, περιμένουμε η θερμοκρασία του νερού να αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο και επομένως η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας σα συνάρτηση του χρόνου θέρμανσης, να είναι ευθεία.

$$\Theta(t) = \Theta_0 + ct,$$

όπου το c είναι μια σταθερά, που παριστάνει την κλίση της ευθείας αυτής και Θ_0 μια άλλη σταθερά, που παριστάνει τη τετμημένη της ευθείας στον άξονα-y.

[2]βλέπε τη σχέση 1.38

[3]εδώ δεν αναφέρουμε τις μονάδες, γιατί έχουμε θεωρήσει ότι το βάρος εκφράζεται σε kgr και το ύψος σε m

Όπως εύκολα μπορούμε να δούμε τοποθετώντας τα πειραματικά σημεία του πίνακα στο επίπεδο xy,(βλέπε εικόνα Δ'.1), η γραφική τους παράσταση μοιάζει με ευθεία. Ωστόσο αν ενώσουμε τα σημεία αυτά δε θα πάρουμε ευθεία. Αυτό οφείλεται στα σφάλματα των μετρήσεων. Για να βρούμε τη βέλτιστη ευθεία, που προσαρμόζεται με τον καλύτερο τρόπο στα πειραματικά σημεία, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Για να βρούμε την ευθεία αυτή, αρκεί να γνωρίζουμε την κλίση της c και την τετμημένη Θ_0.

Γνωρίζουμε ότι η κλίση της ευθείας δίνεται από τη σχέση

$$c = \frac{\sigma_{\Theta t}}{\sigma_t^2} = \frac{\langle \Theta t\rangle - \langle\Theta\rangle\langle t\rangle}{\langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2}$$

και η τετμημένη από τη σχέση

$$\Theta_0 = \langle\Theta\rangle - c\langle t\rangle$$

Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε τις ποσότητες $\langle t\rangle$, $\langle\Theta\rangle$, $\langle t^2\rangle$ και $\langle\Theta t\rangle$.

$$\langle t\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i = \frac{0+1+2+3+4+5}{6} = 2.5min$$

$$\langle\Theta\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Theta_i = \frac{5.1+12.6+26.3+33.4+47.2+55.4}{6} = 30^oC$$

$$\begin{aligned}\langle t^2\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i^2 = \frac{0^2+1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{6}\\ &= \frac{0+1+4+9+16+25}{6} = 9.1666666min^2\end{aligned}$$

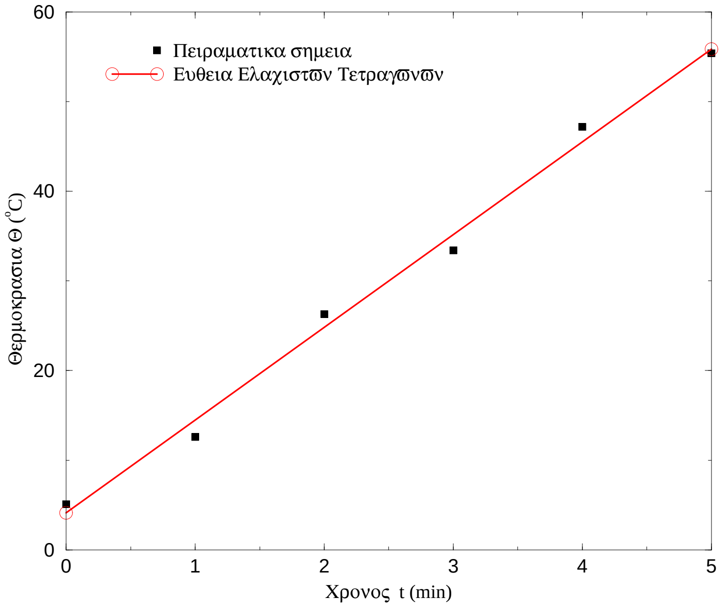
$$\begin{aligned}\langle\Theta t\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Theta_i t_i\\ &= \frac{5.1\times 0+12.6\times 1+26.3\times 2+33.4\times 3+47.2\times 4+55.4\times 5}{6}\\ &= \frac{0+12.6+52.6+100.2+188.8+277}{6} = 105.2^oC\cdot min\end{aligned}$$

Από τις ποσότητες αυτές βρίσκουμε:

$$\sigma_{\Theta t} = \langle\Theta t\rangle - \langle\Theta\rangle\langle t\rangle = 105.2^oC\cdot min - 30^oC/min\times 2.5min = 30.2^oC\cdot min$$

και

$$\sigma_t^2 = \langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2 = 9.1666666min^2 - (2.5min)^2 = 2.916666666min^2$$



Σχήμα Δ΄.1: Προσαρμογή ευθείας σε πειραματικά σημεία με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

Επομένως

$$c = \frac{\sigma_{\Theta t}}{\sigma_t^2} = \frac{30.2^oC \cdot min}{2.916666666min^2} = 10.354286^oC/min$$

και

$$\Theta_0 = \langle\Theta\rangle - c\langle t\rangle = 30^oC - 10.354286^oC/min \times 2.5min = 4.114285^oC$$

Η ευθεία που προσαρμόζεται καλύτερα στα πειραματικά μας δεδομένα είναι η

$$\Theta(t) = 4.114285 + 10.354286t \qquad (Δ΄.2)$$

όπου ο χρόνος t μετριέται σε min και η θερμοκρασία Θ σε ^oC. Για να χαράξουμε αυτή την ευθεία χρειάζεται να βρούμε δυο σημεία της και να τα ενώσουμε. Αν πάρουμε τα πιο απομακρυσμένα σημεία της για τα οποία έχουμε μετρήσεις βρίσκουμε για $t = 0$ $\Theta = 4.114285^oC$ και για $t = 5min$ $\Theta = 55.885715^oC$

Βρήκαμε έτσι την κλίση c της ευθείας (που εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η θερμοκρασία) και την αρχική θερμοκρασία Θ_0 και το μόνο που μένει να προσέξουμε είναι τα σημαντικά ψηφία με τα οποία πρέπει να εκφράσουμε αυτές τις ποσότητες.

Στη γραφική παράσταση Δ΄.1 φαίνονται τα πειραματικά σημεία και η ευθεία που προσαρμόσαμε σ΄ αυτά, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Μας μένει ακόμα να υπολογίσουμε το συντελεστή συσχέτισης r και το τυπικό σφάλμα εκτίμησης SEE. Για τον υπολογισμό αυτό χρειαζόμαστε ακόμα τη μέση τιμή Θ^2. Θα είναι

$$\begin{aligned}\langle\Theta^2\rangle &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Theta_i^2 = \frac{5.1^2+12.6^2+26.3^2+33.4^2+47.2^2+55.4^2}{6}\\ &= \frac{26.01+158.76+691.69+1115.56+2227.84+3069.16}{6} = 1214.836666^oC^2\end{aligned}$$

Ο συντελεστής συσχέτισης βρίσκεται από τη σχέση

$$r = \frac{\sigma_{\Theta t}}{\sigma_\Theta \sigma_t}.$$

Έχουμε ήδη βρεί τα $\sigma_{\Theta t} = 30.2^oC \cdot min$ και

$$\sigma_t^2 = 2.916666666min^2 \Longrightarrow \sigma_t = 1.707825min.$$

Μένει να βρούμε και το σ_Θ.

$$\sigma_\Theta = \sqrt{\langle\Theta^2\rangle - \langle\Theta\rangle^2} = \sqrt{1214.836666 - 30^2}^oC = 17.743637^oC.$$

Επομένως

$$r = \frac{\sigma_{\Theta t}}{\sigma_\Theta \sigma_t} = \frac{30.2^oC \cdot min}{1.707825min \times 17.743637^oC} = 0.9966.$$

Για το τυπικό σφάλμα εκτίμησης θα έχουμε

$$\begin{aligned}SEE &= \sigma_\Theta\sqrt{1-r^2} = 17.743637^oC\sqrt{1-0.9966^2} = 17.743637^oC\sqrt{0.00678821}\\ &= 17.743637 \times 0.0823906^oC = 1.46^oC,\end{aligned}$$

το οποίο με στρογγυλοποίηση δίνει $SEE = 1.5^oC$.