

## Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό αποτελεί την πρώτη έκδοση, υπό μορφή βιβλίου, των εργαστηριακών ασκήσεων που πραγματοποιούνται στο εργαστήριο φυσικής του Τμήματος Διατροφής και Διαιτολογίας του Τ.Ε.Ι. Κρήτης. Ως πρώτη έκδοση και υπό την πίεση χρόνου την οποία γράφηκε, υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να έχει διάφορα σφάλματα για τα οποία οι φοιτητές ενθαρρύνονται να τα βρουν και να τα αναφέρουν. Σίγουρα επιδέχεται βελτιώσεων και οι συγγραφείς είναι ανοικτοί σε προτάσεις για τη βελτίωσή του. Επίσης το βιβλίο αυτό δεν είναι ακόμα πλήρες, με την έννοια ότι δεν περιέχει το σύνολο των εργαστηριακών ασκήσεων.

Αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος αποτελεί μια εισαγωγή στη θεωρία σφαλμάτων, τη θεωρία δηλαδή που μας δίνει τη δυνατότητα να επεξεργαστούμε και να αξιολογήσουμε τις μετρήσεις που γίνονται σε ένα επιστημονικό εργαστήριο. Η κατανόηση τόσο της φιλοσοφίας όσο και της πρακτικής που απορρέει απ' αυτή τη θεωρία, είναι ουσιαστική για την πειραματική μελέτη μετρήσιμων μεγεθών, σε όλους τους κλάδους των πειραματικών επιστημών (φυσικής, χημείας, βιολογίας κτλ). Η γνώση των βασικών αρχών της θεωρίας σφαλμάτων, αποτελεί το θεμέλιο για μια αποδοτική πορεία των φοιτητών σε όλα τα εργαστηριακά μαθήματα και προφανώς και στο μάθημα του Εργαστηρίου Φυσικής. Για το λόγο αυτό συνίσταται ισχυρά η μελέτη της.

Στο δεύτερο μέρος αυτού του βιβλίου παρουσιάζονται οι εργαστηριακές ασκήσεις που πραγματοποιούνται στο μάθημα του Εργαστηρίου Φυσικής. Κάθε εργαστηριακή άσκηση περιέχει: (α) το θεωρητικό που υπόβαθρο που χρειάζεται οι φοιτητές να έχουν προκειμένου να πραγματοποιήσουν την άσκηση, (β) οδηγίες για το πείραμα που πρόκειται να πραγματοποιήσουν, (γ) οδηγίες για την επεξεργασία των μετρήσεων που θα πάρουν από τα πειράματα, (δ) ερωτήσεις ή ασκήσεις τις οποίες καλούνται να απαντήσουν, μέσα στα πλαίσια της εργαστηριακής αναφοράς που θα κάνουν, (ε) βιβλιογραφία στην οποία ενθαρρύνονται να καταφύγουν για πληρέστερη κατανόηση της θεωρίας που υπάρχει πίσω απ' το πείραμα.

Για κάθε εργαστηριακή άσκηση που πρόκειται να πραγματοποιηθεί οι φοιτητές οφείλουν να έχουν εκ των προτέρων προετοιμαστεί, έχοντας μελετήσει την αντίστοιχη θεωρία και την πειραματική μέθοδο που περιγράφεται σ' αυτό το βιβλίο. Χωρίς αυτή την προετοιμασία δε θα μπορούν να πραγματοποιήσουν το πείραμα. Αν κατά την προετοιμασία αυτή προκύψουν κάποιες απορίες, οι διδάσκοντες είναι στη διάθεση των φοιτητών για την επίλυσή τους.

Το πρώτο μέρος που αναφέρεται στη θεωρία σφαλμάτων και οι εργαστηριακές ασκήσεις: Μελέτη της τριβής, Μελέτη της ελεύθερης πτώσης, Μετατροπή της ηλιακής ενέργειας σε ηλεκτρική και Ηλεκτρόλυση του νερού επιμελήθηκαν από τον κ. Ζαχαρία Φθενάκη. Οι εργαστηριακές ασκήσεις: Μέτρηση ειδικής θερμότητας υλικών, Παρατήρηση και καταγραφή φασμάτων και Μπαταρία Υδρογόνου επιμελήθηκαν από τον κ. Γιάννη Μπουρμπάκη.

Την εποπτεία της συγγραφής αυτού του βιβλίου την είχε ο καθηγητής κ. Βασίλης Ζαφειρόπουλος.

Το κείμενο γράφηκε με το L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X<sub>2</sub> $\epsilon$ .

Φεβρουάριος 2004

Ζαχαρίας Φθενάκης

Γιάννης Μπουρμπάκης

## Πρόλογος δεύτερης έκδοσης

Η δεύτερη έκδοση του παρόντος, αποτελεί βελτίωση της πρώτης. Προστέθηκαν δυο ακόμα πειράματα, το πείραμα της μέτρησης της ραδιενέργειας και το πείραμα της μέτρησης του δείκτη διάθλασης ενός πρίσματος με γωνιόμετρο, που εντάχθηκε στο πείραμα της φασματοσκοπίας. Προστέθηκαν ακόμα μερικοί χρήσιμοι πίνακες ως παράρτημα στο τέλος του βιβλίου, καθώς επίσης και δυο παραδείγματα, ένα για τη στατιστική ανάλυση μιας σειράς μετρήσεων και ένα για την κατασκευή της βέλτιστης ευθείας που προσαρμόζεται στα πειραματικά σημεία μιας γραφικής παράστασης, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Πιστεύουμε τα δυο παραδείγματα αυτά να βοηθήσουν τους φοιτητές στην καλύτερη κατανόηση αυτών των μεθόδων, οι οποίες είναι απολύτως απαραίτητες για το εργαστηριακό μάθημα της φυσικής, αλλά και για οποιαδήποτε ανάλυση και επεξεργασία μετρήσεων σε όλους τους επιστημονικούς κλάδους.

Το παρόν σύγγραμμα συνεχίζει να επιδέχεται βελτιώσεων και οι αναγνώστες του (ιδιαίτερα οι φοιτητές) ενθαρύνονται να τις επισημάνουν στους διδάσκοντες.

Ιούνιος 2004  
Ζαχαρίας Φθενάκης  
Γιάννης Μπουρμπάκης

# Περιεχόμενα

<b>Περιεχόμενα</b>	<b>iii</b>
<b>I Θεωρία Σφαλμάτων</b>	<b>1</b>
<b>1 Εισαγωγή στη θεωρία σφαλμάτων</b>	<b>3</b>
1.1 Εισαγωγή . . . . .	3
1.1.1 Πόσο ακριβείς είναι οι μετρήσεις . . . . .	3
1.1.2 Πότε τα ψηφία ενός αριθμού που παριστάνει μια μέτρηση είναι σημαντικά . . . . .	4
1.1.3 Αδυναμία ακριβούς μέτρησης . . . . .	7
1.1.4 Εισαγωγικά συμπεράσματα . . . . .	8
1.2 Μετρήσεις . . . . .	9
1.3 Σφάλματα . . . . .	9
1.4 Σφάλμα από μία και μόνη μέτρηση . . . . .	10
1.5 Αντιμετώπιση τυχαίων σφαλμάτων . . . . .	12
1.5.1 Κανονική κατανομή . . . . .	12
1.5.2 Μέση τιμή, τυπική απόκλιση, τυπικό σφάλμα μέσης τιμής . . . . .	13
1.5.3 Κριτήριο <i>Chauvenet</i> - Απόρριψη μετρήσεων . . . . .	13
1.6 Σημαντικά ψηφία - Στρογγυλοποίηση . . . . .	15
1.7 Απόλυτο και σχετικό σφάλμα . . . . .	17
1.8 Διάδοση σφαλμάτων . . . . .	18
1.9 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων . . . . .	19
<b>II Πειραματικές Ασκήσεις</b>	<b>23</b>
<b>2 Μελέτη της τριθής</b>	<b>25</b>
2.1 Εισαγωγή . . . . .	25
2.2 Θεωρητική προσέγγιση . . . . .	26
2.3 Πειραματικό μέρος . . . . .	27
2.4 Βιβλιογραφία . . . . .	29
<b>3 Μελέτη της ελεύθερης πτώσης</b>	<b>31</b>
3.1 Εισαγωγή . . . . .	31
3.2 Ελεύθερη πτώση . . . . .	32
3.3 Το πείραμα . . . . .	32
3.4 Βιβλιογραφία . . . . .	34

<b>4 Μέτρηση ειδικής θερμότητας υλικών</b>	<b>35</b>
4.1 Θεωρητικό μέρος . . . . .	35
4.2 Πειραματικό μέρος . . . . .	39
4.2.1 Πείραμα 1: Εύρεση θερμοχωρητικότητας θερμιδομέτρου . . . . .	39
4.2.2 Πείραμα 2: Εύρεση ειδικής θερμότητας στερεών . . . . .	40
4.3 Εργασίες - αναφορά . . . . .	41
4.4 Ασκήσεις . . . . .	42
4.5 Βιβλιογραφία: . . . . .	42
<b>5 Παρατήρηση και καταγραφή φασμάτων</b>	<b>43</b>
5.1 Εισαγωγικές γνώσεις - Θεωρητικό υπόβαθρο . . . . .	43
5.1.1 Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα . . . . .	43
5.1.2 Το φασματοσκόπιο φράγματος . . . . .	44
5.1.3 Περίθλαση . . . . .	45
5.1.4 Φάσματα απορρόφησης . . . . .	45
5.1.5 Φάσματα εκπομπής . . . . .	47
5.1.6 Κβαντική θεωρία του Planck . . . . .	47
5.1.7 Ατομικό πρότυπο του <i>Bohr</i> . . . . .	48
5.2 Οργανολογία . . . . .	49
5.2.1 Χαρακτηριστικά του φασματομέτρου: . . . . .	50
5.3 Πειραματική διαδικασία - Ρύθμιση & χρήση του φασματομέτρου . . . . .	51
5.4 Πείραμα 1: Ανάλυση Φασμάτων αερίων που φωτοβολούν . . . . .	51
5.4.1 Διαδικασία Εργασίας: . . . . .	51
5.5 Πείραμα 2: Ανάλυση φασμάτων απορρόφησης, συνεχών, γραμμικών . . . . .	53
5.6 Πείραμα 3: Ανάλυση φασμάτων συγκεκριμένων χημικών ουσιών (αλάτων <i>K, Na, Ba, Cu</i> και <i>Sr</i> ) . . . . .	54
5.7 Ασκήσεις - Προβλήματα . . . . .	55
5.8 Πείραμα 4: Φασματοφωτόμετρο - Γωνιόμετρο . . . . .	57
5.8.1 Σκοπός . . . . .	57
5.8.2 Θεωρητικό μέρος . . . . .	58
5.8.3 Πειραματικό μέρος . . . . .	59
5.9 Βιβλιογραφία . . . . .	60
<b>6 Μετατροπή της ηλιακής ενέργειας σε ηλεκτρική</b>	<b>61</b>
6.1 Ηλιακή ενέργεια . . . . .	61
6.2 Παγιδεύοντας την Ηλιακή ενέργεια . . . . .	62
6.2.1 Μετατρέποντας την Ηλιακή ενέργεια σε άλλες μορφές . . . . .	62
6.2.2 Λειτουργία των Ηλιακών κυττάρων <sup>1</sup> . . . . .	63
6.2.3 Δυνατότητες φωτοβολταϊκών κυττάρων . . . . .	66
6.3 Πειραματικό μέρος . . . . .	67
6.4 Βιβλιογραφία . . . . .	70

<sup>1</sup>Η παράγραφος αυτή μπορεί να παραληφθεί σε πρώτη ανάγνωση

<b>7 Ηλεκτρόλυση του νερού</b>	<b>71</b>
7.1 Εισαγωγή . . . . .	71
7.2 Πειραματικό μέρος . . . . .	72
7.3 Επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων . . . . .	72
7.4 Βιβλιογραφία . . . . .	74
<b>8 Μπαταρία Υδρογόνου</b>	<b>75</b>
8.1 Εισαγωγή . . . . .	75
8.1.1 Μπαταρίες . . . . .	75
8.1.2 Κύτταρα καυσίμων (fuel cells) . . . . .	75
8.2 Πώς δουλεύει ένα κύτταρο καυσίμων . . . . .	76
8.3 Πρωτονιοανταλλακτικές μεμβράνες ( <i>PEMs</i> ) . . . . .	76
8.4 Πειραματικό Μέρος . . . . .	77
8.5 Ανάλυση αποτελεσμάτων - ερωτήσεις . . . . .	78
<b>9 Μέτρηση Ραδιενέργειας</b>	<b>81</b>
9.1 Εισαγωγή . . . . .	81
9.2 Θεωρητικό μέρος . . . . .	83
9.2.1 Ραδιενεργές διασπάσεις - Ενεργότητα - Χρόνος υποδιπλασιασμού - Μέσος χρόνος ζωής . . . . .	83
9.2.2 Ο Ανιχνευτής Geiger-Müller . . . . .	84
9.2.3 Ακτινοβολία υποβάθρου . . . . .	85
9.2.4 Απορρόφηση από υλικά - Θωράκιση . . . . .	85
9.3 Πειραματικό μέρος . . . . .	86
<b>A' Παραδείγματα</b>	<b>89</b>
A.1 Στατιστική μελέτη μιας σειράς μετρήσεων . . . . .	89
A.2 Προσαρμογή με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων . . . . .	92
<b>B' Πίνακες</b>	<b>95</b>
B.1 Προθέματα για τις δυνάμεις του 10 . . . . .	95
B.2 Πυκνότητες διαφόρων ουσιών . . . . .	95
B.3 Φυσικές Σταθερές . . . . .	96
B.4 Μετατροπές μονάδων . . . . .	96
<b>Γ' Ο Περιοδικός Πίνακας των στοιχείων</b>	<b>97</b>



**Μέρος Ι**  
**Θεωρία Σφαλμάτων**





# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή στη θεωρία σφαλμάτων

### 1.1 Εισαγωγή

#### 1.1.1 Πόσο ακριβείς είναι οι μετρήσεις

Αν αναζητήσουμε την απόσταση Σητείας - Αγ. Νικολάου σε κάποιο τουριστικό οδηγό ή χάρτη θα δούμε ότι είναι  $69km$ . Θα περιμέναμε γενικά, μια απόσταση που δεν την έχουμε κατασκευάσει εμείς να είναι ακριβώς  $69km$ , να διαφέρει από ένα ακέραιο αριθμό χιλιομέτρων. Πώς είναι δυνατό μια τυχαία απόσταση να είναι ακριβώς  $69km$ ; Δε διαφέρει ούτε δέκα μέτρα πάνω ή κάτω; Ποια τρομερή νομοτέλεια κάνει μια τυχαία απόσταση, που κάλλιστα θα μπορούσε να ήταν διαφορετική (π. χ. αν τα κέντρα των δύο πόλεων δεν ήταν εκεί που είναι, αλλά λίγα μέτρα πιο μακριά από τη σημερινή τους θέση), να μετριέται ακριβώς με ένα ακέραιο αριθμό χιλιομέτρων;

Θα μου πείτε βέβαια ότι το νούμερο αυτό είναι μια προσεγγιστική τιμή της εν λόγω απόστασης και ότι δε μας ενδιαφέρει τόσο πολύ η ακριβής τιμή της, αλλά μια εικόνα του πόσο μακριά βρίσκεται ο Άγ. Νικόλαος από τη Σητεία. Αν επρόκειτο να διανύσουμε  $69$  χιλιόμετρα για να φτάσουμε μέχρι εκεί, τι θα μας πείραζε να διανύσουμε ακόμα  $300$  μέτρα ή και ένα χιλιόμετρο, αν η απόσταση δεν ήταν  $69km$  αλλά  $69.3km$  ή  $70km$  αντίστοιχα.

Δεν έχω παρά να συμφωνήσω σ' αυτή τη λογική. Θα συμφωνήσετε όμως κι εσείς μαζί μου ότι η απόσταση ανάμεσα στη Σητεία και τον Αγ. Νικόλαο ΔΕΝ είναι  $69$  χιλιόμετρα όπως λένε οι χάρτες. Μπορεί να είναι  $69.3456729078$  χιλιόμετρα, μπορεί να είναι  $69,7780987976$  χιλιόμετρα, μπορεί να είναι  $69,575435435$  χιλιόμετρα, μπορεί να είναι οτιδήποτε άλλο, αλλά σίγουρα δεν είναι  $69$  χιλιόμετρα ακριβώς.

Ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε πόση είναι η απόσταση Γης - Ήλιου. Αν ανοίξουμε ένα βιβλίο φυσικής και ψάξουμε στους σχετικούς πίνακες, θα δούμε ότι η απόσταση Γης - Ήλιου είναι  $149 \times 10^6 km$  δηλαδή εκατό σαράντα εννέα εκατομμύρια χιλιόμετρα. Ακολουθώντας τον ίδιο συλλογισμό με τον παραπάνω, δεν θα μπορούσαμε να πιστέψουμε ότι η απόσταση Γης - Ήλιου είναι ακριβώς τόση. Μπορεί να είναι λίγο παραπάνω ή λίγο παρακάτω απ' αυτή την τιμή, αλλά είναι απίθανο να είναι ακριβώς  $149 \times 10^6 km$ . Όμως, όπως είπαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, και ένα χιλιόμετρο να διαφέρει πάνω ή κάτω, δε χάθηκε κι ο κόσμος.

Όμως μισό λεπτό ...

Είπαμε προηγουμένως ότι αν το  $69$  γίνει  $70$  (δηλαδή  $1km$  διαφορά) δε χάθηκε ο

κόσμος, σε ότι αφορά τη χιλιομετρική απόσταση Σητείας - Αγ. Νικολάου. Αν το 149 γίνει π.χ. 150 η διαφορά δε θα είναι μόνο ένα χιλιόμετρο. Θα είναι  $10^6 km$  (δηλαδή ένα εκατομμύριο χιλιόμετρα). Άλλο μια διαφορά ενός χιλιομέτρου κι άλλο το ένα εκατομμύριο χιλιόμετρα. Αντιλαμβάνεστε ότι η απόσταση αυτή είναι δεκάδες χιλιάδες φορές πολλαπλάσια της απόστασης Αγ. Νικολάου - Σητείας. Είναι ακόμα μεγαλύτερη και από την περίμετρο της Γης που είναι περίπου  $8 \times 10^4 km$  (δηλαδή μόλις ογδόντα χιλιάδες χιλιόμετρα). Μπορεί μια τόσο μεγάλη απόσταση να θεωρηθεί ασήμαντη και να λέμε 'τι 149;', 'τι 150;'; Αν είναι ασήμαντη μια τέτοια απόσταση τότε πώς είναι δυνατό να θεωρούμε σημαντικά τα χιλιοστά του μέτρου; Και τελικά πότε είναι μια απόσταση σημαντική και πότε ασήμαντη;

Μια πολύ απλή, σύντομη και περιεκτική απάντηση θα μπορούσατε να δώσετε και μόνοι σας στον εαυτό σας, αν σκεφτόσαστε ότι μια βίδα που κατασκευάζεται ένα χιλιοστό μεγαλύτερη από μια άλλη βίδα, δε χωράει να βιδώσει στο ίδιο παξιμάδι με τη δεύτερη βίδα. Επομένως το ένα χιλιοστό Σ' ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ είναι πολύ σημαντικό. Όμως αν δυο βίδες διαφέρουν μόνο κατά ένα εκατοστό του χιλιοστού με βεβαιότητα βιδώνουν στο ίδιο παξιμάδι και επομένως Σ' ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ η διαφορά ενός εκατοστού του χιλιοστού είναι ασήμαντη.

Κατά παρόμοιο τρόπο στη χιλιομετρική απόσταση μεταξύ Σητείας - Αγ. Νικολάου η διαφορά μερικών εκατοντάδων μέτρων δεν είναι και τόσο σημαντική Γ' ΑΥΤΗ ΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ. Όμως αν ένας χάρτης έλεγε ότι η απόσταση είναι  $80 km$  κι ένας άλλος έλεγε ότι είναι  $69 km$  θα μου λέγατε ότι ένας από τους δύο έχει λάθος. Αλλά και ΣΤΗΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ της απόστασης Γης - Ήλιου μερικές εκατοντάδες χιλιάδες χιλιόμετρα δε θα ήταν ιδιαίτερα σημαντικά. Άλλο όμως να λέμε ότι η απόσταση Γης - Ήλιου είναι  $149 \times 10^6 km$  κι άλλο να λέμε ότι είναι π.χ.  $180 \times 10^6 km$ .

Όπως βλέπουμε, μια απόσταση μπορεί να είναι σημαντική ή ασήμαντη, ανάλογα με την περίπτωση. Πώς όμως μπορούμε να το ποσοτικοποιήσουμε αυτό και να κατασκευάσουμε ένα κανόνα με τον οποίο να μπορούμε αμέσως να ξεχωρίσουμε πότε μια ποσότητα είναι σημαντική και πότε όχι για κάθε περίπτωση χωρίς να σκεφτόμαστε τι πρέπει να κάνουμε σε κάθε διαφορετική περίπτωση;

### 1.1.2 Πότε τα ψηφία ενός αριθμού που παριστάνει μια μέτρηση είναι σημαντικά

Ας ξεκινήσουμε με μια διαπίστωση. Όλες οι αποστάσεις για τις οποίες μιλήσαμε, τις εκφράσαμε με δύο ή τρία ψηφία. (π.χ. απόσταση Αγ. Νικολάου - Σητείας, με δύο ψηφία, απόσταση Γης - Ήλιου με τρία ψηφία, διατομή μιας βίδας με ένα ή δύο ψηφία). Αυτό δεν είναι τυχαίο και θα το καταλάβετε στη συνέχεια.

Αν σας ζητούσαν να σχεδιάσετε υπό κλίμακα  $1/10000000000 = 1/10^{11}$  την απόσταση Γης - Ήλιου (δηλαδή κάθε μέτρο που θα σχεδιάζατε, θα αντιστοιχούσε σε  $10^{11}$  πραγματικά μέτρα), θα έπρεπε πάνω στο χαρτί να τοποθετήσετε τη Γη σε απόσταση  $149 cm$  μακριά από τον Ήλιο. Επειδή ο χάρακας ενός σχεδιαστηρίου σας παρέχει τη δυνατότητα να σχεδιάσετε την απόσταση αυτή με ακρίβεια χιλιοστού, (δηλαδή μπορείτε να ξεχωρίσετε δυο αποστάσεις που διαφέρουν ένα χιλιοστό), τα  $149 cm$  που θα σχεδιάζατε, θα μπορούσατε σαφώς να τα ξεχωρίσετε από τα  $150 cm$  (που θα συμβόλιζαν τα  $150 \times 10^6 km$ ). Σε μια τέτοια αναπαράσταση λοιπόν, άλλο θα ήταν τα 149 και άλλο τα  $150 \times 10^6 km$  που θα αναπαριστούσατε στο χαρτί. Σ' αυτή την περίπτωση μάλιστα θα μπορούσατε σαφώς να ξεχωρίσετε και τα  $149.1 \times 10^6 km$  (που θα αντιστοιχούσαν

στα  $149.1\text{cm}$ ), και τα  $149.2 \times 10^6\text{km}$  (που θα αντιστοιχούσαν στα  $149.2\text{cm}$ ), και τα  $149.7 \times 10^6\text{km}$  (που θα αντιστοιχούσαν στα  $149.7\text{cm}$ ). Δε θα μπορούσατε όμως να ξεχωρίσετε π.χ. τα  $149.225 \times 10^6\text{km}$ , που θα αντιστοιχούσαν πάνω στο χαρτί στην απόσταση  $149.225\text{cm}$ . Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι η αληθινή απόσταση Γης - Ήλιου ήταν  $149.225 \times 10^6\text{km}$  και σεις θέλατε να την παραστήσετε στο χαρτί, με την κλίμακα που χρησιμοποιήσαμε αρχικά (δηλ.  $1/10^{11}$ ), δε θα μπορούσατε να το κάνετε. Αν παρ' όλα αυτά το κάνατε με κάποιο τρόπο και στη συνέχεια ζητούσατε από κάποιο να μετρήσει με το χάρακα την απόσταση πάνω στο χαρτί, που θα αντιστοιχούσε σ' αυτή την πραγματική απόσταση, μάλλον θα έβρισκε κάτι μεταξύ  $149.2 \times 10^6\text{km}$  με  $149.3 \times 10^6\text{km}$ , αφού με το μάτι είναι αδύνατο να ξεχωρίσουμε μια απόσταση που είναι μικρότερη από  $1$  (ή  $0.5\text{mm}$ ), χρησιμοποιώντας το χάρακα. Έτσι δε θα έβρισκε την απόσταση  $149.225 \times 10^6\text{km}$  που εσείς σχεδιάσατε. Κατά συνέπεια θα ήταν αδύνατο να μετρήσει κανείς αυτή την απόσταση με το χάρακα.

Όπως βλέπετε η δυσκολία προκύπτει όταν προσπαθήσατε να μετρήσετε κάτι με περισσότερα ψηφία απ' όσα σας επιτρέπει το όργανο μέτρησής σας. Στην προκειμένη περίπτωση εσείς μπορείτε να μετρήσετε, πάνω στο χαρτί, αποστάσεις από δύο μέτρα (τόσο θα μπορούσε να ήταν το μήκος ενός μετρητικού χάρακα (μέτρου) σε ένα σχεδιαστήριο), μέχρι ένα χιλιοστό (τόσο είναι το ελάχιστο μήκος που μπορείτε να μετρήσετε με το χάρακα). Δηλαδή την κάθε μέτρηση μπορείτε να την παραστήσετε με το πολύ τέσσερα ψηφία. Όσο μικρή ή μεγάλη και αν κάνατε λοιπόν την κλίμακα δεν θα μπορούσατε να μετρήσετε μια απόσταση που να χρειάζεται περισσότερα από τέσσερα ψηφία. Το ίδιο θα συνέβαινε αν προσπαθούσατε να παραστήσετε στο χαρτί ένα οποιοδήποτε άλλο μήκος υπό μια διαφορετική κλίμακα. Επομένως ακόμα και αν η πραγματική τιμή του μήκους, που εσείς θα προσπαθήσατε να μετρήσετε, είναι  $149.225\text{cm}$  εσείς δεν θα μπορείτε να δείτε με το χάρακα του σχεδιαστηρίου οποιαδήποτε απόσταση μικρότερη από  $1\text{mm}$ . Άρα αυτή την απόσταση θα τη δείτε σαν  $149.2\text{cm}$  ή  $149.3\text{cm}$ .

Κατά παρόμοιο τρόπο, όλα τα όργανα μέτρησης έχουν ένα εύρος μέσα στο οποίο μπορούν να μετρήσουν (δηλαδή μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή). Μέσα σ' αυτό το εύρος τιμών, κάθε μέτρηση μπορεί να παρασταθεί με ένα μικρό και συγκεκριμένο πλήθος ψηφίων. Έτσι με ένα χάρακα σχεδιαστηρίου μπορούμε να μετρήσουμε αποστάσεις από δύο μέτρα μέχρι ένα χιλιοστό και επομένως να αποδώσουμε τη μέτρηση με τέσσερα το πολύ ψηφία. Με ένα παχύμετρο μπορούμε να μετρήσουμε πάχη από  $20\text{cm}$  μέχρι  $0.1\text{mm}$  και επομένως να αποδώσουμε μια μέτρηση πάλι με τέσσερα το πολύ ψηφία. Με ένα μικρόμετρο μπορούμε να μετρήσουμε διατομές από  $2.5\text{cm}$  μέχρι  $0.01\text{mm}$  και επομένως πάλι με τέσσερα το πολύ ψηφία μπορεί να αποδοθεί αυτή η μέτρηση. Μια μετροταινία που χρησιμοποιούν οι πολιτικοί μηχανικοί μπορεί να μετρήσει αποστάσεις από  $20\text{m}$  μέχρι  $1\text{cm}$  (και πάλι μέχρι τέσσερα ψηφία). Ο χιλιομετρητής που έχουν τα αυτοκίνητα στο καντράν μπορεί να μετρήσει συνήθως από  $999.9\text{km}$  μέχρι  $0.1\text{km} = 100\text{m}$ , δηλαδή και πάλι μέχρι τέσσερα ψηφία.

Όπως βλέπετε, σε όλες τις κλίμακες, πάντα ένας περιορισμένος αριθμός ψηφίων μπορεί να μετρηθεί. Στα προηγούμενα παραδείγματα έτυχε να είναι τέσσερα τα ψηφία αυτά για όλα τα όργανα μέτρησης των παραδειγμάτων. Γενικά όμως μπορεί να είναι άλλοτε περισσότερα, άλλοτε λιγότερα.

Θα μπορούσε βεβαίως κανείς να ρωτήσει τι γίνεται αν αθροίσουμε τις μετρήσεις διαδοχικών μηκών προκειμένου να μετρήσουμε μια απόσταση που θα είναι πολλαπλάσια της μέγιστης μέτρησης που μπορεί να κάνει ο χάρακάς μας. Δεν αυξάνουμε έτσι το πλήθος των ψηφίων με τα οποία μπορούμε να αποδώσουμε αυτή τη μέτρηση; Όπως

Θα δείτε παρακάτω, αυτό είναι άσκοπος κόπος γιατί στην κάθε μέτρηση υπεισέρχονται τα λεγόμενα τυχαία σφάλματα, τα οποία επίσης προστίθενται για να δώσουν το τελικό σφάλμα. Το σφάλμα κάθε μέτρησης είναι τουλάχιστον ίσο με την ελάχιστη τιμή που μπορεί να μετρήσει ένα όργανο. Έτσι σε ένα μετρητικό χάρακα μήκους ενός μέτρου, που μετράει μέχρι και χιλιοστά, το λεγόμενο 'σφάλμα του οργάνου', που θα δούμε παρακάτω, είναι ένα χιλιοστό. Κάθε τέτοιος χάρακας μπορεί να μετρήσει μια απόσταση (ενός μέτρου) με τέσσερα το πολύ ψηφία. Αν λοιπόν μετρήσουμε μια απόσταση 10 μέτρων μετρώντας 10 φορές διαδοχικές αποστάσεις ενός μέτρου, τότε θα καταφέρουμε να μετρήσουμε την απόσταση των 10 μέτρων, αλλά έτσι θα δεκαπλασιαστεί και το σφάλμα της μέτρησης. Έτσι η μέτρηση των 10 μέτρων, κατ' αυτό τον τρόπο, θα έχει σφάλμα  $10 \times 1mm = 10mm$ . Έτσι μια διαφορά λιγότερο από  $10mm$  δεν μπορούμε να την αντιληφθούμε με μια τέτοια μέτρηση. Με λιγότερα λόγια, μια απόσταση 10 μέτρων και 2 χιλιοστών δεν μπορούμε να την ξεχωρίσουμε από μια απόσταση 10 μέτρων και 3 χιλιοστών (Μπορείτε να κάνετε τη δοκιμή στο σπίτι σας για να πειστείτε). Έτσι για αποστάσεις πάνω από 10 μέτρα δεν μπορούμε να μετράμε διαφορές μικρότερες από  $10mm$ . Επομένως, προς μεγάλη μας απογοήτευση, οποιαδήποτε μέτρηση μ' αυτή τη μέθοδο, πάνω από 10 μέτρα, δε θα μπορεί να αποδοθεί με 5 ψηφία, αλλά πάλι με 4.

ΣΕ ΚΑΘΕ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ λοιπόν (είτε μετράμε αποστάσεις άστρων, είτε αποστάσεις πόλεων, είτε τη διατομή μιας βίδας, σημασία έχει με πόσα ψηφία μπορούμε να αποδώσουμε τη μέτρηση. Καμιά σημασία δεν έχει αν τα μικρότερης αξίας ψηφία, που δεν μπορούμε να τα περιλάβουμε στη μέτρησή μας, λόγω της αδυναμίας των οργάνων μέτρησης, παριστάνουν εκατομμύρια χιλιόμετρα ή αν παριστάνουν δέκατα του χιλιοστού. Μια μέτρηση είναι ισοδύναμης αξίας με μια άλλη αν περιγράφεται με το ίδιο πλήθος ψηφίων. Για να είμαστε πιο ακριβής, δύο μετρήσεις είναι ισοδύναμης αξίας αν περιγράφονται με το ίδιο πλήθος ΣΗΜΑΝΤΙΚΩΝ ΨΗΦΙΩΝ.

Σημαντικά ψηφία μιας μέτρησης είναι όλα τα ψηφία ενός αριθμού που παριστάνει μια μέτρηση, που προέρχονται από την ίδια τη μέτρηση ή από υπολογισμούς μετρήσεων.

Έτσι η μέτρηση απόστασης 10 εκατοστών, με ένα χάρακα που μπορεί να διακρίνει μέχρι και το χιλιοστό, περιέχει τρία σημαντικά ψηφία, αφού στη διαδικασία μέτρησης μετρήθηκαν και τα χιλιοστά. Επομένως η μέτρηση δε ήταν  $10cm$  αλλά  $10.0cm$  και έχει τρία σημαντικά ψηφία. Γράφοντας μ' αυτή τη μορφή τον αριθμό υποδηλώνουμε ότι μετρήθηκαν και τα χιλιοστά. Δηλώνουμε δηλαδή ότι αυτό που μετρήσαμε ήταν χιλιοστά και όχι εκατοστά. Μετρήσαμε 100 χιλιοστά και όχι 10 εκατοστά. Μπορεί επομένως τα σύμβολα  $10cm$  και  $10.0cm$  να έχουν την ίδια μαθηματική αξία, αλλά για μια εργαστηριακή μέτρηση είναι τελείως διαφορετικά αντικείμενα. Το μεν πρώτο δηλώνει ότι η μέτρηση έγινε σε εκατοστά και έχει δυο σημαντικά ψηφία, το δε δεύτερο δηλώνει ότι η μέτρηση έγινε σε χιλιοστά και έχει τρία σημαντικά ψηφία. Το μεν πρώτο δηλώνει ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε κάτι μικρότερο από εκατοστό, το δε δεύτερο δηλώνει ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε κάτι λιγότερο από χιλιοστό. Έτσι η μέτρηση  $10cm$ , που έχει μόνο δύο σημαντικά ψηφία, είναι μέτρησης μικρότερης αξίας (ή αν θέλετε μικρότερης ακρίβειας), από τη μέτρηση  $10.0cm$ , που παριστάνει τον ίδιο αριθμό, αλλά έχει περισσότερα (τρία) σημαντικά ψηφία.

Κατ' αναλογία με όλα αυτά, η μέτρηση  $149 \times 10^6 km$  της απόστασης Γης - Ήλιου είναι πιο ακριβής από τη μέτρηση  $69km$  της απόστασης Αγ. Νικολάου - Σητείας, κι αν είναι ασήμαντη για την πρώτη, κάθε ποσότητα μερικών εκατοντάδων χιλιάδων χιλιομέτρων, τη ίδια στιγμή, που η ίδια η δεύτερη μέτρηση είναι ασήμαντο υποπολλαπλασίο

της ασήμαντης αυτής ποσότητας για την πρώτη μέτρηση.

### 1.1.3 Αδυναμία ακριβούς μέτρησης

Είδαμε παραπάνω ότι οι μετρήσεις οι οποίες γίνονται δεν έχουν απόλυτη ακρίβεια και ότι η ακρίβεια μιας μέτρησης είναι συνάρτηση των σημαντικών ψηφίων με τα οποία την κάνουμε.

Όμως ανεξάρτητα από τον αν είναι ή όχι ακριβείς οι μετρήσεις που κάνουμε, τελικά πόση είναι η απόσταση Αγ. Νικολάου - Σητείας, ακριβώς;

Ο μόνος τρόπος για να δούμε πόση είναι αυτή η απόσταση είναι να τη μετρήσει κάποιος. Κάνοντας μια εκδρομή από τη Σητεία προς τον Αγ. Νικόλαο θα συναντήσετε σε κάποια σημεία στην άκρη του δρόμου διάφορες ταμπελίτσες με χιλιομετρικές ενδείξεις, που δείχνουν, ανά χιλιόμετρο, την απόσταση που απέχετε από την πρωτεύουσα του νομού στον οποίο βρίσκεστε. Επομένως κάποιος ήδη έχει μετρήσει αυτή την απόσταση, κι έτσι ανά χιλιόμετρο μπορούμε να ξέρουμε πόσο απέχουμε απ' την πρωτεύουσα του νομού.

Θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί πώς μετρήθηκαν αυτές οι αποστάσεις και πώς μπορεί κανείς να είναι σίγουρος ότι η ένδειξη που φέρουν αυτές οι ταμπελίτσες είναι η αληθινή απόστασή τους από την πρωτεύουσα του νομού ή είναι μια προσέγγιση αυτής;

Ένας χονδροειδής τρόπος να το ελέγξει κανείς είναι να μετρήσει πόσα βήματα χρειάζονται από τη μια ταμπελίτσα για να φτάσει στην άλλη. Αν περπατάει με σταθερό μήκος βήματος μπορεί να μετρήσει το μήκος του βήματος επί τον αριθμό των βημάτων που θα κάνει (περπατώντας από τη μια ταμπελίτσα μέχρι την άλλη) και από το γινόμενο αυτό να βρει την απόσταση. Αν έβρισκε την απόσταση αυτή πολύ διαφορετική από  $1km$  τότε θα μπορούσε κάλλιστα να μην πιστέψει αυτές τις χιλιομετρικές ενδείξεις. Αν όμως η απόσταση ήταν περίπου  $1km$  θα έπρεπε να καταφύγει σε πιο αξιόπιστες μεθόδους μέτρησης, γιατί όπως και να το κάνουμε, το μήκος του βήματος δεν μπορεί να είναι σταθερό. Έτσι υποχρεωτικά θα έχουμε αποκλίσεις από την πραγματική τιμή που πάμε να μετρήσουμε.

Για να κάνουμε τη μέτρηση πιο αξιόπιστη θα μπορούσαμε, αντί για αριθμό βημάτων, να χρησιμοποιήσουμε ένα μέτρο σαν αυτά που χρησιμοποιούν οι διάφοροι τεχνίτες όταν θέλουν να μετρήσουν αποστάσεις. Θα κάνουμε λοιπόν την ίδια δουλειά, αλλά αντί να μετράμε βήματα, θα μετρήσουμε πόσες φορές πρέπει να τοποθετήσουμε το μέτρο στη διαδρομή μας, έτσι ώστε να καλυφθεί ολόκληρο το διάστημα από τη μια ταμπελίτσα μέχρι την άλλη. Μ' αυτή τη μέτρηση, το πιθανότερο είναι να βρούμε μια τιμή κοντά στο  $1km$ . Όμως και αυτή η μέτρηση δε θα είναι και πολύ αξιόπιστη γιατί έτσι όπως θα τοποθετούμε το μέτρο μπορεί να ξεφεύγει η κατεύθυνσή του από την κατεύθυνση της ευθείας ανάμεσα στις δύο ταμπελίτσες, είτε επειδή θα μας ξεφεύγει λίγο αριστερά ή δεξιά, είτε επειδή οι πιθανές ανωμαλίες του εδάφους θα το μετακινούν λίγο πάνω ή κάτω. Για να αποφύγουμε αυτές τις πιθανές εκτροπές του μέτρου από την ευθεία μπορούμε, αντί για μέτρο να χρησιμοποιήσουμε μια μετροταινία, η οποία μπορεί να μετρήσει μήκος της τάξεως των 20 - 50 μέτρων. Έτσι οι πιθανές εκτροπές από την ευθεία θα είναι λιγότερο σημαντικές αφού θα γίνονται κάθε 20 - 50 μέτρα και όχι κάθε μέτρο. Όμως η μετροταινία δεν είναι άκαμπτη όπως ένα ξύλινο μέτρο κι έτσι επίσης μπορεί να έχει αποκλίσεις από την ευθεία λόγω αυτής της ευκαμψίας της. Αν κρατάμε τα δύο άκρα της μετροταινίας στον αέρα τότε η μετροταινία θα κάνει μια 'κοιλιά' λόγω του ίδιου της του βάρους. Αν προσπαθήσουμε να την τεντώσουμε

για να αποφύγουμε αυτή την 'κοιλιά' τότε λόγω και της ελαστικότητας που έχει, θα επιμηκυνθεί και η επιμήκυνση αυτή θα αλλοιώσει τη μέτρηση.

Ένα άλλο πρόβλημα, που δε λάβαμε υπ' όψη μας, είναι πώς θα μετρήσουμε τις αποστάσεις πάνω στις στροφές. Αν μετρήσουμε από τη μέσα μεριά της στροφής οι αποστάσεις θα είναι μικρότερες, ενώ από την έξω μεριά μεγαλύτερες. Από ποια μεριά λοιπόν να μετρήσουμε; Θα μπορούσε κανείς να προτείνει να μετρήσουμε αποστάσεις από τη μέση του δρόμου. Όμως και τότε θα πρέπει να καθορίσουμε πού ακριβώς βρίσκεται η μέση του δρόμου. Έτσι η μέτρηση γίνεται ακόμα πιο περίπλοκη και πιο δύσκολη.

Ακόμα και με τα πιο ακριβή όργανα της τοπογραφίας, δεν μπορούμε να επιτύχουμε μια απόλυτα ακριβής μέτρηση μήκους, γιατί και σ' αυτή την περίπτωση υπεισέρχονται διάφοροι παράγοντες που επηρεάζουν τη μέτρηση. Πέρα απ' όλους τους άλλους παράγοντες που μπορεί να επηρεάζουν δυσμενώς την ακρίβεια μιας μέτρησης, τα ίδια τα όργανα της μέτρησης δε μας επιτρέπουν να μετρήσουμε μικρότερες ποσότητες από μια συγκεκριμένη ελάχιστη τιμή που καθορίζει, όπως θα πούμε παρακάτω, το σφάλμα του οργάνου.

Τελικά δεν υπάρχει κανένας τρόπος να έχουμε μια απόλυτα ακριβής μέτρηση; Η απάντηση είναι ΟΧΙ. Δεν μπορούμε να έχουμε μια απόλυτα ακριβής μέτρηση. Πάντα ότι και να κάνουμε οι μετρήσεις μας θα είναι ανακριβείς. Οφείλουμε λοιπόν να το παραδεχτούμε αυτό και να δούμε τι μπορούμε να κάνουμε από κει και πέρα. Το ότι δεν μπορούμε να κάνουμε μια απόλυτα ακριβής μέτρηση δεν σημαίνει ότι δεν μπορούμε να κάνουμε μετρήσεις ικανές να μας επιτρέψουν να κάνουμε τη δουλειά μας. Αυτό θα πρέπει τελικά να είναι το ζητούμενό μας από δω και πέρα και όχι να ψάχνουμε την απόλυτα ακριβής μέτρηση, μιας και αυτή δεν υπάρχει. Θα πρέπει δηλαδή να βλέπουμε κάθε φορά πόσο ακριβής μας ενδιαφέρει να είναι μια μέτρηση και αναλόγως να επιστρατεύουμε τα κατάλληλα όργανα που θα μας επιτρέψουν να επιτύχουμε την επιθυμητή ακρίβεια. Έτσι στη μέτρηση της απόστασης Αγ. Νικολάου - Σητείας μας είναι αρκετός ένας χιλιομετρητής που είναι προσαρμοσμένος στο καντράν κάθε αυτοκινήτου. Δε μας ενδιαφέρει αν χάσουμε και μερικές δεκάδες ή εκατοντάδες μέτρα. Αν πάλι μας ενδιαφέρει μια μέτρηση με μεγαλύτερη ακρίβεια θα επιστρατεύσουμε άλλες μεθόδους και ενδεχομένως άλλα όργανα μέτρησης που θα μας επιτρέψουν μια πιο ακριβής μέτρηση. Αντίθετα, για να μετρήσουμε τη διατομή μιας βίδας δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα υποδεκάμετρο, αφού με το υποδεκάμετρο δεν μπορούμε να διακρίνουμε αποστάσεις μικρότερες από  $1mm$ . Μπορούμε όμως να τη μετρήσουμε με ένα παχύμετρο το οποίο μπορεί να μετρήσει μήκος μέχρι και  $0.1mm$ . Έτσι μια βίδα διατομής  $7.5345mm$  το παχύμετρο θα δείξει  $7.5mm$ , η μέτρηση δε θα είναι ακριβής αλλά εμείς θα κάνουμε τη δουλειά μας αφού θα ξέρουμε ότι τη βίδα αυτή μπορούμε να τη βιδώσουμε σε παξιμάδι διατομής  $7.5mm$ . Αν για κάποιο άλλο λόγο θέλουμε να μετρήσουμε την βίδα με ακόμα μεγαλύτερη ακρίβεια, τότε πάλι θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άλλα όργανα μέτρησης που να μας επιτρέψουν μεγαλύτερη ακρίβεια στη μέτρηση. Πάλι όμως η τιμή που θα βρούμε δε θα είναι η απόλυτα ακριβής.

#### 1.1.4 Εισαγωγικά συμπεράσματα

Απ' όλες αυτές τις εισαγωγικές σκέψεις μπορούμε να καταλήξουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα

1ον Καμιά μέτρηση δεν είναι ακριβής, γιατί δεν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε



μια απόλυτα ακριβής μέτρηση. Επομένως όλες οι μετρήσεις συνοδεύονται από κάποιο σφάλμα.

2ον Επειδή δεν μπορούμε με κανένα τρόπο να αποφύγουμε τα σφάλματα των μετρήσεων δε θα μπορέσουμε ποτέ να μάθουμε την αληθινή τιμή ενός μεγέθους που προσπαθούμε να το μετρήσουμε. Μην μπορώντας να κάνουμε κάτι καλύτερο, αρκούμαστε στο να μετρήσουμε μια ποσότητα με τουλάχιστον τόση ακρίβεια, όση χρειαζόμαστε για να κάνουμε τη δουλειά μας.

3ον Η ακρίβεια μιας μέτρησης εξαρτάται από τα όργανα μέτρησης και τις μεθόδους που χρησιμοποιούμε για να κάνουμε τη μέτρηση. Εκφράζεται μέσω του αριθμού σημαντικών ψηφίων που χρησιμοποιούνται για να γραφεί. Όσα περισσότερα είναι τα σημαντικά ψηφία με τα οποία γράφεται μια μέτρηση, τόσο πιο ακριβής είναι.

4ον Η ακρίβεια μιας μέτρησης εμφανίζεται μέσα από τα σημαντικά ψηφία με τα οποία γράφεται και είναι τόσο μεγαλύτερη, όσα περισσότερα είναι τα σημαντικά της ψηφία.

## 1.2 Μετρήσεις

Μέτρηση είναι κάθε διαδικασία που κάνουμε προκειμένου να προσδιορίσουμε την τιμή ενός μεγέθους.

Χωρίζουμε τις μετρήσεις σε δύο κατηγορίες

- Άμεσες Μετρήσεις. Είναι οι μετρήσεις που γίνονται με απευθείας χρήση των οργάνων μέτρησης. (Π.χ. η μέτρηση της διατομής της βίδας με το παχύμετρο)
- Έμμεσες Μετρήσεις. Είναι οι μετρήσεις που χρησιμοποιούν άλλες μετρήσεις και τη βοήθεια κάποιου μαθηματικού τύπου, για να προσδιορίσουν την τιμή μιας ποσότητας. (Π.χ. για τη μέτρηση της επιφάνειας της διατομής της βίδας δεν υπάρχει όργανο που να μετράει απευθείας επιφάνειες. Χρησιμοποιούμε λοιπόν τη σχέση  $S = \pi R^2$  όπου  $R$  η ακτίνα του κύκλου και επειδή η ακτίνα είναι ίση με τη μισή διατομή που την έχουμε μετρήσει με άμεση μέτρηση, μπορούμε με τη βοήθεια του τύπου να μετρήσουμε την επιφάνεια έμμεσα)

## 1.3 Σφάλματα

Αφού καμιά μέτρηση δεν είναι ακριβής αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την αληθινή τιμή του μεγέθους που προσπαθούμε να μετρήσουμε. Μπορούμε όμως να τη γνωρίζουμε μέσα σε κάποια όρια ακρίβειας ή, (αν θέλετε), με κάποιο σφάλμα, κάνοντας μετρήσεις. Επομένως οι μετρήσεις θα έχουν αποκλίσεις από την αληθινή τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Τα όρια ανάμεσα στα οποία βρίσκονται αυτές οι αποκλίσεις, καθορίζουν τα σφάλματα των μετρήσεων.

Σφάλμα λοιπόν είναι το μέτρο της αβεβαιότητας με την οποία μια μέτρηση προσεγγίζει την αληθινή τιμή του μεγέθους που μετράμε.

Αν επομένως για το μέγεθος  $X$  κάνουμε μια μέτρηση  $x$ , θα υπάρχει μια περιοχή γύρω απ' αυτή τη μέτρηση μέσα στην οποία θα βρίσκεται η αληθινή τιμή του μεγέθους που μετράμε. Αν λοιπόν  $\delta x$  είναι το σφάλμα με το οποίο κάνουμε μια μέτρηση, αυτό σημαίνει ότι η αληθινή τιμή του μεγέθους που μετράμε βρίσκεται μέσα στο διάστημα  $[x - \delta x, x + \delta x]$ . Αυτό μπορούμε να το γράψουμε σαν  $X = x \pm \delta x$  και θα εννοούμε

ότι η αληθινή τιμή  $X$  του μεγέθους που μετράμε είναι κάπου μέσα στο διάστημα  $[x - \delta x, x + \delta x]$ .

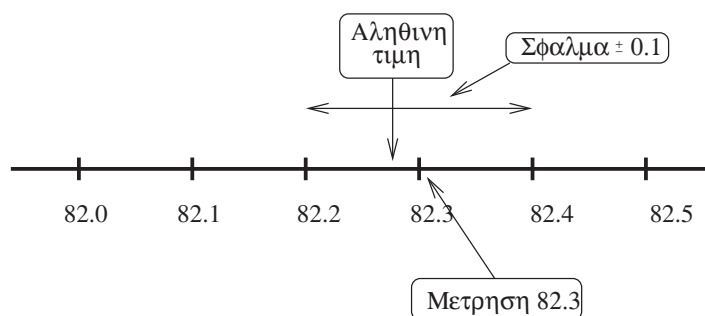
Ξεχωρίζουμε τρεις κατηγορίες σφαλμάτων ανάλογα με τον τρόπο τον οποίο εμφανίζονται

- Ακούσια σφάλματα ή λάθη. Είναι εκείνα που προέρχονται από λανθασμένη ανάγνωση ή καταγραφή εκ μέρους αυτού που κάνει το πείραμα. Αυτά τα σφάλματα μπορούν να αποφευχθούν αν δοθεί η ανάλογη προσοχή απ' αυτούς που εκτελούν το πείραμα.
- Συστηματικά σφάλματα. Είναι αυτά που με συστηματικό τρόπο υπεισέρχονται στις μετρήσεις και επηρεάζουν κατά τον ίδιο τρόπο όλες τις μετρήσεις. Τέτοια σφάλματα μπορεί να οφείλονται
  - { Σε λανθασμένη βαθμονόμηση των οργάνων μέτρησης (π.χ. αν η θερμοκρασία είναι  $20^{\circ}C$  το θερμόμετρο να έχει χαλάσει και συστηματικά γι αυτή τη θερμοκρασία να δείχνει  $25^{\circ}C$ )
  - { Σε προσέγγιση στη μαθηματική σχέση που προσδιορίζει μια έμμεση μέτρηση (π.χ. να μετρήσει την επιτάχυνση της βαρύτητας χωρίς να λάβει υπ' όψιν την αντίσταση του αέρα, έχοντας θεωρήσει ότι ισχύουν οι εξισώσεις της ελεύθερης πτώσης)
  - { Σε άλλους εξωγενείς παράγοντες που επηρεάζουν τη μέτρηση (π.χ. κατά τη διάρκεια των μετρήσεών μας, οι συνθήκες του πειράματος επιβάλουν μεταβολές της θερμοκρασίας, οι οποίες επηρεάζουν τις ενδείξεις του οργάνου μέτρησης)
- Τυχαία σφάλματα Είναι σφάλματα τα οποία συνεχίζουν να υπάρχουν ακόμα κι αν έχουμε αποφύγει τα συστηματικά και τα ακούσια σφάλματα. Είναι σφάλματα που υπεισέρχονται στο πείραμα από διάφορους παράγοντες, που έχουν να κάνουν με τις ατέλειες των μεθόδων μέτρησης, με τα όργανα μέτρησης, με πιθανές ακαθόριστες μικρές μεταβολές που έχουν θεωρηθεί ως σταθερές, κ.α. Τα σφάλματα αυτά εμφανίζονται με ένα τυχαίο τρόπο, δεν μπορούν να αποφευχθούν και εμφανίζονται ακόμα και αν οι συνθήκες του πειράματος παραμένουν ακριβώς οι ίδιες. Λόγω της τυχαιότητάς τους αντιμετωπίζονται με στατιστικό τρόπο θεωρώντας ότι η διασπορά των μετρήσεων ακολουθεί μια κανονική στατιστική κατανομή γύρω από τη μέση τους τιμή.

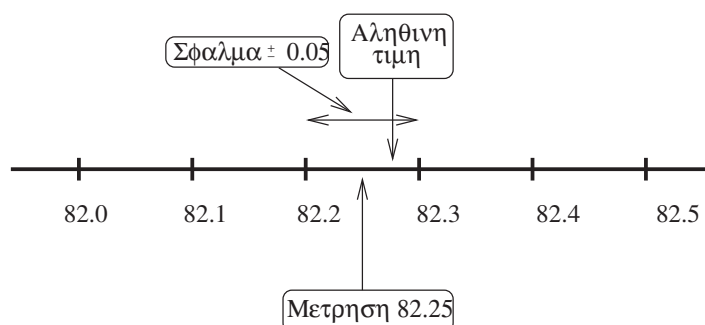
#### 1.4 Σφάλμα από μία και μόνη μέτρηση

Όπως είπαμε στην εισαγωγή, με κάθε όργανο μέτρησης μπορούμε να μετρήσουμε ένα εύρος μετρήσεων, από μια ελάχιστη μέχρι μια μέγιστη τιμή. Η ελάχιστη μέτρηση που μπορεί να κάνει ένα όργανο, συνδέεται με την αδυναμία του οργάνου μέτρησης, να μας επιτρέψει να διαβάσουμε μια μέτρηση μικρότερη από την ελάχιστη δυνατή. Έτσι σ' ένα χάρακα είναι αδύνατο να μπορούμε να διαβάσουμε μια μέτρηση μικρότερη από  $1mm$  ή στην καλύτερη περίπτωση  $0.5mm$ . Έτσι η αληθινή τιμή ενός μεγέθους που προσπαθούμε να το μετρήσουμε, έχει μια αβεβαιότητα, που συνδέεται μ' αυτή ακριβώς την αδυναμία μας να διαβάσουμε πάνω στο όργανο κάτι λιγότερο από την





**Σχήμα 1.1:** Η αληθινή τιμή και η μέτρηση με σφάλμα  $\pm 0.1cm$

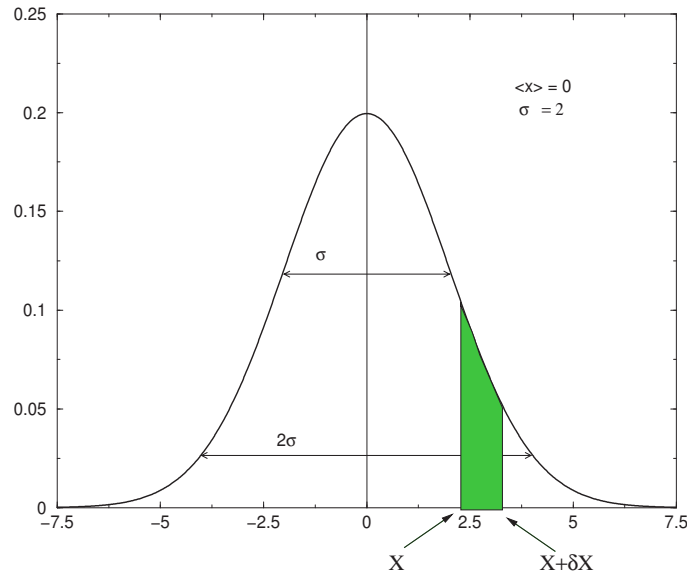


**Σχήμα 1.2:** Η αληθινή τιμή και η μέτρηση με σφάλμα  $\pm 0.05cm$

ελάχιστη τιμή μέτρησης που μας επιτρέπει. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε σ' αυτή την περίπτωση, είναι να καθορίσουμε την ελάχιστη δυνατή περιοχή μέσα στην οποία μπορεί να βρίσκεται η αληθινή τιμή του μετρούμενου μεγέθους. Αν π.χ. μετράμε με το χάρακα ένα μήκος  $82.3cm$ , αυτό σημαίνει ότι η αληθινή τιμή του μήκους που θέλουμε να μετρήσουμε, βρίσκεται πολύ κοντά στην ένδειξη  $82.3$ , που φαίνεται πάνω στο χάρακα (όπως είπαμε θα ήταν απίθανο να συμπίσει μια μέτρηση με την απόλυτα ακριβής τιμή του μετρούμενου μεγέθους) και σίγουρα είναι ανάμεσα στις ενδείξεις  $82.2$  και  $82.4$ . Όπως είπαμε, για τη μέτρησή μας αυτή πρέπει να γράψουμε ότι το μήκος που μετρήσαμε είναι  $82.3 \pm 0.1cm$  και μ' αυτό να υποδηλώνουμε ότι η αληθινή τιμή του μήκους που μετρήσαμε βρίσκεται στην περιοχή  $[82.3 - 0.1, 82.3 + 0.1]$  ή αλλιώς στο  $[82.2, 82.4]$  (βλέπε σχήμα 1).

Θα μπορούσε κανείς να πει ότι αυτό το διάστημα είναι μάλλον υπερεκτιμημένο, αφού έχουμε δυνατότητα με το μάτι να διακρίνουμε πάνω στο χάρακα το εύρος ενός χιλιοστού, μέσα στο οποίο θα μπορούσε να βρίσκεται η μέτρησή μας (βλέπε σχήμα 2). Μπορεί να κάνει κάποιος αυτή τη θεώρηση, αρκεί να είναι σίγουρος ότι οι μετρήσεις που κάνει είναι σωστές. Σ' αυτή την περίπτωση θα πρέπει να γράψουμε ότι η μέτρησή μας είναι  $82.25 \pm 0.05cm$ , αναγνωρίζοντας όμως ότι η ελάχιστη δυνατή μέτρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι  $0.05cm$  και όχι  $0.1cm$ . Μ' αυτή τη θεώρηση, το διάστημα μέσα στο οποίο θα μπορούσε να βρεθεί η αληθινή τιμή του μήκους που μετράμε θα ήταν το  $[82.20, 82.30]$ .

Βλέπουμε λοιπόν ότι η ελάχιστη δυνατή ένδειξη που μπορούμε να αναγνωρίσουμε πάνω σ' ένα όργανο μέτρησης, είναι ίση με την ελάχιστη δυνατή μέτρηση που μπορεί να κάνει το όργανο αυτό. Κατά συνέπεια το σφάλμα που κάνουμε σε μια και μόνη μέ-



**Σχήμα 1.3:** Η Γκαουσιανή κατανομή. Το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής είναι η πιθανότητα να βρεθεί μια μέτρηση ανάμεσα στις τιμές  $x$  και  $x + \delta x$

τρηση είναι ίσο με την ελάχιστη αυτή δυνατή μέτρηση που μπορεί να κάνει το όργανο. Αυτή την ελάχιστη δυνατή μέτρηση που μπορεί να κάνει το όργανο την ονομάζουμε σφάλμα του οργάνου και αποτελεί το σφάλμα της μέτρησής μας, αν έχουμε κάνει μία και μόνη μέτρηση.

## 1.5 Αντιμετώπιση τυχαίων σφαλμάτων

Επειδή υπάρχουν τα τυχαία σφάλματα, μια και μόνη μέτρηση δεν είναι ικανοποιητική, για να έχουμε ένα αξιόπιστο αποτέλεσμα. Χρειάζεται λοιπόν να κάνουμε περισσότερες από μια μετρήσεις και να αντιμετωπίσουμε με στατιστικό τρόπο τις μετρήσεις αυτές.

### 1.5.1 Κανονική κατανομή

Οι μετρήσεις που προκύπτουν ως αποτέλεσμα τυχαίων σφαλμάτων, είπαμε ότι ακολουθούν μια κανονική κατανομή. Τι είναι όμως η κανονική κατανομή (ή κατανομή *Gauss* ή Γκαουσιανή κατανομή);

Η Γκαουσιανή κατανομή  $G(x)$  είναι η συνάρτηση

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (1.1)$$

η οποία δίνει την πιθανότητα ανά μονάδα του μετρούμενου μεγέθους, να μετρηθεί η τιμή  $x$ .

Επομένως η πιθανότητα να μετρηθεί μια τιμή στο διάστημα  $[x_0, x_0 + \delta x]$  είναι ίση με το εμβαδόν που περικλύεται ανάμεσα στην καμπύλη  $G(x)$  και την ευθεία  $xx'$ , και τις ευθείες  $x = x_0$  και  $x = x_0 + \delta x$  (βλέπε σχ.3). Αυτό το εμβαδόν εκφράζεται από το ολοκλήρωμα

$$P(x_0 \leq x \leq x_0 + \delta x) = \int_{x_0}^{x_0 + \delta x} G(x) dx \quad (1.2)$$

Το σύμβολο  $P(x_0 \leq x \leq x_0 + \delta x)$  συμβολίζει την πιθανότητα να μετρήσουμε το μέγεθος  $x$  και να το βρούμε ανάμεσα στις τιμές  $x_0$  και  $x_0 + \delta x$ .

### 1.5.2 Μέση τιμή, τυπική απόκλιση, τυπικό σφάλμα μέσης τιμής

Ορίζουμε ως μέση τιμή των μετρήσεων του μεγέθους  $x$ , την ποσότητα

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1.3)$$

όπου  $x_i$  η  $i$  - μέτρηση του μεγέθους  $x$  και  $N$  ο αριθμός των μετρήσεων. Εφ' όσον οι μετρήσεις μας ακολουθούν την κανονική κατανομή, η πιθανότερη εκτίμηση της πραγματικής τιμής του μετρούμενου μεγέθους είναι η μέση του τιμή.

Ορίζουμε επίσης ως τυπική απόκλιση των μετρήσεων του μεγέθους  $x$ , την ποσότητα

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (1.4)$$

(Στον τύπο (1) της Γκαουσιανής κατανομής το  $\mu$  είναι η μέση τιμή και το  $\sigma$  η τυπική απόκλιση των μετρήσεων.) Μπορεί να δείξει κανείς ότι

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad \text{όπου} \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (1.5)$$

Όπως μπορεί κανείς να δει στο σχήμα 3, μετρήσεις γύρω από τη μέση τιμή έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να εμφανιστούν, ενώ όσο μια μέτρηση απομακρύνεται από τη μέση τιμή, η πιθανότητα εμφάνισής της μειώνεται. Πολύ μακριά από τη μέση τιμή η πιθανότητα εμφάνισης μια μέτρησης είναι πρακτικά μηδέν.

Η πιθανότητα να εμφανιστεί μια μέτρηση στην περιοχή από  $\mu - \sigma$  ως  $\mu + \sigma$  (δηλαδή το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη και ανάμεσα σ' αυτές τις ευθείες, που σχολιάσαμε προηγουμένως) είναι ίση με 68.2%, ενώ η πιθανότητα να βρεθεί μια μέτρηση ανάμεσα στις τιμές  $\mu - 2\sigma$  και  $\mu + 2\sigma$  είναι ίση με 95.4%. Επομένως η τυπική απόκλιση παρέχει ένα μέτρο της διασποράς των μετρήσεων γύρω από τη μέση τιμή.

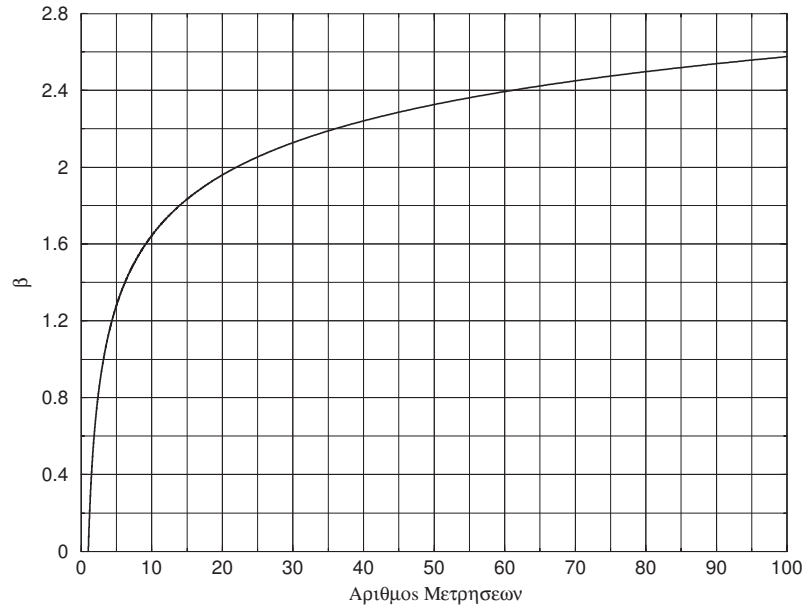
Για τη στατιστική εκτίμηση του σφάλματος που προέρχεται από τα τυχαία σφάλματα, υπάρχουν πολλοί τρόποι. Το σφάλμα που θα επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε είναι το λεγόμενο τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής που ορίζεται σαν

$$\sigma_M = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sigma = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2} \quad (1.6)$$

Σφάλμα μιας άμεσης μέτρησης θα θεωρούμε το μέγιστο ανάμεσα στο σφάλμα οργάνου και στο τυχαίο σφάλμα της μέσης τιμής.

### 1.5.3 Κριτήριο Chauvenet - Απόρριψη μετρήσεων

Όπως είπαμε, οι μετρήσεις που εμπεριέχουν τυχαία σφάλματα ακολουθούν μια κανονική κατανομή και διασπείρονται συμμετρικά γύρω από τη μέση τιμή. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3, η πιθανότητα εμφάνισης μιας μέτρησης, που βρίσκεται κοντά στη



**Σχήμα 1.4:** Η τιμή του  $\beta = |x - \langle x \rangle| / \sigma$  πάνω απ' την οποία πρέπει να απορρίπτονται οι μετρήσεις ως συνάρτηση του πλήθους των μετρήσεων.

μέση τιμή, είναι μεγάλη και μειώνεται πολύ γρήγορα όσο η μέτρηση βρίσκεται μακριά απ' αυτή. Είναι επομένως πολύ πιθανό σε ένα μεγάλο αριθμό μετρήσεων να εμφανιστούν και ακραίες μετρήσεις (δηλ. μετρήσεις που βρίσκονται σχετικά μακριά από τη μέση τιμή). Σ' αυτή την περίπτωση η εμφάνιση ακραίων μετρήσεων είναι τελείως "φυσιολογική" και αναμενόμενη και δεν πρόκειται να επηρεάσουν ουσιαστικά τη μέση τιμή. Δεν αποκλείεται όμως να εμφανιστεί μια ακραία μέτρηση (ή και περισσότερες) από τις πρώτες κι όλας μετρήσεις. Αν σ' αυτή την περίπτωση δεν φροντίσουμε ώστε οι μετρήσεις μας να είναι πολλές, τότε η συνεισφορά αυτής της ακραίας μέτρησης μπορεί να είναι σημαντική στη μέση τιμή, με αποτέλεσμα η παρουσία της να αλλοιώσει δραματικά τη μέση τιμή. Σε τέτοιες περιπτώσεις λοιπόν, που δε μας δίνεται η δυνατότητα να πάρουμε πολλές μετρήσεις, είναι καλό οι ακραίες μετρήσεις να εντοπίζονται και να απορρίπτονται, θεωρώντας ότι οι μετρήσεις αυτές δεν έγιναν ποτέ. Τίθεται όμως τώρα το ερώτημα, πότε μια μέτρηση θα πρέπει να θεωρείται ότι είναι ακραία και πρέπει να απορριφθεί;

Την απάντηση στο ερώτημα την έδωσε ο *Chauvenet* ο οποίος θεώρησε ότι επί  $N$  μετρήσεων, μια μέτρηση είναι ακραία, όταν η μέτρηση αυτή εμφανιστεί στην ουρά (στα άκρα) της κατανομής, στην περιοχή όπου η πιθανότητα εμφάνισης μιας μέτρησης είναι μικρότερη από  $1/N$ . (κριτήριο *Chauvenet*).

Χωρίς να μπούμε σε μαθηματικές λεπτομέρειες, περιγράψουμε παρακάτω τα βήματα που πρέπει να ακολουθήσουμε προκειμένου να δούμε αν κάποιες τιμές είναι ακραίες, σύμφωνα με το κριτήριο *Chauvenet*, και κατά συνέπεια πρέπει να απορριφθούν.

- Υπολογίζουμε πρώτα τη μέση τιμή  $\langle x \rangle$  και την τυπική απόκλιση  $\sigma$ .
- Για κάθε μια μέτρηση,  $x_i$ , υπολογίζουμε τις ποσότητες  $\beta_i$  από τη σχέση  $\beta_i = | \langle x \rangle - x_i | / \sigma$ .

N	$\beta$	N	$\beta$	N	$\beta$
1	-	11	1.691	21	1.981
2	-	12	1.732	22	2.000
3	0.968	13	1.769	23	2.019
4	1.150	14	1.803	24	2.037
5	1.281	15	1.834	25	2.054
6	1.383	16	1.863	26	2.070
7	1.465	17	1.889	27	2.085
8	1.534	18	1.915	28	2.100
9	1.593	19	1.938	29	2.114
10	1.644	20	1.959	30	2.128

**Πίνακας 1.1:** Αν για N μετρήσεις εμφανιστεί μέτρηση με  $\beta$  μεγαλύτερο απ' αυτό του πίνακα, η μέτρηση αυτή πρέπει να απορρίπτεται

- Βρίσκουμε στο σχήμα 4 ή στον πίνακα 1 ποιο  $\beta$  αντιστοιχεί στον αριθμό μετρήσεων N. Αν κάποιο από τα  $\beta_i$  είναι μεγαλύτερο απ' αυτό το  $\beta$  τότε απορρίπτουμε τη μέτρηση  $x_i$  απ' την οποία προήλθε το  $\beta_i$
- Αφού απορριφθούν όλες ακραίες μετρήσεις πρέπει να απορριφθούν, υπολογίζουμε εκ νέου τη μέση τιμή και το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής
- Δεν εφαρμόζουμε ξανά το κριτήριο *Chauvenet* για τις εναπομείνουσες μετρήσεις με τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση.

## 1.6 Σημαντικά ψηφία - Στρογγυλοποίηση

Όπως είπαμε στην εισαγωγή, σημαντικά ψηφία είναι όλα τα ψηφία ενός αριθμού που παριστάνει μια μέτρηση, όταν προκύπτουν από την ίδια τη μέτρηση ή από υπολογισμούς μετρήσεων.

Σ' ένα αριθμό λοιπόν που παριστάνει μια μέτρηση πρέπει να φαίνονται τα σημαντικά του ψηφία και ο μόνος τρόπος για να γίνει αυτό, είναι να γράψουμε αυτά τα ψηφία. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής. Κάθε αριθμό που παριστάνει μια μέτρηση θα τον γράφουμε με τη μορφή

$$a_1 a_2 \dots a_n, a_{n+1} \dots a_m \times 10^\beta \quad (1.7)$$

όπου  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_m$  είναι τα  $m$  σημαντικά ψηφία 0,1,...,9 της μέτρησης και  $\beta$  μια δύναμη κατάλληλη για να προσαρμοστεί η μέτρηση στις ανάλογες μονάδες.

Έτσι η μέτρηση της απόστασης Γης - Ήλιου με τρία σημαντικά ψηφία μπορεί να γραφεί ως  $149 \times 10^6 km$ , ή ως  $14.9 \times 10^7 km$ , ή ως  $1.49 \times 10^8 km$ , ή ως  $149 \times 10^9 m$ , ή ως  $149 \times 10^{11} cm$  κ.τ.λ. Με όλους αυτούς τους τρόπους γραφής εμφανίζονται πάντα τρία σημαντικά ψηφία. Και τα τρία αυτά ψηφία είναι σημαντικά, ανεξάρτητα από το πού τοποθετείται η υποδιαστολή.

Μπορεί όμως και να γραφεί ως  $0.149 \times 10^9 km$ , ή ως  $0.149 \times 10^{12} m$ , ή ως  $0.149 \times 10^{14} cm$ . Σ' αυτή τη μορφή γραφής, το πρώτο δεκαδικό ψηφίο πρέπει να είναι το

σημαντικότερο ψηφίο του αριθμού και δεν πρέπει ποτέ να είναι μηδέν. Αυτό επιτυγχάνεται πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα τον αριθμό με κάποια δύναμη του 10. Έτσι αν με τον αριθμό  $0.00149 \times 10^{11} km$  θέλουμε να παραστήσουμε την παραπάνω μέτρηση της απόστασης Γης - Ήλιου με τρία σημαντικά ψηφία, θα τον πολλαπλασιάσουμε με  $10^2$  για να γίνει 0.149 και θα διαιρέσουμε το  $10^{11}$  με τον ίδιο αριθμό, οπότε θα γίνει  $10^9$ . Έτσι θα πάρουμε τη μέτρηση  $0.149 \times 10^9 km$ , που ήδη έχουμε γράψει παραπάνω. Το μηδέν που βρίσκεται μπροστά από την υποδιαστολή δεν είναι σημαντικό ψηφίο. Έτσι μ' αυτή τη μορφή γραφής μετρήσεων, όλα τα ψηφία του αριθμού μετά την υποδιαστολή είναι σημαντικά ψηφία της μέτρησης.

Από την άλλη το λιγότερο σημαντικό ψηφίο μπορεί να είναι μηδέν. Έτσι μια μέτρηση ταχύτητας  $5.2m/sec$  που μπορεί να μετρηθεί μέχρι και  $0.01m/sec$ , πρέπει να γραφεί σαν  $5.20m/sec$ . Η μέτρηση αυτή έχει τρία σημαντικά ψηφία και το τρίτο ψηφίο, που είναι το μηδέν, πρέπει πάντα να γράφεται, αφού είναι αποτέλεσμα της μέτρησης. Αν η μέτρησή μας μπορούσε να μετρηθεί μέχρι και  $0.001m/sec$ , θα έπρεπε να γραφεί σαν  $5.200m/sec$  και θα είχε τέσσερα σημαντικά ψηφία.

Είχαμε πει στην εισαγωγή, ότι αν προσπαθήσουμε να αυξήσουμε το πλήθος των σημαντικών ψηφίων προσθέτοντας τις μετρήσεις κάποιας ποσότητας με σκοπό να αυξηθεί ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων, δεν πρόκειται να τα καταφέρουμε γιατί το σφάλμα που θα έχει η έμμεση μέτρηση του αθροίσματος θα μεγαλώσει, έτσι ώστε να μην αλλάξει ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων. Γενικά στις έμμεσες μετρήσεις (δηλ. μετρήσεις που προκύπτουν από μαθηματικό υπολογισμό) το πλήθος των σημαντικών ψηφίων της μέτρησης είναι ίσο με το μικρότερο πλήθος σημαντικών ψηφίων των μετρήσεων από τις οποίες εξαρτάται η έμμεση μέτρηση. Θα το καταλάβουμε αυτό καλύτερα με το επόμενο παράδειγμα.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε το εμβαδόν. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να μετρήσουμε τα μήκη των πλευρών του και να τα πολλαπλασιάσουμε μεταξύ τους. Ας υποθέσουμε ότι για τις μετρήσεις αυτές χρησιμοποιούμε ένα χάρακα και βρίσκουμε ότι οι πλευρές αυτές έχουν μήκος  $(123.3 \pm 0.1)cm$  (τέσσερα σημαντικά ψηφία) και  $(12.3 \pm 0.1)cm$  (δύο σημαντικά ψηφία). Αυτό σημαίνει ότι η μια πλευρά έχει μήκος μεταξύ  $123.3 - 0.1 = 123.2cm$  και  $123.3 + 0.1 = 123.4cm$  και η άλλη μεταξύ  $12.3 - 0.1 = 12.2cm$  και  $12.3 + 0.1 = 12.4cm$ . Επομένως το εμβαδόν θα έχει μια τιμή ανάμεσα στην ελάχιστη και στη μέγιστη τιμή του γινομένου των δύο πλευρών, δηλαδή μεταξύ  $123.2 \times 12.2 = 1503.04cm^2$  και  $123.4 \times 12.4 = 1530.16cm^2$ . Βλέπουμε λοιπόν ότι οι δύο τιμές του ελαχίστου και του μεγίστου εμβαδού, (ανάμεσα στις οποίες βρίσκεται η πραγματική του τιμή), συμφωνούν μόνο κατά τα δύο πρώτα ψηφία που είναι το 1 και το 5 αντίστοιχα, ενώ διαφοροποιούνται στο τρίτο ψηφίο που είναι το 0 (για το ελάχιστο εμβαδόν) και το 3 (για το μέγιστο). Επομένως το σφάλμα στη μέτρηση του εμβαδού βρίσκεται στο τρίτο ψηφίο, όπως συμβαίνει με τη μέτρηση της πλευράς μήκους  $(12.3 \pm 0.1)cm$ . Κατά συνέπεια μόνο τα τρία ψηφία της μέτρησης είναι σημαντικά, αφού το σφάλμα εντοπίζεται στο τρίτο ψηφίο. Έτσι η μέτρηση του εμβαδού θα είναι  $123.3 \times 12.3 = 1516.59cm^2$ . Επειδή, το πλήθος των σημαντικών ψηφίων της έμμεσης μέτρησης του εμβαδού, πρέπει να είναι ίσο, με το μικρότερο πλήθος σημαντικών ψηφίων των μεγεθών από τις οποίες εξαρτάται η έμμεση μέτρηση, το εμβαδόν θα πρέπει να παρασταθεί με τρία σημαντικά ψηφία.

Σε τέτοιες περιπτώσεις θα κάνουμε την εξής σύμβαση στρογγυλοποίησης των αριθμών.

- Αν το πρώτο μη σημαντικό ψηφίο του αριθμού είναι μικρότερο από το πέντε τότε αποκόπτουμε όλα τα μη σημαντικά ψηφία και κρατάμε τα σημαντικά ψηφία όπως είναι.
- Αν είναι μεγαλύτερο ή ίσο του πέντε τότε κάνουμε το ίδιο αλλά προσθέτουμε μια μονάδα στο λιγότερο σημαντικό ψηφίο του αριθμού.

Επομένως στο παράδειγμά μας, τα σημαντικά ψηφία είναι τα τρία πρώτα, άρα το πρώτο μη σημαντικό είναι το 6. Το 6 είναι μεγαλύτερο από 5, άρα προσθέτουμε στο λιγότερο σημαντικό ψηφίο (δηλ. στο 1) μια μονάδα (και γίνεται 2). Επομένως η μέτρηση του εμβαδού θα είναι ίση με  $152 \times 10^1 \text{cm}^2 \pm$  σφάλμα.

Το σφάλμα μιας έμμεσης μέτρησης, θα δείξουμε παρακάτω πώς να το προσδιορίζουμε. (Ποτέ δεν ξεχνάμε να βάλουμε δίπλα στη μέτρησή μας τις κατάλληλες μονάδες. Χωρίς αυτές η μέτρηση δεν έχει κανένα νόημα.)

Επειδή το σφάλμα μιας μέτρησης είναι το μέτρο της αβεβαιότητας με την οποία η μέτρηση προσεγγίζει την αληθινή τιμή, δεν μπορεί το λιγότερο σημαντικό ψηφίο μιας μέτρησης να είναι περισσότερο σημαντικό από το σφάλμα. Δε θα μπορούσαμε π.χ. να έχουμε μια μέτρηση μήκους  $x = 1.74m$  και ένα σφάλμα  $\delta x = 0.0001m$ . Ένα τέτοιο σφάλμα θα σήμαινε ότι μπορούμε να μετρήσουμε αποστάσεις μήκους που να είναι ακέραια πολλαπλάσια του  $\delta x$ . Δηλαδή θα μπορούσαμε να μετρήσουμε ένα μήκος  $x = 1.7401m$   $x = 1.7402m$   $x = 1.7403m$  κ.τ.λ. Επομένως είτε αυτή η μέτρηση μήκους είναι γραμμένη λάθος και θα έπρεπε να γραφεί σαν  $x = 1.7400m$  (οπότε θα έχει 5 σημαντικά ψηφία αντί για 3), είτε το σφάλμα θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο και τουλάχιστον ίσο με  $0.01m$ .

Κατ' αναλογία, δεν μπορεί το λιγότερο σημαντικό ψηφίο μιας μέτρησης να είναι λιγότερο σημαντικό από το σφάλμα. Δε θα είχε νόημα π.χ. να είχαμε μια μέτρηση  $x = 1.74m$  και να είχαμε ένα σφάλμα  $0.1m$ . Με τέτοιο σφάλμα θα μπορούσαμε να μετρήσουμε αποστάσεις που να είναι πολλαπλάσιες του σφάλματος. Θα μπορούσαμε δηλαδή να μετρήσουμε  $1.5m$ ,  $1.6m$ ,  $1.7m$ ,  $1.8m$  κ.τ.λ. Επομένως είτε η μέτρηση είναι λάθος και θα πρέπει να στρογγυλοποιηθεί σε  $x = 1.7m$ , είτε το σφάλμα είναι λάθος και θα πρέπει να γίνει τουλάχιστον  $0.01m$ .

Αντιλαμβανόμαστε κατά συνέπεια ότι το σφάλμα πρέπει να είναι το ίδιο σημαντικό με το ελάχιστο σημαντικό ψηφίο μιας μέτρησης. Για το λόγο αυτό το σφάλμα πρέπει να αποδίδεται με ένα μόνο σημαντικό ψηφίο. Αν λοιπόν μετά από πράξεις προκύπτει ένα σφάλμα με περισσότερα από ένα σημαντικά ψηφία, θα πρέπει, ακολουθώντας τους παραπάνω κανόνες, να το στρογγυλοποιούμε σε ένα μόνο σημαντικό ψηφίο.

## 1.7 Απόλυτο και σχετικό σφάλμα

Μέχρι τώρα ότι είπαμε για τα σφάλματα αναφερόταν στο εύρος μέσα στο οποίο περιμένουμε να βρεθεί η αληθινή τιμή ενός μεγέθους, γύρω από την τιμή που μετρήσαμε. Αυτό το σφάλμα ονομάζεται απόλυτο σφάλμα.

Όμως το απόλυτο σφάλμα από μόνο του, δε μας δίνει καμιά πληροφορία για την αξία (ή αλλιώς, για την ακρίβεια) της μέτρησης. Μπορούμε βέβαια να πάρουμε αυτή την πληροφορία από το απόλυτο σφάλμα σε συνδυασμό με τη μέτρηση. Βεβαίως, όπως έχουμε πει, μια μέτρηση που εκφράζεται με πολλά σημαντικά ψηφία, είναι ακριβέστερη από μια μέτρηση με λιγότερα σημαντικά ψηφία. Όμως ανάμεσα σε δύο

μετρήσεις με ίδιο αριθμό σημαντικών ψηφίων ποια μέτρηση είναι πιο ακριβής; Την απάντηση σ' αυτό το ερώτημα τη δίνει το σχετικό σφάλμα. Το σχετικό σφάλμα μιας μέτρησης  $x$  που έχει απόλυτο σφάλμα  $\pm \delta x$  (δηλαδή της μέτρησης  $x \pm \delta x$ ), ορίζεται ως

$$\frac{\delta x}{x} \times 100\% \quad (1.8)$$

Το σχετικό σφάλμα λοιπόν μας δείχνει πόσο μεγάλο είναι το σφάλμα σε σχέση με τη μέτρηση.

Αν π.χ. έχουμε μια μέτρηση μήκους  $x = 1.0 \pm 0.1m$  το σχετικό της σφάλμα είναι  $\frac{\delta x}{x} \times 100\% = 0.1/1 \times 100\% = 10\% = 10^{-1}$ . Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκαμε για το σχετικό σφάλμα είτε στη μέτρησή μας είχαμε  $km$ , είτε είχαμε  $mm$ , αντί για  $m$ . Όπως θα έχετε παρατηρήσει το σχετικό σφάλμα είναι αδιάστατη ποσότητα (δεν έχει μονάδες).

Αν είχαμε μια μέτρηση  $x = 1.00 \pm 0.01m$  το σχετικό της σφάλμα θα ήταν  $\frac{\delta x}{x} \times 100\% = 0.01/1 \times 100\% = 1\% = 10^{-2}$ .

Για τη μέτρηση  $x = 1.000 \pm 0.001m$  το σχετικό της σφάλμα θα ήταν  $\frac{\delta x}{x} \times 100\% = 0.001/1 \times 100\% = 0.1\% = 10^{-3}$ .

Για τη μέτρηση  $x = 11.567 \pm 0.001m$  το σχετικό της σφάλμα θα ήταν  $\frac{\delta x}{x} \times 100\% = 0.001/11.567 \times 100\% = 0.009\% = 0.9 \times 10^{-4}$ .

Για τη μέτρηση  $x = 18.463 \pm 0.001m$  το σχετικό της σφάλμα θα ήταν  $\frac{\delta x}{x} \times 100\% = 0.001/18.463 \times 100\% = 0.005\% = 0.5 \times 10^{-4}$ .

Όπως βλέπετε, από τα παραπάνω παραδείγματα μετρήσεων, αν το σχετικό σφάλμα το γράψουμε σαν  $s \times 10^{-m}$ , με  $0.1 \leq s \leq 1$  τότε έχουμε τόσα σημαντικά ψηφία όσα η αρνητική δύναμη του 10 με την οποία εκφράζεται το σχετικό σφάλμα συν ένα (δηλαδή έχουμε  $m + 1$  σημαντικά ψηφία).

Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι το σχετικό σφάλμα μετράει την ακρίβεια της μέτρησης, ενώ το απόλυτο μετράει την αβεβαιότητα με την οποία προσεγγίζουμε την αληθινή τιμή. Όσο πιο μικρό είναι το σχετικό σφάλμα, τόσο πιο ακριβής είναι η μέτρηση.

## 1.8 Διάδοση σφαλμάτων

Όπως είπαμε, υπάρχουν μεγέθη τα οποία για να τα μετρήσουμε πρέπει να καταφύγουμε σε κάποιο μαθηματικό τύπο και μέσω αυτού να συνδυάσουμε ήδη υπάρχουσες άμεσες μετρήσεις. Αυτές τις μετρήσεις είπαμε ότι τις λέμε έμμεσες μετρήσεις και έχουν κι αυτές κάποιο σφάλμα. Το σφάλμα των έμμεσων μετρήσεων το βρίσκουμε με συνδυασμό των σφαλμάτων και των μετρήσεων των άμεσων μετρήσεων από τις οποίες εξαρτάται η άμεση μέτρηση.

Δίνουμε παρακάτω μερικά γενικά παραδείγματα περιπτώσεων διάδοσης σφαλμάτων που μπορεί να συναντήσετε. Σε άλλες περιπτώσεις που δεν καλύπτονται από τις επόμενες θα σας δίνεται τύπος μέσω του οποίου θα βρίσκετε τη διάδοση των σφαλμάτων. Αν  $A$  είναι ένα μέγεθος του οποίου θέλουμε να κάνουμε μια έμμεση μέτρηση, το οποίο εξαρτάται από τα μεγέθη  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . Αν οι μετρήσεις αυτών των μεγεθών έχουν σφάλμα  $\delta Q_1, \delta Q_2, \dots, \delta Q_n$  αντίστοιχα, τότε :

- Αν  $A = Q_1 + c$ , όπου  $c$  μια σταθερά, τότε  $\delta A = \pm \delta Q_1$
- Αν  $A = cQ_1$ , όπου  $c$  μια σταθερά, τότε  $\delta A = \pm c\delta Q_1$
- Αν  $A = Q_1 \pm Q_2 \pm \dots \pm Q_n$  τότε  $\delta A = \pm \sqrt{(\delta Q_1)^2 + (\delta Q_2)^2 + \dots + (\delta Q_n)^2}$



- Αν  $A = Q_1 Q_2 \dots Q_n$  τότε  $\frac{\delta A}{A} = \pm \sqrt{\left(\frac{\delta Q_1}{Q_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta Q_2}{Q_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\delta Q_n}{Q_n}\right)^2}$
- Αν  $A = \frac{Q_1}{Q_2}$  τότε  $\frac{\delta A}{A} = \pm \sqrt{\left(\frac{\delta Q_1}{Q_1}\right)^2 + \left(\frac{\delta Q_2}{Q_2}\right)^2}$
- Αν  $A = \frac{Q_1^n}{Q_2^m}$  τότε  $\frac{\delta A}{A} = \pm \sqrt{\left(n \frac{\delta Q_1}{Q_1}\right)^2 + \left(m \frac{\delta Q_2}{Q_2}\right)^2}$

Επομένως αν  $r \pm \delta r$  είναι η μέτρηση της ακτίνας ενός κύκλου τότε το σφάλμα στη μέτρηση της περιφέρειάς του θα είναι  $\delta L = 2\pi \delta r$  και το σφάλμα στη μέτρηση της επιφάνειάς του  $\delta S = 2\pi r \delta r$ . (Υπενθυμίζουμε ότι η περιφέρεια κύκλου είναι  $L = 2\pi r$  και το εμβαδόν της επιφάνειάς του  $S = \pi r^2$ ).

## 1.9 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

Για να μελετήσουμε πειραματικά τη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων είναι βολικό να χρησιμοποιούμε τις γραφικές παραστάσεις. Όμως επειδή οι μετρήσεις μας έχουν σφάλματα, οι πειραματικές τιμές των ποσοτήτων, που θέλουμε να τις παραστήσουμε με γραφική παράσταση, δε θα συμπίπτουν ακριβώς πάνω στην καμπύλη που υπολογίζουμε ότι αντιστοιχεί στις μετρήσεις μας. Αν π.χ. θέλουμε να μελετήσουμε την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση (δηλαδή την κίνηση με σταθερή ταχύτητα) μπορούμε να μετρήσουμε πόσο μετακινείτε το σώμα μας σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Αν θελήσουμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση του συνολικού διαστήματος που κινήθηκε το σώμα σε συνάρτηση του συνολικού χρόνου, τότε θα έπρεπε να προκύψει μια ευθεία. Όμως τα σφάλματα των μετρήσεών μας, θα έχουν ως αποτέλεσμα να μην βρίσκονται ακριβώς πάνω σε μια ευθεία οι μετρήσεις μας. Λόγω αυτών των αποκλίσεών τους θα μπορούσαμε να φτιάξουμε πολλές διαφορετικές ευθείες συνδέοντας ανά δύο τα πειραματικά μας σημεία και τελικά δε θα μπορούσαμε να καταλήξουμε σε κάποιο συμπέρασμα για το ποια ευθεία προσεγγίζει με τον καλύτερο τρόπο τα πειραματικά μας δεδομένα.

Τη λύση σ' αυτό το πρόβλημα την έδωσε ο *Gauss* σε ηλικία μόλις 15 ετών προτείνοντας ως ευθεία που προσεγγίζει καλύτερα την αληθινή ευθεία, εκείνη που προσαρμόζεται ανάμεσα στα πειραματικά σημεία κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να ελαχιστοποιείται το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεών τους απ' αυτή.

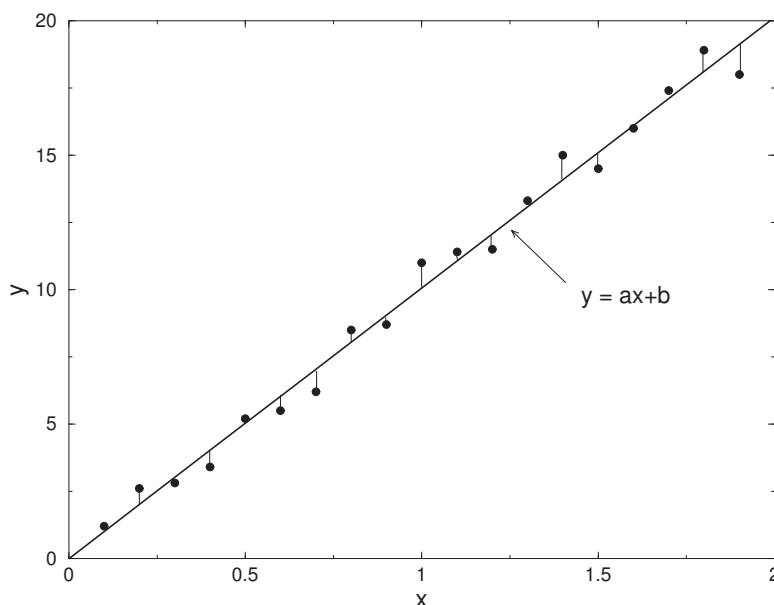
Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε τα πειραματικά δεδομένα  $x_i, y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  και προσπαθούμε να προσαρμόσουμε ανάμεσα σ' αυτά την ευθεία  $y = ax + b$  με τη μέθοδο που πρότεινε ο *Gauss*.

Θα πρέπει κατά συνέπεια να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα  $\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2$ . Η ποσότητα αυτή ελαχιστοποιείται όταν οι μερικές παράγωγοι της ως προς  $a$  και  $b$ , γίνουν ίσες με μηδέν. Κάνοντας αυτές τις πράξεις βρίσκουμε

$$a = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad \text{και} \quad b = \langle y \rangle - a \langle x \rangle \quad (1.9)$$

όπου το σύμβολο  $\langle w \rangle$  παριστάνει την μέση τιμή του μεγέθους  $w$ . Δηλαδή

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad \langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad \langle xy \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i \quad (1.10)$$



**Σχήμα 1.5:** Η ευθεία προσαρμόζεται στα πειραματικά δεδομένα έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων (οι γραμμούλες που φαίνονται από τα πειραματικά σημεία προς την ευθεία) να γίνεται ελάχιστο.

Η μέθοδος είναι γνωστή με το όνομα Μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

Όπως μπορείτε να δείτε από τη δεύτερη εξίσωση, το σημείο  $(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$  είναι σημείο της ευθείας.

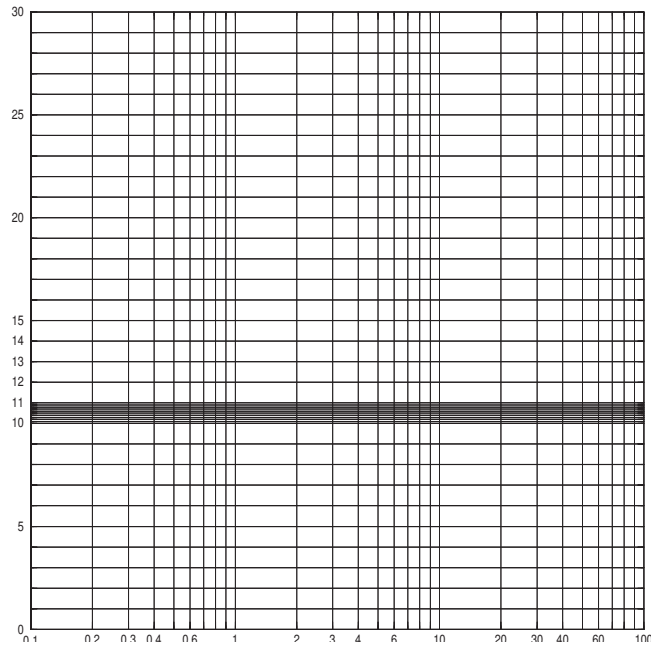
Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, που μόλις αναπτύξαμε, μπορούμε να προσαρμόσουμε τη βέλτιστη ευθεία στα πειραματικά μας σημεία. Γενικά υπάρχει τρόπος να βρεθεί το βέλτιστο πολυώνυμο που μπορεί να προσαρμοστεί σε πειραματικά δεδομένα με την ίδια μέθοδο ώστε να καλυφθούν και άλλες περιπτώσεις σχέσεων μεγεθών, που δεν είναι ευθείες. Υπάρχουν όμως αρκετές σχέσεις μεγεθών που μπορούν να αναχθούν σε ευθείες.

Έτσι η σχέση  $y = ax^n + b$  μπορεί να αναχθεί σε ευθεία αν στη θέση της μεταβλητής  $x^n$  βάλουμε μια μεταβλητή  $w$ . Μετατρέπουμε λοιπόν τα ζεύγη μετρήσεων  $(x_i, y_i)$  σε  $(w_i, y_i)$ , όπου  $w_i = x_i^n$ . Το ζητούμενο τότε θα είναι να βρούμε την ευθεία  $y = aw + b$  (δηλαδή τα  $a$  και  $b$ ) που προσαρμόζεται καλύτερα στα πειραματικά δεδομένα, μέσω της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Αν ξέρουμε τα  $a$  και  $b$ , μπορούμε να ξέρουμε τη σχέση  $y = ax^n + b$  που προσαρμόζεται καλύτερα στα πειραματικά δεδομένα.

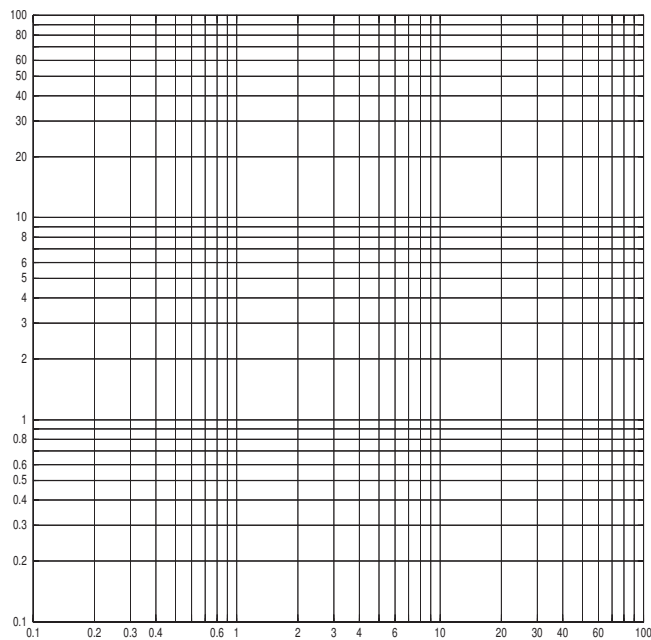
Ομοίως αν έχουμε τη σχέση  $y = ax^n + bx^m$ , με γνωστά  $m$  και  $n$ ,  $m < n$  τότε κατά τον ίδιο τρόπο  $y = x^m(ax^{n-m} + b) \implies y/x^m = ax^{n-m} + b$ . Μετατρέπουμε λοιπόν τα ζευγάρια μετρήσεων  $(x_i, y_i)$  σε  $(w_i, v_i)$  με  $w_i = x_i^{n-m}$  και  $v_i = y_i/x_i^m$  και με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων αναζητούμε την ευθεία  $v = aw + b$  που προσαρμόζεται κατά το βέλτιστο τρόπο στα πειραματικά δεδομένα  $(w_i, v_i)$ .

Ομοίως αν έχουμε μια σχέση της μορφής  $y = Ae^{\lambda x}$ , τότε παίρνοντας τους λογαρίθμους των δύο μελών, έχουμε  $\log y = \log A + \lambda x \log e$ , ( $\log e = 0.43429448$ ). Οπότε μπορούμε πάλι να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων με τα ζεύγη  $(0.43429448x_i, \log y_i)$  για να προσδιορίσουμε τα  $\lambda$  και  $\ln A$ .

Τέτοιες γραφικές παραστάσεις είναι εύκολες να γίνουν στο λεγόμενο ημιλογαριθ-



**Σχήμα 1.6:** Το ημιλογαριθμικό χαρτί. Πάνω στις κάθετες στον άξονα  $xx'$  γραμμές, βρίσκονται οι τιμές των λογαρίθμων των ορισμάτων που είναι σημειωμένα. (Εκεί που γράφει 0.7 βρίσκεται ο  $\log_{10} 0.7$ )



**Σχήμα 1.7:** Το λογαριθμικό χαρτί. Οι κάθετες γραμμές και στους δύο άξονες παριστάνουν τους λογαρίθμους των ορισμάτων που είναι σημειωμένα.

μικό χαρτί. Αυτό το χαρτί είναι σαν το μιλιμετρέ. Στο μιλιμετρέ χαρτί κάθε γραμμή ισαπέχει από τις διπλανές της και στους δύο άξονες. Στο ημιλογαριθμικό χαρτί οι γραμμές του ενός άξονα ισαπέχουν μεταξύ τους, όπως στο μιλιμετρέ, ενώ οι γραμμές του άλλου άξονα παριστάνουν τις θέσεις των λογαρίθμων ισαπεχουσών ορισμάτων τους των λογαρίθμων τους. Π.χ. οι γραμμές του ενός άξονα που παριστάνουν ισαπέχουσες αποστάσεις μπορεί να αντιστοιχούν στις τιμές 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 κ.τ.λ. ενώ οι γραμμές του άλλου άξονα που είναι σημειωμένες οι τιμές 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 κ.τ.λ. παριστάνουν τις θέσεις των λογαρίθμων  $\log 0.1$ ,  $\log 0.2$ ,  $\log 0.3$ ,  $\log 0.4$  κ.τ.λ. αντίστοιχα. Έτσι είναι βολική η χρήση του γιατί δε χρειάζεται να βρίσκουμε τους λογαρίθμους και να τους τοποθετούμε πάνω στο διάγραμμα, αλλά τους τοποθετούμε εκεί που μας δείχνουν τα ορίσματα.

Μια άλλη σχέση που μπορεί να αναχθεί σε ευθεία είναι η  $y = Ax^n$ . Λογαριθμίζοντας παίρνουμε  $\log y = \log A + n \log x$ . Αν  $w = \log y$  και  $v = \log x$  τότε έχουμε την ευθεία  $w = \log A + nv$  και με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προσδιορίζουμε τα  $n$  και  $\ln A$ . Τέτοιες γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν εύκολα στο λεγόμενο λογαριθμικό χαρτί που είναι παρόμοιο με το ημιλογαριθμικό, με τη διαφορά ότι στο λογαριθμικό χαρτί και οι δύο άξονες παριστάνουν λογαρίθμους ισαπεχουσών ορισμάτων.

Επισημαίνουμε μια τελευταία παρατήρηση: Οι ιδιότητες των λογαρίθμων μας επιτρέπουν να χειριστούμε τα λογαριθμικά και ημιλογαριθμικά διαγράμματα έτσι ώστε στην αρχή των λογαριθμικών αξόνων να τοποθετείται κάποια δύναμη του 10 (π.χ. 0.01, 0.1, 1, 10, 100 κ.τ.λ.). Το μηδέν δεν μπορεί να παρασταθεί σ' αυτούς τους άξονες. Αν π.χ. ξεκινήσουμε τοποθετώντας στην αρχή των αξόνων 0.1, τότε τοποθετούμε στην επόμενη γραμμή το 0.2, στην επόμενη το 0.3 κ.ο.κ. Όπως είπαμε, αυτά θα παριστάνουν τα  $\log 0.1$ ,  $\log 0.2$ ,  $\log 0.3$  κ.ο.κ. Συνεχίζοντας έτσι θα φτάσουμε στην επόμενη δύναμη 10 (στο παράδειγμά μας στο 1, που θα παριστάνει το  $\log 1$ ). Τότε η επόμενη γραμμή θα παριστάνει το  $\log 2$ , η επόμενη το  $\log 3$ , η επόμενη το  $\log 4$  κ.ο.κ. μέχρι να φτάσουμε στην επόμενη δύναμη του 10 (στο παράδειγμά μας στο 10, που θα παριστάνει το  $\log 10$ ). Η επόμενη γραμμή θα είναι η θέση του  $\log 20$ , η επόμενη του  $\log 30$  κ.ο.κ.

**Μέρος II**

**Πειραματικές Ασκήσεις**



## Κεφάλαιο 2

# Μελέτη της τριβής

### 2.1 Εισαγωγή

Η τριβή είναι μια δύναμη γνωστή σε όλους μας από την καθημερινή εμπειρία. Άλλοτε έχει επιθυμητά και άλλοτε ανεπιθύμητα σε μας αποτελέσματα. Χωρίς αυτή δε θα μπορούσε να κινηθεί ένα αυτοκίνητο αλλά και χωρίς αυτή δε θα μπορούσε να σταματήσει. Σίγουρα χωρίς αυτή δε θα μπορούσαμε να βαδίσουμε στο δρόμο αλλά θα γλιστρούσαμε σε κάθε μας προσπάθεια για βάδισμα. Από την άλλη η ύπαρξη της μας υποχρεώνει στη χρήση λιπαντικών στις μηχανές για να την ελαττώσουμε Για να την αποφύγουμε τελείως, είναι αδύνατο.

Η ύπαρξη της τριβής χωρίς την ταυτόχρονη συνειδητοποίηση της ύπαρξής της, οδήγησε τους επιστήμονες της αρχαιότητας και του μεσαίωνα στην Αριστοτέλεια θεώρηση του κόσμου σε ότι αφορά την κίνηση. Πίστευαν δηλαδή ότι για να διατηρηθεί σταθερή η ταχύτητα χρειάζεται η επιβολή δύναμης στο κινούμενο σώμα. Αργότερα, με την επικράτηση της Νευτώνεια θεώρησης, η τριβή αναγνωρίστηκε ως δύναμη εξ αιτίας της οποίας ελαττώνεται η ταχύτητα των σωμάτων όταν σ' αυτά δεν ασκείται άλλη δύναμη που να την αντισταθμίζει. (Θυμηθείτε ότι σύμφωνα με τους νόμους του Νεύτωνα, η ταχύτητα ενός σώματος διατηρείται σταθερή όταν σ' αυτό δεν ασκούνται δυνάμεις ή όταν η συνισταμένη των ασκούμενων δυνάμεων είναι μηδέν).

Από την πειραματική μελέτη, σε μακροσκοπική κλίμακα, προέκυψαν ορισμένα συμπεράσματα για την τριβή, τα οποία συνοψίζονται στα εξής :

- Εμφανίζεται όταν δύο σώματα βρίσκονται σε επαφή. Όταν το υπό μελέτη σώμα κινείται, η φορά της τριβής είναι αντίθετη από την ταχύτητά του. Όταν είναι ακίνητο, είναι αντίθετη από την παράλληλη στις εφαιπόμενες επιφάνειες συνιστώσα της δύναμης που τείνει να το κινήσει.
- Είναι ανάλογη της κάθετης δύναμης που ασκείται στο σώμα ως αποτέλεσμα της αντίδρασης από την επαφή του με την άλλη επιφάνεια.
- Δεν εξαρτάται από το μέγεθος των τριβόμενων επιφανειών
- Εξαρτάται από τη φύση των τριβόμενων επιφανειών

Επομένως αν  $N$  είναι η κάθετη δύναμη τότε η τριβή  $T$  είναι ανάλογη του  $N$ . Άρα  $T = \mu N$ , όπου  $\mu$  ένας συντελεστής αναλογίας που ονομάζεται **συντελεστής τριβής**.

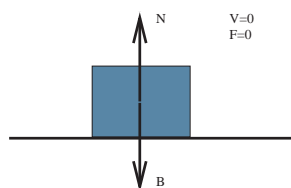
Επειδή η κάθετη δύναμη  $N$  δεν εξαρτάται από τη φύση των τριβόμενων επιφανειών, (αλλά η τριβή  $T$  εξαρτάται απ' αυτή), θα πρέπει ο συντελεστής τριβής να έχει εξάρτηση από τη φύση τους.

## 2.2 Θεωρητική προσέγγιση

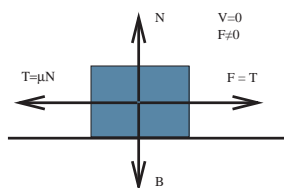
Ας υποθέσουμε ότι ένα σώμα βάρους  $B$  βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο ακίνητο. Οι δυνάμεις που ασκούνται σ' αυτό είναι το βάρος του  $B$  και η κάθετη αντίδραση του εδάφους  $N$ . Επειδή το σώμα είναι ακίνητο, η συνισταμένη των δυνάμεων θα είναι μηδέν και επομένως  $N=B$  (σχ.1).

Αν ασκήσουμε μια μικρή οριζόντια δύναμη  $F$  στο σώμα ώστε να μην είναι αρκετή να το κινήσει, τότε (επειδή και πάλι η ακινησία προέρχεται από το μηδενισμό της συνισταμένης δύναμης) η τριβή  $T$  θα πρέπει να είναι ίση με την ασκούμενη δύναμη  $F$ . Όμως  $T=\mu N$  και  $N=B$ , επομένως  $T=\mu B$  και επειδή  $T=F$ , θα έχουμε  $F=\mu B$  (σχ.2).

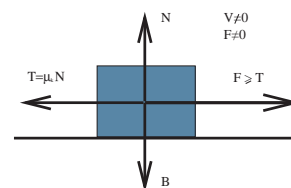
Επειδή το βάρος  $B$  του σώματος είναι σταθερό, όσο αυξάνουμε τη δύναμη  $F$  τόσο πρέπει να αυξάνει και το  $\mu$ . Επομένως όσο το σώμα είναι ακίνητο ο συντελεστής τριβής είναι ανάλογος της οριζόντιας δύναμης που τείνει να κινήσει το σώμα. Η τριβή σ' αυτή την περίπτωση ονομάζεται **στατική τριβή**. Η μέγιστη τιμή του συντελεστή τριβής, που αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή της οριζόντιας δύναμης που πρέπει να ασκήσουμε στο ακίνητο σώμα ώστε να αρχίσει να κινείται, λέγεται **συντελεστής στατικής τριβής**  $\mu_s$ .



**Σχήμα 2.1:** Χωρίς εξωτερική δύναμη



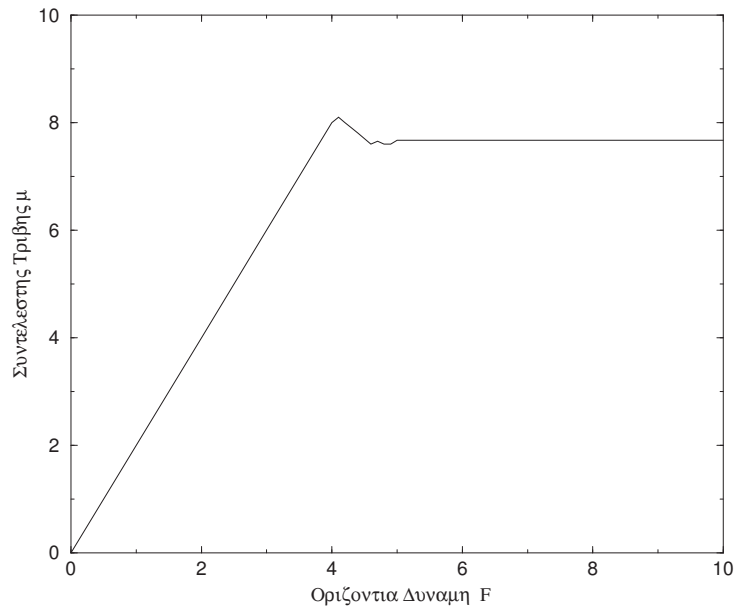
**Σχήμα 2.2:** Με μικρή εξωτερική δύναμη το σώμα δεν κινείται



**Σχήμα 2.3:** Η εξωτερική δύναμη γίνεται μεγαλύτερη από την τριβή και το σώμα κινείται

Είναι προφανές ότι όταν αυξάνουμε σταδιακά τη δύναμη  $F$ , κάποια στιγμή το σώμα θα αρχίσει να κινείται και επομένως δε θα χρειάζεται να προσφέρουμε επιπλέον δύναμη για να επιτύχουμε την κίνησή του. Όταν η δύναμη  $F$  γίνει τόση ώστε να τεθεί το σώμα σε κίνηση, το σώμα θα αρχίσει να επιταχύνεται. Μειώνοντας τότε τη δύναμη  $F$  μπορούμε να επιτύχουμε την ευθύγραμμη ομαλή κίνηση του σώματος (δηλ. η ταχύτητά του θα σταθεροποιηθεί) (σχ.3). Ο συντελεστής τριβής, για αυτή την οριακή περίπτωση που επιτυγχάνεται σταθεροποίηση της ταχύτητας, ονομάζεται **συντελεστής τριβής ολίσθησης**  $\mu_k$ . Αν αναλογιστεί κανείς ότι, τόσο υπό κίνηση με σταθερή ταχύτητα, όσο και υπό ακινησία (που είδαμε προηγουμένως), η συνισταμένη των δυνάμεων είναι μηδέν, συνάγει αμέσως το ίδιο συμπέρασμα που βρήκαμε στην περίπτωση της στατικής τριβής, ότι δηλ. στην οριακή περίπτωση που η ταχύτητα σταθεροποιείται  $F = T = \mu_k B$ . Για όσο διάστημα το σώμα κινείται, η τριβή που θα του ασκείται ονομάζεται **τριβή ολίσθησης** και είναι ίση με  $T = \mu_k B$  αφού τόση είναι η δύναμη που χρειάζεται για να διατηρηθεί σταθερή η ταχύτητα του σώματος. Αν στο σώμα ασκηθεί μεγαλύτερη δύναμη από την τριβή ολίσθησης, προφανώς το σώμα θα επιταχυνθεί. Επομένως η τριβή (και κατ' επέκταση ο συντελεστής τριβής) μεταβάλλεται με





**Σχήμα 2.4:** Γραφική παράσταση του συντελεστή τριβής ως συνάρτηση της εξωτερικής δύναμης

την οριζόντια δύναμη  $F$  έτσι όπως φαίνεται στην παραπάνω γραφική παράσταση.

Γενικά ισχύει :  $\mu_s > \mu_k$

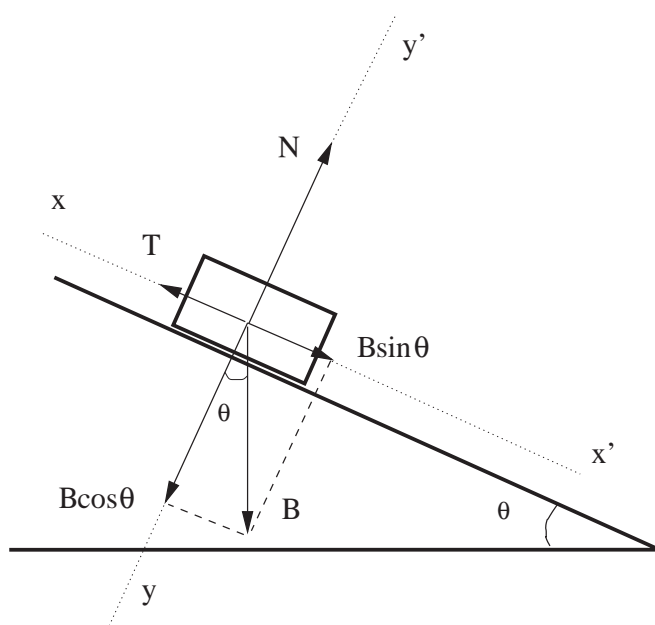
(ΠΡΟΣΟΧΗ: Όταν η κίνηση δε γίνεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο τότε  $N \neq B$  και κατά συνέπεια  $T \neq \mu B$ .)

### 2.3 Πειραματικό μέρος

Στο πείραμα που θα κάνουμε θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε πειραματικά τις ιδιότητες της τριβής που αναφέρονται στην εισαγωγή και να μετρήσουμε το συντελεστή στατικής τριβής και τριβής ολίσθησης. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την πειραματική συσκευή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 5. Η πειραματική αυτή συσκευή αποτελείται από ένα κεκλιμένο επίπεδο το οποίο στην άκρη του φέρει μοιρογνωμόνιο που μας επιτρέπει να μετράμε την κλίση του.

Ας υποθέσουμε ότι η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι  $\theta$  και ας αναλύσουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα σε δυο άξονες, ένα κάθετο στην κεκλιμένη επιφάνεια (έστω  $yy'$ ) και ένα οριζόντιο σ' αυτή (έστω  $xx'$ ), όπως φαίνεται στο σχήμα. Η αντίδραση  $N$  από το κεκλιμένο επίπεδο (κάθετη δύναμη) θα είναι παράλληλη στον  $yy'$  άξονα ενώ το βάρος  $B$  θα πρέπει να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μια  $B_y = B \cos \theta$  κατά τον άξονα  $yy'$  και μια  $B_x = B \sin \theta$  κατά τον άξονα  $xx'$ . Επειδή στον άξονα  $yy'$  δεν παρατηρείται κίνηση, θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων κατ' αυτό τον άξονα να είναι μηδέν, επομένως  $N = B \cos \theta$ . Αν στον άξονα  $xx'$  δεν παρατηρείται κίνηση, η συνισταμένη των δυνάμεων κατ' αυτό τον άξονα θα είναι επίσης μηδέν και επομένως η συνιστώσα του βάρους κατ' αυτή τη διεύθυνση θα εξισορροπεί την τριβή  $T$ , η οποία θα έχει φορά αντίθετη από τη δύναμη που τείνει να κινήσει το σώμα, δηλαδή τη συνιστώσα  $B_x$  του βάρους. Επομένως θα έχουμε δύο εξισώσεις για τις δυνάμεις:

$$N = B \cos \theta, \quad \text{για τον άξονα } yy'$$



**Σχήμα 2.5:** Η πειραματική συσκευή. Η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου καθορίζει το συντελεστή τριβής

$$T = B \sin \theta, \quad \text{για τον άξονα } xx'$$

όμως  $T = \mu N$  και επομένως  $T = \mu B \cos \theta$  και αφού  $T = B \sin \theta$  θα έχουμε  $\mu B \cos \theta = B \sin \theta$ . Επομένως

$$\mu = \tan \theta \quad (2.1)$$

Με άλλα λόγια ο συντελεστής τριβής είναι ίσος με την κλίση (εφαπτομένη της γωνίας) του κεκλιμένου επιπέδου.

Ας ξεκινήσουμε λοιπόν να μετρήσουμε, κατ' αρχήν, το συντελεστή στατικής τριβής ανάμεσα σε κάποιο από τα σώματα που έχουμε στη διάθεσή μας και στην ξύλινη επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου, βασιζόμενοι στην παραπάνω τεχνική. Έχουμε στη διάθεσή μας πλακίδια από σίδηρο, αλουμίνιο και ξύλο. Θα οριζοντιώσουμε το 'κεκλιμένο' επίπεδο και θα τοποθετήσουμε πάνω σ' αυτό το σιδερένιο πλακίδιο. Θα αρχίσουμε σιγά σιγά να αυξάνουμε την κλίση του επιπέδου μέχρι το σώμα να τεθεί σε κίνηση. Η κλίση του κεκλιμένου επιπέδου (δηλ. η εφαπτομένη της γωνίας κλίσης) για την οποία το σώμα θα αρχίσει να κινείται θα είναι ίση με το συντελεστή στατικής τριβής  $\mu_s$ . (Γιατί;) Κάντε αυτή τη διαδικασία 10 φορές και υπολογίστε το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση των μετρήσεών σας για το  $\mu_s$ . Βρείτε ποιος είναι ο συντελεστής στατικής τριβής και το σφάλμα της μέτρησης.

Κάντε την ίδια διαδικασία με το σώμα από αλουμίνιο και με το σώμα από ξύλο. Τι συμπέρασμα βγάξετε για την εξάρτηση του συντελεστή στατικής τριβής από τη φύση των τριβόμενων επιφανειών;

Αυξήστε το βάρος του σιδερένιου πλακιδίου, κολλώντας πάνω του με σελοτέιπ κάποια από τα υπόλοιπα σώματα και μετρήστε ξανά το συντελεστή στατικής τριβής. Τι συμπέρασμα βγάξετε για την εξάρτηση του συντελεστή στατικής τριβής από τη μάζα των τριβόμενων σωμάτων;

Ανάμεσα στα πλακίδια που σας δίνονται υπάρχει και ένα ξύλινο πλακίδιο με διπλάσια επιφάνεια από το πρώτο. Κάνοντας την ίδια δουλειά, μετρήστε το συντελεστή τριβής για αυτό το πλακίδιο και υπολογίστε το σφάλμα της μέτρησης. Τι συμπέρασμα βγάζετε για την εξάρτηση του συντελεστή τριβής από την επιφάνεια των τριβόμενων επιφανειών;

Προσαρμόστε στην επιφάνεια του κεκλιμένου επιπέδου μια σελίδα χαρτί. Μετρήστε το συντελεστή στατικής τριβής ανάμεσα στο χαρτί και το σιδερένιο πλακίδιο. Κάντε τα ίδια βήματα που κάνατε και προηγουμένως. Είναι αναμενόμενη η τιμή του συγκρινόμενη με την τιμή που βρήκατε προηγουμένως για το συντελεστή στατικής τριβής ανάμεσα στις δύο ξύλινες επιφάνειες;

Σε κάθε ομάδα μετρήσεων, χρησιμοποιήστε το κριτήριο *Chauvenet* για να απορρίψετε τυχούσες ακραίες μετρήσεις.

Υπενθυμίζουμε ότι η μεταφορά σφαλμάτων από τη μέτρηση της γωνίας, στη μέτρηση της εφαπτομένης της γωνίας συνδέεται με τη σχέση

$$\delta\mu = \delta(\tan\theta) = \frac{1}{\cos^2\theta} \frac{\pi}{180^\circ} \delta\theta \quad (2.2)$$

όπου η γωνία  $\theta$  μετριέται σε μοίρες.

## 2.4 Βιβλιογραφία

1. Halliday-Resnick Φυσική τομ.Α
2. Young Φυσική τομ.Α
3. Serway Φυσική τομ.Α

επίσης χρήσιμες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στις παρακάτω διευθύνσεις του διαδικτύου

1. [hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/class/physcilab/frictionex.html](http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/class/physcilab/frictionex.html)
2. [www.phy.olemiss.edu/~thomas/weblab/221\\_Lab\\_Manual\\_sum2002](http://www.phy.olemiss.edu/~thomas/weblab/221_Lab_Manual_sum2002)
3. [www.at-bristol.org.uk/Newton/experiment.htm](http://www.at-bristol.org.uk/Newton/experiment.htm)
4. [www.physlab.gatech.edu/physlab/2501/lab4/labmanual.html](http://www.physlab.gatech.edu/physlab/2501/lab4/labmanual.html)
5. [zebu.uoregon.edu/1999/ph161/friction.html](http://zebu.uoregon.edu/1999/ph161/friction.html)
6. [www\\_hockey.tripod.com](http://www_hockey.tripod.com)



## Κεφάλαιο 3

# Μελέτη της ελεύθερης πτώσης

### 3.1 Εισαγωγή

Μέχρι την εποχή που διατυπώθηκε ο νόμος της παγκόσμιας έλξης, ο κόσμος πίστευε ότι τα σώματα έλκονται από τη γη με δύναμη ανάλογη της μάζας τους. Σ' αυτό το συμπέρασμα τους οδηγούσαν τα φαινόμενα της καθημερινότητας, αφού ένα φτερό έπεφτε πολύ πιο αργά απ' ό,τι ένα κομμάτι σίδηρο και δεν είχαν ακόμα κατανοήσει ότι η αντίσταση του αέρα είναι εκείνη που δημιουργεί αυτή τη διαφορά στο χρόνο πτώσης μεταξύ των ελαφρότερων από τα βαρύτερα σώματα. Δεν είχαν επίσης και δυνατότητα μέτρησης του χρόνου με κάποια ακρίβεια μεγαλύτερη του δευτερόλεπτου και αυτό δυσχέραινε τις μετρήσεις χρόνου που χρειαζόταν γι' αυτά τα πειράματα. Η πειραματική επαλήθευση ότι τα σώματα που πέφτουν στη γη από το ίδιο ύψος, φτάνουν στην γη στον ίδιο χρόνο ανεξάρτητα από τη μάζα τους, ήρθε όταν το πείραμα της πτώσης δύο σωμάτων με διαφορετική μάζα έγινε στο κενό. Μέσα σε ένα γυάλινο σωλήνα τοποθετήθηκαν σώματα διαφορετικής μάζας (π.χ. ένα πούπουλο και μια σιδερένια μπάλα) και στη συνέχεια αφαιρέθηκε ο αέρας που υπήρχε μέσα στο σωλήνα με μια αντλία κενού. Αναποδογυρίζοντας το σωλήνα, τα δυο σώματα έφταναν στο άλλο άκρο του σωλήνα στον ίδιο χρόνο.

Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης η δύναμη  $F$  με την οποία έλκονται δύο σώματα με μάζες  $m_1$  και  $m_2$  που βρίσκονται σε μια απόσταση  $r$  μεταξύ τους, είναι ίση με

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.1)$$

όπου  $G$  η σταθερά παγκόσμιας έλξης της οποίας η τιμή είναι  $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ Ntm}^2/\text{kg}^2$ . Αν λοιπόν,  $m$  είναι η μάζα ενός σώματος,  $M$  είναι η μάζα της γης και  $R$  η απόσταση του σώματος από το κέντρο της γης, τότε, σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης, το βάρος  $B$  του σώματος αυτού (δηλ. η δύναμη με την οποία το έλκει η γη), θα είναι

$$B = G \frac{mM}{R^2} \quad (3.2)$$

Όμως σύμφωνα με τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα η δύναμη που ασκείται σ' ένα σώμα είναι ίση με τη μάζα του σώματος επί την επιτάχυνση που του προσδίδει. Δηλ.  $F = ma$ , όπου  $a$  η επιτάχυνση του σώματος. Επομένως αν συνδυάσουμε τις τελευταίες αυτές σχέσεις προκύπτει ότι  $a = G \frac{M}{R^2}$ . Επειδή, για μετρήσεις που γίνονται σε ύψος κοντά στην επιφάνεια της γης, η απόσταση  $R$  του σώματος από το κέντρο της γης δεν

μεταβάλλεται ιδιαίτερα, μπορεί να θεωρηθεί ίση με την ακτίνα  $R_T$  της γης. Έτσι η επιτάχυνση  $a$  είναι σταθερή για μετρήσεις κοντά στην επιφάνεια της γης και, (αν κάνουμε τις πράξεις), η τιμή της (με μικρές αποκλίσεις ανάλογα με το γεωμετρικό πλάτος και το υψόμετρο στο οποίο βρισκόμαστε) βγαίνει να είναι ίση με  $9.81m/sec^2$ . Συμβολίζουμε τη σταθερή αυτή ποσότητα  $g$  και την ονομάζουμε **επιτάχυνση της βαρύτητας**.

### 3.2 Ελεύθερη πτώση

Με τον όρο ελεύθερη πτώση εννοούμε την πτώση σωμάτων στα οποία μοναδική δύναμη που δρα πάνω τους είναι η βαρύτητα. Ο όρος ελεύθερη πτώση εισήχθη για πρώτη φορά από το Γαλιλαίο, ο οποίος στην προσπάθειά του να αποδείξει ότι στην ελεύθερη πτώση ο χρόνος πτώσης είναι ανεξάρτητος από τη μάζα των σωμάτων που πέφτουν, έκανε πειράματα, ρίχνοντας σώματα διαφορετικής μάζας από τον πύργο της Πίζας και τα είδε να φτάνουν στη γη στον ίδιο χρόνο. (Αυτό τουλάχιστον λέει ο θρύλος).

Όπως είδαμε στην εισαγωγή, όταν η πτώση γίνεται μέσα σε μικρό ύψος συγκρινόμενο με την ακτίνα της γης, η επιτάχυνση της βαρύτητας μπορεί να θεωρηθεί σταθερή και ίση με την τιμή  $g = 9.81m/sec^2$ . Γνωρίζουμε από το γυμνάσιο ότι υπό αυτές τις συνθήκες (ελεύθερη πτώση στο σταθερό πεδίο βαρύτητας της γης) ισχύουν οι εξής σχέσεις για την ταχύτητα και το διανυθέν διάστημα.

$$y(t) = U_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{και} \quad U(t) = U_0 + g t \quad (3.3)$$

όπου  $y(t)$  είναι η διανυθείσα απόσταση κατά την πτώση και  $U(t)$  η ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή  $t$ .  $U_0$  είναι η αρχική ταχύτητα του σώματος (δηλ. η ταχύτητα τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ).

Με το πείραμα που θα ακολουθήσει θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε πειραματικά την ισχύ αυτών των δύο σχέσεων και να μετρήσουμε τη τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Οι άμεσες μετρήσεις, που θα κάνουμε στο πείραμά μας, σχετίζονται με το χρόνο που θα κάνει ένα σώμα να εκτελέσει μια ελεύθερη πτώση. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε μια σειρά από μετρήσεις  $y_i, t_i, i = 0, 2, \dots, N$  όπου  $t_i$  ο χρόνος που μετρήσαμε ότι χρειάζεται ένα σώμα για να διανύσει απόσταση  $y_i$ , κατά την ελεύθερη πτώση του χωρίς αρχική ταχύτητα και  $N$  ο αριθμός των μετρήσεών μας. Προφανώς η μέτρηση  $y_0 = 0$  για  $t_0 = 0$  προσδιορίζει το αυτονόητο, ότι στο χρόνο  $t_0 = 0$  το σώμα δεν έχει κινηθεί καθόλου και επομένως  $y_0 = 0$ .

### 3.3 Το πείραμα

Όπως είπαμε, το πείραμα συνίσταται στη μέτρηση του χρόνου που απαιτείται για να πέσει ένα σώμα (εν προκειμένω μια μεταλλική σφαίρα) από ένα καθορισμένο ύψος. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε ένα χρονόμετρο ακριβείας που μπορεί να μετρήσει χρόνο με ακρίβεια χιλιοστού του δευτερολέπτου. Το χρονόμετρο έχει δύο διακόπτες. Ο πρώτος διακόπτης έρχεται σε επαφή με τη σφαίρα, στο καθορισμένο ύψος από το οποίο προτίθεστε να αφήσετε τη σφαίρα να πέσει, για να μετρήσετε το χρόνο πτώσης και ενεργοποιεί το χρονόμετρο όταν η σφαίρα αρχίσει να πέφτει. Ο χρόνος αρχίζει να μετράει ακριβώς τη στιγμή που θα αφήσετε τη σιδερένια μπάλα να πέσει από το καθορισμένο ύψος που εσείς έχετε επιλέξει.

Ο δεύτερος διακόπτης βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια που πρόκειται να πέσει η μεταλλική σφαίρα και σταματάει τη μέτρηση του χρόνου ακριβώς τη στιγμή που η σφαίρα έρχεται σε επαφή με την επιφάνεια αυτή. Μετρώντας επομένως, το χρόνο που απαιτείται για να πέσει το σώμα από ένα καθορισμένο ύψος (το οποίο μετράμε) στη συγκεκριμένη επιφάνεια, μπορούμε να φτιάξουμε τη σειρά μετρήσεων για τα διανυθέντα διαστήματα και τους αντίστοιχους χρόνους που χρειάστηκε για να διανυθούν.

Για το σκοπό αυτό κάντε τις ακόλουθες μετρήσεις.

1. Για ύψη 5, 10, 15, 20, ..., 100 cm πάνω από την επιφάνεια - διακόπτη του χρονομέτρου αφήστε 5 φορές τη μεταλλική μπάλα να πέσει και μετρήστε τους αντίστοιχους χρόνους πτώσης. Κάντε στατιστική επεξεργασία των μετρήσεών σας και βρείτε τη μέση τιμή του χρόνου πτώσης από τις 5 μετρήσεις που θα έχετε κάνει για καθένα από τα διαδοχικά ύψη των 5, 10, 15, 20, ..., 100 cm. Βρείτε το σφάλμα της μέσης τιμής
2. Φτιάξτε ένα πίνακα τρεις στήλες. Οι δυο πρώτες θα περιέχουν τα ζευγάρια των μετρήσεων  $(t, y(t))$  και η τρίτη την ποσότητα

$$g = \frac{2y}{t^2} \quad (3.4)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η πτώση προσεγγίζει πολύ καλά την ελεύθερη πτώση χωρίς αρχική ταχύτητα, τότε η επιτάχυνση για τις χρονικές στιγμές που θα περιγράφονται στον πίνακα, θα είναι αυτή που θα περιέχεται στην τρίτη στήλη και θα πρέπει να προσεγγίζει πολύ καλά την επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$ . Από τη μέση τιμή των τιμών που θα βρείτε για τις επιταχύνσεις, βρείτε την επιτάχυνση της βαρύτητας. Προσδιορίστε το σφάλμα της μέτρησης από την τυπική απόκλιση της μέσης τιμής και από τα αρχικά σφάλματα των μετρήσεων και προσδιορίστε το σφάλμα κάθε μέτρησης.

3. Τοποθετήστε σε μιλιμετρέ χαρτί (ή με κάποιο πρόγραμμα γραφικών σε υπολογιστή) τις τιμές του ύψους πτώσης (διανυθέντος διαστήματος)  $y$  ως προς το τετράγωνο του χρόνου πτώσης  $t^2$ . Δείτε αν η γραφική παράσταση  $y(t^2)$  μπορεί να προσεγγιστεί με ευθεία. Αν η πτώση ήταν πραγματικά ελεύθερη (δηλ. αν δεν υπήρχαν οι αντιστάσεις του αέρα, που αν και μικρές δεν παύουν να υπάρχουν), το ύψος πτώσης θα ήταν  $y = \frac{1}{2}gt^2$ . Επομένως η ευθεία  $y = y(t^2)$  θα έχει κλίση  $\frac{1}{2}g$ . Με χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων βρείτε την κλίση της βέλτιστης αυτής ευθείας που προσαρμόζεται στα πειραματικά δεδομένα και μέσω αυτής προσδιορίστε την επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$ .
4. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια μικρή αρχική ταχύτητα στις μετρήσεις σας τότε το διανυθέν διάστημα θα δίνεται από τη σχέση 3. Διαιρώντας με  $t$  παίρνουμε

$$\frac{y(t)}{t} = U_0 + \frac{1}{2}gt \quad (3.5)$$

Όπως βλέπουμε η σχέση αυτή είναι μια ευθεία με κλίση  $1/2g$  και σταθερά  $U_0$ , η οποία μπορεί να προσδιοριστεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Τοποθετήστε σε μιλιμετρέ χαρτί (ή με κάποιο πρόγραμμα γραφικών σε υπολογιστή) τα πειραματικά σημεία  $(t, y/t)$  και τη βέλτιστη ευθεία που προκύπτει από τη

μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Βρείτε μ' αυτό τον τρόπο την τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας. (Για δική σας διευκόλυνση, προσθέστε μια ακόμα στήλη στον πίνακα που φτιάξατε και βάλτε σ' αυτή το πηλίκο  $y/t$ .)

5. Στη συνέχεια θεωρήστε ότι η πτώση δεν είναι ακριβώς ελεύθερη πτώση αλλά οι επιταχύνσεις που βρίσκουμε από τη σχέση  $g = 2y/t^2$  έχουν και μια γραμμική εξάρτηση απ' το χρόνο. (Δηλ.  $2y/t^2 = g + \lambda t$  όπου  $\lambda$  μια παράμετρος που συνδέεται με την αντίσταση του αέρα. Τοποθετήστε σε μιλιμετρέ χαρτί (ή με κάποιο πρόγραμμα γραφικών σε υπολογιστή) τις τιμές της επιτάχυνσης ως συνάρτηση του χρόνου, που βρήκατε. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, προσαρμόζοντας τη βέλτιστη ευθεία  $a(t) = g + \lambda t$  στα πειραματικά δεδομένα και προσδιορίστε έτσι την τιμή του  $g$ . Συμφωνεί το αποτέλεσμα που βρήκατε τώρα, με το προηγούμενο στο οποίο θεωρήσατε την πτώση ελεύθερη, μέσα στα όρια σφάλματος;

### 3.4 Βιβλιογραφία

Για εκτενέστερη μελέτη μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα

1. Halliday-Resnick Φυσική τομ.Α
2. Young Φυσική τομ.Α
3. Serway Φυσική τομ.Α

Επίσης χρήσιμες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στις παρακάτω διευθύνσεις του διαδικτύου

1. [www.learner.org/exhibits/parkphysics/freefall.html](http://www.learner.org/exhibits/parkphysics/freefall.html)
2. [www.glenbrook.k12.il.us/gbssci/phys/Class/newtlaws/u2l3e.html](http://www.glenbrook.k12.il.us/gbssci/phys/Class/newtlaws/u2l3e.html)
3. [www.glenbrook.k12.il.us/gbssci/phys/Class/1DKin/U1L5a.html](http://www.glenbrook.k12.il.us/gbssci/phys/Class/1DKin/U1L5a.html)
4. [www.iit.edu/~smart/martcar/lesson2/free-fall-experiment.html](http://www.iit.edu/~smart/martcar/lesson2/free-fall-experiment.html)
5. [www.physics.utoronto.ca/~codoban/Lab/LAB\\_TEST\\_PLASTIC\\_BALL/freefall-labtest.html](http://www.physics.utoronto.ca/~codoban/Lab/LAB_TEST_PLASTIC_BALL/freefall-labtest.html)
6. [www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/mofall.html](http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/mofall.html)
7. [cc.yzu.edu/~jeclymer/labmanual1/Experiment\%203.PDF](http://cc.yzu.edu/~jeclymer/labmanual1/Experiment\%203.PDF)
8. [oldsci.eiu.edu/physics/DDavis/1150/02-1DMtn/FreeFall.html](http://oldsci.eiu.edu/physics/DDavis/1150/02-1DMtn/FreeFall.html)
9. [www.iit.edu/~martcar/lesson2.htm](http://www.iit.edu/~martcar/lesson2.htm)
10. [web.pas.rochester.edu/~physlabs/manuals/experiment02/Experiment02Entire.pdf](http://web.pas.rochester.edu/~physlabs/manuals/experiment02/Experiment02Entire.pdf)



## Κεφάλαιο 4

# Μέτρηση ειδικής θερμότητας υλικών

### Σκοπός

Σκοπός αυτής της εργαστηριακής άσκησης είναι ο προσδιορισμός της θερμοχωρητικότητας του θερμιδομέτρου και της ειδικής θερμότητας διαφόρων υλικών με τη μέθοδο των μιγμάτων.

### 4.1 Θεωρητικό μέρος

Η ύπαρξη της θερμοκρασίας και η μέτρησή της εξαρτάται από την ισχύ μιας γενίκευσης που ονομάζεται **Μηδενικός νόμος της Θερμοδυναμικής**. Σύμφωνα με αυτόν τον νόμο *εάν ένα σύστημα A βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με ένα σύστημα B (με την έννοια ότι δεν συμβαίνει καμία αλληλαγή όταν βρίσκονται σε θερμική επαφή) και εάν το B βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το C, τότε το C βρίσκεται επίσης σε θερμική ισορροπία με το A, ανεξάρτητα από την σύσταση των συστημάτων*. Ο Μηδενικός νόμος συνεπάγεται την ύπαρξη μιας ιδιότητας που είναι ανεξάρτητη από τη σύσταση του συστήματος και υπογραμμίζει την ύπαρξη μιας προϋπόθεσης για θερμική ισορροπία. Την ιδιότητα αυτή ονομάζουμε θερμοκρασία του συστήματος.

**Τρόποι διάδοσης της θερμότητας** (αναφορικά):

1. Με αγωγή
2. Με μεταφορά ή με ρεύματα
3. Με μεταβίβαση
4. Με ακτινοβολία

Είναι προφανές ότι η ποσότητα της θερμότητας που πρέπει να προσδώσουμε σε ένα υλικό ορισμένης μάζας για να αυξήσουμε τη θερμοκρασία του κατά ορισμένους βαθμούς εξαρτάται από το υλικό. Για παράδειγμα, η θερμότητα που πρέπει να προσδώσουμε σε  $1\text{Kg}$  νερού για να αυξήσουμε τη θερμοκρασία του κατά  $1^\circ\text{C}$  είναι  $4186\text{J}$ , ενώ για να αυξήσουμε κατά  $1^\circ\text{C}$  τη θερμοκρασία  $1\text{Kg}$  χαλκού πρέπει να του προσδώσουμε μόνο  $387\text{J}$ .

Υλικό	Ειδική θερμότητα $c$		Θερμοχωρητικότητα ανά <i>mole</i> $J/(mole^{\circ}C)$
	$J/(Kgr^{\circ}C)$	$cal/(gr^{\circ}C)$	
<u>Στερεά</u>			
Αλουμίνιο	900	0.215	24.3
Βηρύλιο	1830	0.436	16.5
Κάδμιο	230	0.055	25.9
Χαλκός	387	0.0924	24.5
Γερμάνιο	322	0.077	23.4
Χρυσός	129	0.0308	25.4
Σίδηρος	448	0.107	25.0
Μόλυβδος	128	0.0305	26.4
Πυρίτιο	703	0.168	19.8
Άργυρος	234	0.056	25.4
Ορείχαλκος	380	0.092	
<u>Εύλο</u>			
Υαλος	837	0.200	
Πάγος ( $-5^{\circ}C$ )	2090	0.50	
Μάρμαρο	860	0.21	
<u>Υγρά</u>			
Αιθυλική αλκοόλη	2400	0.58	
Υδράργυρος	140	0.033	
Υδωρ ( $15^{\circ}C$ )	4186	1.00	

**Πίνακας 4.1:** Ειδικές θερμότητες υλικών στους  $25^{\circ}C$  και ατμοσφαιρική πίεση  $1atm$

Ορίζουμε ως **θερμοχωρητικότητα**  $C$ , ενός αντικειμένου ορισμένης μάζας τη θερμότητα (θερμική ενέργεια) εκείνη που πρέπει να προσδώσουμε σε αυτό ώστε να αυξήσουμε τη θερμοκρασία του κατά έναν βαθμό Κελσίου.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, όταν προσδώσουμε  $Q$  μονάδες θερμότητας σε ένα αντικείμενο, αυξάνουμε την θερμοκρασία του κατά  $\Delta T$ , τότε

$$Q = C\Delta T \quad (4.1)$$

Είναι όμως προφανές ότι η θερμοχωρητικότητα ενός αντικειμένου είναι ανάλογη προς τη μάζα του. Για τον λόγο αυτό ορίζουμε τη θερμοχωρητικότητα ανά μονάδα μάζας ενός υλικού και η ποσότητα αυτή ονομάζεται ειδική θερμότητα ή ειδική θερμοχωρητικότητα,  $c$ :

$$c = \frac{C}{m} \quad (4.2)$$

Στον Πίνακα 1 αναγράφονται οι τιμές της ειδικής θερμότητας διαφόρων υλικών σε συνήθη θερμοκρασία δωματίου και ατμοσφαιρική πίεση.

Τώρα λοιπόν μπορούμε να εκφράσουμε την θερμική ενέργεια  $Q$  που προσδόθηκε σε ένα σώμα μάζας  $m$  και ειδικής θερμότητας  $c$  από το περιβάλλον και του μετέβαλε

την θερμοκρασία κατά  $\Delta T = T_f - T_i$  ως:

$$Q = mc\Delta T \quad (4.3)$$

Για παράδειγμα, η θερμική ενέργεια που πρέπει να προσδώσουμε για να αυξηθεί η θερμοκρασία  $0.5\text{Kg}$  νερού κατά  $3^\circ\text{C}$  ισούται με  $(0.5\text{Kg}) \times (4186\text{J}/(\text{kg}^\circ\text{C})) \times (3^\circ\text{C}) = 6280\text{J}$ . Πρέπει να τονιστεί ότι όταν παρέχουμε θερμότητα στο υλικό, η  $Q$  και η  $\Delta T$  είναι θετικές και επομένως η θερμοκρασία αυξάνεται. Όταν όμως παίρνουμε, δηλαδή αφαιρούμε, θερμότητα από ένα σώμα, η  $Q$  και η  $\Delta T$  είναι αρνητικές και επομένως η θερμοκρασία ελαττώνεται.

Χρήσιμη ποσότητα είναι και η θερμοχωρητικότητα ανα μολ ( $c/mole$ ) ενός υλικού. Έτσι, εάν το υλικό αποτελείται από  $n$  mole (γραμμομόρια), η θερμοχωρητικότητά του ανά mole είναι  $c/n$ . Κατά ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την θερμοχωρητικότητα ανά γραμμοάτομο ( $c/gr - at$ ).

Πρέπει να θυμόμαστε ότι η θερμοχωρητικότητα πολλών υλικών μεταβάλλεται λίγο συναρτήσει της θερμοκρασίας. Εάν όμως οι διαφορές θερμοκρασιών ( $\Delta T$ ) δεν είναι πολύ μεγάλες, μπορούμε να αγνοήσουμε τη μεταβολή αυτή και να θεωρήσουμε ότι η θερμοχωρητικότητα είναι σταθερή. Λόγου χάρη, η ειδική θερμότητα του νερού μεταβάλλεται μόνο κατά 1% ανάμεσα στους  $0^\circ\text{C}$  και  $100^\circ\text{C}$ . Θα αγνοήσουμε τις μεταβολές αυτές γενικά, εκτός εάν αναφέρουμε σαφώς το αντίθετο.

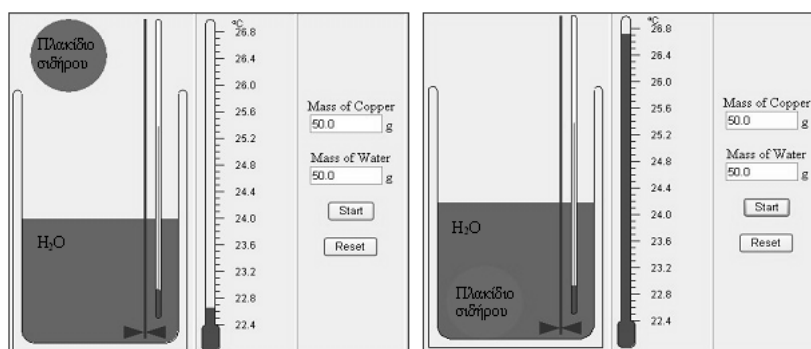
Όταν μετρούμε ειδικές θερμότητες, οι τιμές που βρίσκουμε εξαρτώνται από την πίεση και τον όγκο. Γενικά, τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά όταν κάνουμε τις μετρήσεις υπό σταθερή πίεση ( $c_p$ ) από αυτές που κάνουμε με σταθερό όγκο ( $c_v$ ). Για τα στερεά και τα υγρά η διαφορά είναι το πολύ μερικά εκατοστημόρια και έτσι συνήθως την αγνοούμε. Αντίθετα οι ειδικές θερμότητες των αερίων είναι αρκετά διαφορετικές κάτω από σταθερή πίεση εν συγκρίσει με αυτές που είναι παρμένες με σταθερό όγκο.

Αξίζει τον κόπο να αναφέρουμε ότι το νερό έχει την υψηλότερη ειδική θερμότητα από τα περισσότερα υλικά που υπάρχουν στη Γη. Σε μεγάλο βαθμό, οι ήπιες θερμοκρασίες πολλών περιοχών που βρίσκονται κοντά σε μεγάλα σώματα νερού οφείλονται στο γεγονός αυτό. Ακόμα για αυτό το λόγο το χειμώνα το νερό χρησιμοποιείται ως υλικό θέρμανσης (αποθήκευσης θερμικής ενέργειας) στα καλοριφέρ.

### Μετρήσεις ειδικής θερμότητας - θερμιδομετρία

Μια διαδεδομένη μέθοδος μέτρησης ειδικής θερμότητας στερεών και υγρών είναι η θερμιδομετρική. Κατά τη μέθοδο αυτή, πρώτα θερμαίνουμε το υλικό (του οποίου θέλουμε να μετρήσουμε την ειδική θερμότητα) σε μια γνωστή θερμοκρασία και κατόπιν το βάζουμε σε ένα δοχείο που είναι γεμάτο με νερό γνωστής μάζας και θερμοκρασίας (μπορεί να γίνει και το αντίστροφο ανάλογα με την πειραματική διάταξη που διαθέτουμε). Αφού το νέο πια σύστημα ισορροπήσει θερμικά, μετρούμε τη θερμοκρασία του νερού. Στην όλη διαδικασία κάνουμε αμελητέο έργο (πχ. το βύθισμα του υλικού στο νερό), επομένως ο νόμος διατήρησης της ενέργειας ορίζει ότι η θερμότητα που μεταφέρεται από το υλικό (του οποίου την ειδική θερμότητα μετρούμε) απορροφάται από το νερό. Η συσκευή αυτή ονομάζεται θερμιδόμετρο.

Ας υποθέσουμε ότι το υλικό του οποίου την ειδική θερμότητα θέλουμε να μετρήσουμε έχει μάζα  $m_x$ , ειδική θερμότητα  $c_x$  και ότι η αρχική του θερμοκρασία ήταν  $T_x$ . Παρομοίως, και  $m_w$ ,  $c_w$  και  $T_w$  είναι τα αντίστοιχα μεγέθη του νερού. Εάν η τελική θερμοκρασία, αφού το νέο σύστημα έχει ισορροπήσει θερμικά, είναι  $T$ , τότε



**Σχήμα 4.1:** Απλουστευμένο σχηματικό διάγραμμα διαδικασίας όπου έχει θερμανθεί το σώμα του οποίου ζητάμε να βρούμε την ειδική θερμότητα: Σε δοχείο Dewar που περιέχει 50gr νερού σε θερμοκρασία δωματίου προστίθεται ένα πλακίδιο σιδήρου 50gr και θερμοκρασίας 100°C. Όταν το σύστημα έρθει σε θερμική ισορροπία μετρείται η καινούρια θερμοκρασία ( $\Delta T$ ).

εφαρμόζουμε την  $Q = mc\Delta T$  και βρίσκουμε ότι το νερό «κέρδισε» θερμότητα ίση με  $m_w c_w (T - T_w)$  και ότι το υλικό «έχασε» θερμότητα ίση με  $-m_x c_x (T - T_x)$ . Εάν υποθέσουμε ότι το σύστημα νερού - υλικού είναι μονωμένο (δεν χάνει ούτε κερδίζει θερμότητα από το περιβάλλον), μπορούμε να γράψουμε τον νόμο διατήρησης της ενέργειας εξισώνοντας το κέρδος ενέργειας του νερού με την απώλεια ενέργειας του υλικού:

$$m_w c_w (T - T_w) = -m_x c_x (T - T_x) \quad (4.4)$$

Λύνουμε ως προς  $c_x$  και έχουμε:

$$c_x = \frac{m_w c_w (T - T_w)}{m_x (T_x - T)} \quad (4.5)$$

Σε μετρήσεις μεγάλης ακριβείας πρέπει να λάβουμε υπόψη στους υπολογισμούς μας και το δοχείο διότι και αυτό απορροφά θερμότητα. Πρέπει λοιπόν να γνωρίζουμε τη μάζα του και την ειδική θερμότητα του. Εάν όμως η μάζα του νερού είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του δοχείου, συνήθως μπορούμε να αγνοήσουμε τη θερμότητα που απορροφήθηκε από το δοχείο. Τέλος, πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να μη θερμαίνουμε τον γύρο από το θερμιδόμετρο χώρο. Έτσι αν λάβουμε υπόψη και το θερμιδόμετρο στους υπολογισμούς μας ακολουθεί η πιο ολοκληρωμένη έκφραση των προηγούμενων τύπων η οποία είναι γνωστή ως μέθοδος των μιγμάτων.

### Μέθοδος των μιγμάτων

Θεωρήστε ένα θερμιδόμετρο που περιέχει μια ποσότητα νερού. Έστω  $K$  η θερμοχωρητικότητα του θερμιδόμετρου,  $m_1$ ,  $c_1$  η μάζα και η ειδική θερμότητα του νερού και  $T_1$  η κοινή θερμοκρασία θερμιδόμετρου-περιεχομένου νερού. Έστω επίσης  $m_2$ ,  $c_2$  και  $T_2$ , η μάζα, η ειδική θερμότητα και η θερμοκρασία αντίστοιχα του σώματος (υγρό ή στερεό) του οποίου ζητάμε την ειδική θερμότητα. Όταν το σώμα τεθεί στο θερμιδόμετρο, το σύστημα αποκτά τελικά θερμοκρασία ισορροπίας  $T_\tau$ . Αν θεωρήσουμε αμελητέες τις ενεργειακές απώλειες, η διατήρηση της ενέργειας εκφράζεται με την ισότητα:

$$m_2 c_2 (T_2 - T_\tau) = K (T_\tau - T_1) + m_1 c_1 (T_\tau - T_1) = (K + m_1 c_1) (T_\tau - T_1) \quad (4.6)$$

$$c_2 = \frac{(K + m_1 c_1)(T_\tau - T_1)}{m_2(T_2 - T_\tau)} \quad (4.7)$$

### Νόμος των Dulong-Petit:

Ο νόμος αυτός ισχύει για τα στερεά και αναφέρει ότι σε συνήθεις και υψηλές θερμοκρασίες, η ατομική θερμότητα των στερεών στοιχείων έχει την ίδια κατά προσέγγιση τιμή, η οποία είναι  $5.96 \text{ cal}/(\text{gr} - \text{at}^\circ\text{C}) = 5.96 \text{ kcal}/(\text{kmole}^\circ\text{C})$ .

## 4.2 Πειραματικό μέρος

### 4.2.1 Πείραμα 1: Εύρεση θερμοχωρητικότητας θερμιδομέτρου

Σ' αυτή τη φάση υπολογίζουμε την θερμοχωρητικότητα του θερμιδομέτρου. Η διατιθέμενη συσκευή αποτελείται από θερμιδόμετρο εσωτερικού και εξωτερικού δοχείου και θερμική αντίσταση  $0.5 - 1W$  που προσαρμόζεται στο πώμα του θερμιδομέτρου (υπάρχει από τη συσκευή η δυνατότητα θέρμανσης των υλικών), ακροδέκτες, αναδευτήρα, χρονόμετρο χειρός, θερμόμετρο προσαρμοζόμενο στο πώμα, βολτόμετρο/αμπερόμετρο και καλώδια.

#### Στάδια εργασίας:

#### Α' τρόπος:

1. Τοποθετήστε στο στεγνό θερμιδόμετρο, ποσότητα απιονισμένου νερού  $m_1 = (40 - 60 \text{ gr})$  και θερμάνετε το σύστημα, με την αντίσταση, έως το θερμόμετρο φτάσει τους  $60^\circ\text{C}$  περίπου. Παράλληλα αναδεύετε.
2. Σταματήστε την θέρμανση, αναδέψτε για περίπου 1 λεπτό και κατόπιν καταγράψτε την θερμοκρασία ισορροπίας  $T_1$ .
3. Ζυγίστε νερό μάζας  $m_2 = 30 - 40 \text{ gr}$ , μετρήστε την θερμοκρασία  $T_2$  και προσθέστε το στο θερμιδόμετρο.
4. Αναδέψτε το νερό στο θερμιδόμετρο για 3 περίπου λεπτά και τότε σημειώστε την θερμοκρασία του συστήματος  $T_\tau$ . Κατά τη διάρκεια της εργασίας αυτής να παρακολουθείτε το ρυθμό καθόδου της θερμοκρασίας ώστε να είστε σίγουροι για την προσέγγιση της θερμικής ισορροπίας.
5. Υπολογίστε την θερμοχωρητικότητα  $K$  του θερμιδομέτρου με τη χρήση του παρακάτω τύπου:

$$(K + m_1 c_w)(T_1 - T_T) = m_2 c_w (T_T - T_2) \quad (4.8)$$

Δίνεται  $c_w = 1 \text{ cal}/(\text{gr}^\circ\text{C})$

#### Β' τρόπος:

1. Τοποθετήστε στο στεγνό θερμιδόμετρο ποσότητα απιονισμένου νερού μάζας ίσης με την συνολική ποσότητα του νερού που χρησιμοποιήθηκε στον τρόπο 1 ( $m_w = 70 - 100 \text{ gr}$ ). Αφήστε το σύστημα να ισορροπήσει θερμικά περίπου 1 λεπτό και καταγράψτε την θερμοκρασία  $T_1$ .

- Ξεκινήστε την θέρμανση του συστήματος και θερμάνετε για 10 λεπτά περίπου ( $\Delta T_R = 600 \text{ sec}$ ), ενώ κάθε λεπτό καταγράφετε την θερμοκρασία του συστήματος. Παράλληλα αναδεύετε. Σταματήστε την θέρμανση, συνεχίστε την ανάδευση του συστήματος για 1 λεπτό περίπου και καταγράψτε την θερμοκρασία  $T_T$ .
- Θεωρώντας ότι όλη η θερμική ενέργεια της αντίστασης μεταφέρθηκε στο νερό και στο θερμιδόμετρο, υπολογίστε από τον παρακάτω τύπο την θερμοχωρητικότητα του θερμιδομέτρου:

$$(K + m_w c_w)(T_T - T_1) = I^2 R \Delta t_R = \frac{V^2}{R} \Delta t_R = IV \Delta t_R \quad (4.9)$$

Τα  $I, R, V$  θα υπολογιστούν από το βολτόμετρο/αμπερόμετρο που διαθέτει η πειραματική διάταξη.

Δίνεται  $c_w = 1 \text{ cal}/(\text{gr}^\circ\text{C})$   
 $1 \text{ KWh} = 3.6 \times 10^6 \text{ Joule} = 8.601 \times 10^5 \text{ cal}$

#### 4.2.2 Πείραμα 2: Εύρεση ειδικής θερμότητας στερεών

Σε αυτή τη φάση στόχος του πειράματος είναι ο προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας υλικού σώματος (είτε είναι σε στερεή είτε σε υγρή μορφή). Η ποσότητα του νερού που θα τοποθετηθεί στο θερμιδόμετρο πρέπει να σχετίζεται με τον όγκο του στερεού σώματος που θα ρίξουμε στη συνέχεια στο θερμιδόμετρο, έτσι ώστε το νερό να φτάσει στο ίδιο ύψος μέσα σ' αυτό. Το τελευταίο απαιτείται για να εξασφαλισθεί το ότι στο δεύτερο πείραμα θα λάβει μέρος το ίδιο τμήμα του θερμιδομέτρου και άρα η ήδη προσδιορισμένη στο πρώτο πείραμα θερμοχωρητικότητα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στο δεύτερο.

##### Στάδια εργασίας:

##### Α' τρόπος:

- Τοποθετήστε στο στεγνό θερμιδόμετρο, ποσότητα απιονισμένου νερού  $m_1 = (70 - 90 \text{ gr})$  και θερμάνετε το σύστημα, με την αντίσταση, έως το θερμιδόμετρο φτάσει τους  $60^\circ\text{C}$  περίπου. Παράλληλα αναδεύετε.
- Σταματήστε την θέρμανση, συνεχίστε την ανάδευση για 1 λεπτό περίπου και καταγράψτε την θερμοκρασία ισορροπίας  $T_1$ .
- Ζυγίστε τη μάζα του σώματος του οποίου ζητάμε να βρούμε την ειδική θερμότητα, μετρήστε την θερμοκρασία του  $T_2$  και προσθέστε το στο θερμιδόμετρο.
- Αναδέψτε το νερό στο θερμιδόμετρο για 3 περίπου λεπτά και στη συνέχεια σημειώστε την θερμοκρασία του συστήματος  $T_T$ . Κατά τη διάρκεια της εργασίας αυτής να παρακολουθείτε το ρυθμό καθόδου της θερμοκρασίας ώστε να είστε σίγουροι για την προσέγγιση της θερμικής ισορροπίας.
- Υπολογίστε την ειδική θερμότητα του σώματος με τη χρήση του παρακάτω τύπου:

$$(K + m_1 c_w)(T_1 - T_T) = m_2 c_{\alpha\gamma\nu}(T_T - T_2) \quad (4.10)$$

Δίνεται  $c_w = 1 \text{ cal}/(\text{gr}^\circ\text{C})$

**Β' τρόπος:**

1. Τοποθετήστε στο στεγνό θερμιδόμετρο, ποσότητα απιονισμένου νερού  $m_1 = (70 - 90gr)$ . Ζυγίστε τη μάζα  $m_2$  του σώματος του οποίου ζητάμε να βρούμε την ειδική θερμότητα και προσθέστε το στο θερμιδόμετρο.
2. Αναδεύστε το σύστημα για 1 λεπτό περίπου και κατόπιν καταγράψτε την θερμοκρασία ισορροπίας  $T_1$ .
3. Ξεκινήστε την θέρμανση του συστήματος μετρώντας τον χρόνο που διαρκεί αυτή ώστε να φτάσει η θερμοκρασία του συστήματος περίπου στους  $50^\circ C$  ( $\Delta t_R$ ). Παράλληλα αναδεύετε. Σταματήστε την θέρμανση, συνεχίστε την ανάδευση του συστήματος για 1 λεπτό περίπου και καταγράψτε την θερμοκρασία  $T_T$ .
4. Θεωρώντας ότι όλη η θερμική ενέργεια της αντίστασης μεταφέρθηκε στο νερό, στο θερμιδόμετρο και στο άγνωστο σώμα, υπολογίστε από τον παρακάτω τύπο τη θερμοχωρητικότητα του θερμιδομέτρου:

$$(K + m_2 c_{\alpha\gamma\nu} + m_w c_w)(T_T - T_1) = I^2 R \Delta t_R = \frac{V^2}{R} \Delta t_R = IV \Delta t_R \quad (4.11)$$

Τα  $I, R, V$  θα υπολογιστούν από το βολτόμετρο/αμπερόμετρο που διαθέτει η πειραματική διάταξη.

Δίνεται  $c_w = 1cal/(gr^\circ C)$

$1KWh = 3.6 \times 10^6 Joule = 8.604 \times 10^5 cal.$

Παρατήρηση: Αξίζει να σημειωθεί ότι το άγνωστο υλικό μπορεί να είναι οτιδήποτε υγρό ή στερεό σώμα. Π.χ. πλακίδια μετάλλων, γάλα, κρέμα, ακόμα και ένα σακουλάκι με τροφή.

**4.3 Εργασίες - αναφορά**

1. Περιγράψετε το πείραμα περιληπτικά πραγματοποιώντας παράλληλα τους απαραίτητους υπολογισμούς.
2. Διαφέρουν οι τιμές των  $K$  και  $c_{\alpha\gamma\nu}$  που υπολογίσατε με τους δυο διαφορετικούς τρόπους; Αν ναι πού οφείλεται αυτό;
3. Αναφέρετε τα σφάλματα που κατά την άποψη σας επηρέασαν το τελικό αποτέλεσμα, αξιολογώντας τα.
4. Να υπολογίσετε την ατομική θερμότητα του υλικού του αγνώστου σώματος. Για το σκοπό αυτό, πληροφορηθείτε από τον υπεύθυνο του εργαστηρίου, την ονομασία του υλικού του σώματος και από τον πίνακα του περιοδικού συστήματος, βρείτε και σημειώστε το ατομικό βάρος του στοιχείου.

## 4.4 Ασκήσεις

### 1. Ψύξη ενός κομματιού μετάλλου

Θερμαίνουμε ένα κομμάτι μέταλλο, μάζας  $0.05\text{Kg}$ , στους  $200^\circ\text{C}$  και κατόπιν το τοποθετούμε σε ένα δοχείο που περιέχει  $0.4\text{kg}$  νερού θερμοκρασίας  $20^\circ\text{C}$ . Η τελική θερμοκρασία (αφού το σύστημα μέταλλο + νερό έχει ισορροπήσει θερμικά) είναι  $22.4^\circ\text{C}$ . Προσδιορίστε το είδος του μετάλλου μετρώντας την ειδική θερμότητα του βάσει του πίνακα των σημειώσεών σας. Γιατί διαφέρει από την θεωρητική τιμή ;

Πόση συνολικά θερμότητα κέρδισε το νερό ;

### 2. Ο μεθυσμένος καουμπόυ

Ένας μεθυσμένος καουμπόυ τραβάει το περίστροφο του και ρίχνει μια ασημένια σφαίρα στον ξύλινο τοίχο ενός σαλούν, όπου η σφαίρα σφηνώνεται και σταματά. Η μάζα της σφαίρας είναι  $2\text{gr}$  και η ταχύτητα εξόδου της από το περίστροφο είναι  $200\text{m/sec}$ . Εάν υποθέσουμε ότι όλη η θερμική ενέργεια που έχει παραχθεί από την τριβή της σφαίρας με το ξύλο διατηρείται στη σφαίρα, υπολογίστε την αύξηση της θερμοκρασίας της. Δίνεται ότι η ειδική θερμότητα του αργύρου είναι  $234\text{J}/(\text{Kg}^\circ\text{C})$ .

## 4.5 Βιβλιογραφία:

1. Serway, Physics for scientists and engineers, Third edition.
2. P.W. Atkins, Physical Chemistry, thermodynamics.
3. <http://www.chm.davidson.edu/ChemistryApplets/calorimetry/SpecificHeatCapacityOfCopper.html>
4. Εργαστηριακές ασκήσεις Φυσικής, Χαλδούπη (Πανεπιστήμιο Κρήτης).
5. Εργαστηριακές ασκήσεις Φυσικής, Φραγκιαδάκη (Τ.Ε.Ι. Κρήτης).



## Κεφάλαιο 5

# Παρατήρηση και καταγραφή φασμάτων

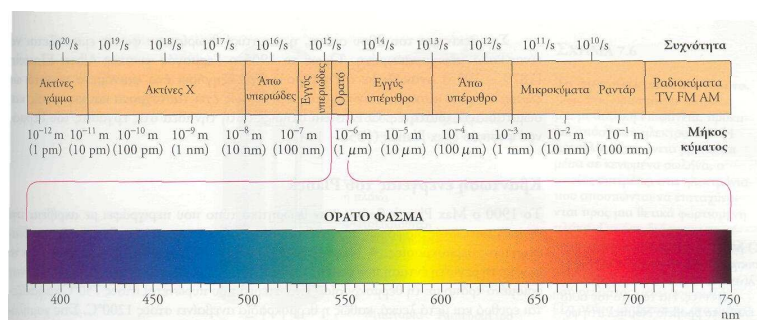
### Σκοπός

Σκοπός αυτής της εργαστηριακής άσκησης είναι οι φοιτητές:

- Να παρατηρήσουν και να περιγράψουν φάσματα εκπομπής αερίων που φωτοβολούν.
- Να παρατηρήσουν και να περιγράψουν φάσματα απορρόφησης.
- Να υπολογίζουν τις κυματικές ποσότητες (μήκος κύματος και συχνότητα) εκπεμπόμενου και απορροφούμενου φωτός.

## 5.1 Εισαγωγικές γνώσεις - Θεωρητικό υπόβαθρο

### 5.1.1 Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα



Σχήμα 5.1: Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα

Η περιοχή συχνοτήτων ή μηκών κύματος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας ονομάζεται ηλεκτρομαγνητικό φάσμα. Το ορατό φως εκτείνεται από το ιώδες (βιολετί) άκρο του φάσματος, το οποίο αντιστοιχεί σε μήκος κύματος περίπου  $400nm$ , μέχρι το ερυθρό άκρο, με μήκος κύματος μικρότερο από  $800nm$ . Πέρα από αυτά τα όρια, η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία δεν είναι ορατή για το ανθρώπινο μάτι. Η υπέρυθρη

ακτινοβολία έχει μήκη κύματος μεγαλύτερα από  $800nm$  (μεγαλύτερα από το μήκος κύματος του ερυθρού φωτός), ενώ η υπεριώδης ακτινοβολία έχει μήκη κύματος μικρότερα από  $440nm$  (μικρότερα από το μήκος κύματος του ιώδους φωτός).

### 5.1.2 Το φασματοσκόπιο φράγματος

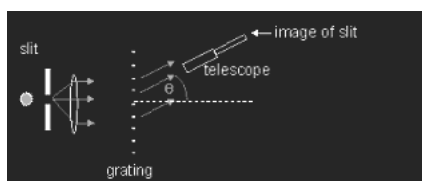
Το φασματοσκόπιο (ή φασματογράφος) φράγματος είναι ένα όργανο με το οποίο γίνεται η ανάλυση μιας δέσμης φωτός και η μελέτη του φάσματός της. Αποτελείται από ένα φράγμα περίθλασης - ένα κομμάτι από διαφανές φύλλο πάνω στο οποίο έχουν ανοιχτεί σχισμές. Όσο μεγαλύτερη είναι η πυκνότητα των σχισμών ανά μονάδα μήκους του φράγματος, τόσο καλύτερη είναι η ποιότητα του φράγματος. Περνώντας το φως μέσα από το φράγμα αναλύεται στα διάφορα χρώματά του. Η ανάλυση του φωτός σε αυτή την περίπτωση δεν οφείλεται στην διάθλαση, όπως συμβαίνει με το πρίσμα, αλλά περισσότερο εξαιτίας της ανάμειξης μεταξύ των ακτίνων φωτός που απλώνονται (έχουν δηλαδή περιθλασθεί) ανάμεσα από τις σχισμές του φράγματος.



**Σχήμα 5.2:** Φασματοσκόπιο Project Star

Εκτός από το φράγμα περίθλασης, το φασματοσκόπιο φράγματος *Project Star* (σχήμα 2) αποτελείται από μια στενή σχισμή και μια διπλή παράλληλη κλίμακα μέτρησης μήκους κύματος σε  $nm$  ( $400nm$  έως  $700nm$ ) και ενέργειας ηλεκτρονίων σε ηλεκτρονιοβολτ ( $3.4eV$  έως  $1.7eV$ ).

Ισχύει:  $1nm = 10^{-9}m$ ,  $1eV = 1.6 \times 10^{-19}joule$  Η σχισμή είναι η πύλη μέσω

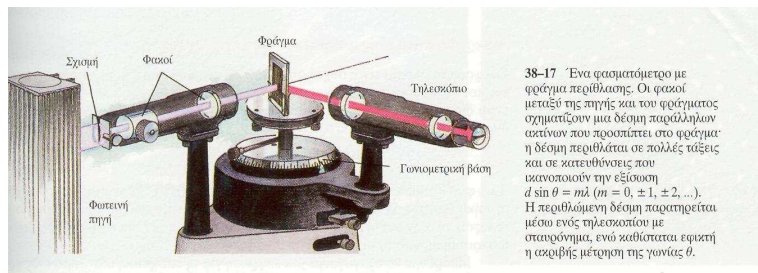


**Σχήμα 5.3:** slit : σχισμή, grating : φράγμα περίθλασης, telescope : τηλεσκόπιο, image of slit: είδωλο της σχισμής

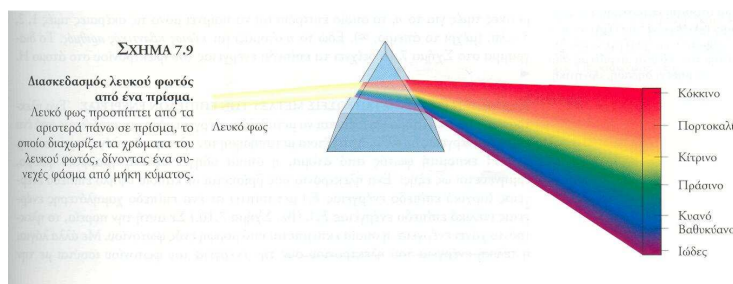
της οποίας το φως εισέρχεται στο φασματοσκόπιο και κατευθύνεται στο φράγμα. Οι διάφορες φωτεινές γραμμές φάσματος που παρατηρούμε ανάμεσα στις δύο κλίμακες του φασματοσκοπίου, αποτελούν είδωλο της σχισμής.

Όπως φαίνεται στο σχήμα 3, εάν γνωρίζουμε το πλάτος του φράγματος ( $d$ ) και την γωνία ( $\theta$ ) που σχηματίζει κάθε φασματική γραμμή (είδωλο της σχισμής), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος κύματος από τον τύπο:  $d \sin \theta = m\lambda$ , όπου  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  (σχισμές).

Συγκρινόμενο με ένα φασματοσκόπιο πρίσματος, το φασματοσκόπιο φράγματος εξασφαλίζει μεγαλύτερη περιοχή φάσματος.



Σχήμα 5.4:



Σχήμα 5.5:

### 5.1.3 Περίθλαση

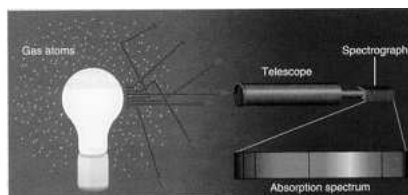
Περίθλαση είναι μια κυματική ιδιότητα κατά την οποία τα κύματα απλώνονται προς τα έξω, όταν συναντήσουν ένα εμπόδιο ή μια μικρή οπή που έχει μέγεθος περίπου όσο το μήκος κύματος. Μπορούμε να παρατηρήσουμε περίθλαση, κοιτάζοντας μια φωτεινή πηγή μέσα από μια οπή - για παράδειγμα, το φως μιας λάμπας του δημόσιου φωτισμού μέσα από μια δικτυωτή κουρτίνα. Το φως που βλέπουμε εμφανίζεται θαμπό λόγω περίθλασης.

### 5.1.4 Φάσματα απορρόφησης

Αν μεταξύ μιας φωτεινής πηγής που εκπέμπει λευκό φως και της σχισμής του φασματοσκοπίου παρεμβάλλουμε ένα υλικό μέσο, λόγω χάρη ένα δοχείο που περιέχει έγχρωμο υγρό ή ένα έγχρωμο φίλτρο, θα διαπιστώσουμε ότι ορισμένες περιοχές του συνεχούς φάσματος λείπουν και στη θέση τους εμφανίζονται σκοτεινές περιοχές. Τα φάσματα αυτά τα ονομάζουμε φάσματα απορρόφησης, γιατί οι σκοτεινές περιοχές οφείλονται στο ότι οι ακτινοβολίες ορισμένων χρωμάτων έχουν απορροφηθεί κατά τη

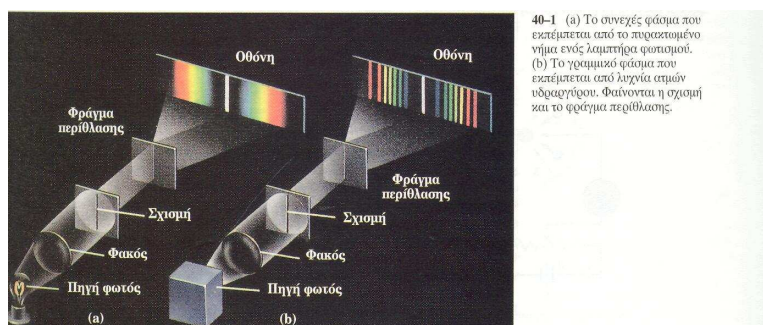
διέλευσή τους από το φίλτρο. Τα φάσματα απορρόφησης διακρίνονται σε συνεχή και γραμμικά.

(α) Συνεχή φάσματα απορρόφησης δίνουν τα έγχρωμα διαφανή στερεά και υγρά. Αν το υλικό που φωτίζουμε είναι ένα κόκκινο φίλτρο, τότε παίρνοντας το φάσμα θα παρατηρήσουμε ότι έχουν απορροφηθεί ορισμένες περιοχές του συνεχούς φάσματος εκπομπής. Συγκεκριμένα, από το κόκκινο φίλτρο διέρχονται μόνο οι ακτίνες που βρίσκονται στην περιοχή του ερυθρού.



**Σχήμα 5.6:** Συνεχές φάσμα της λάμπας

(β) Γραμμικά φάσματα απορρόφησης δίνουν τα αέρια ή οι ατμοί. Αποτελούνται από ένα συνεχές φάσμα στο οποίο υπάρχουν σκοτεινές γραμμές. Έτσι, αν μεταξύ μιας φωτεινής πηγής που εκπέμπει λευκό φως και της σχισμής του φασματοσκοπίου παρεμβάλλουμε αέριο υδρογόνου (σχήμα 6), τότε στο συνεχές φάσμα του λευκού φωτός του λαμπτήρα θα παρατηρήσουμε σκοτεινές γραμμές, στις θέσεις ακριβώς εκείνες που θα εμφανίζονταν οι φωτεινές γραμμές του φάσματος εκπομπής του αερίου υδρογόνου. Δηλαδή το αέριο υδρογόνο έχει απορροφήσει τις ακτινοβολίες που εκπέμπει, όταν ακτινοβολεί (σχήμα 7). Φωτόνια συγκεκριμένου μήκους κύματος μπορούν να



**40-1** (α) Το συνεχές φάσμα που εκπέμπεται από το πυροκαυμένο γήμα ενός λαμπτήρα φωτισμού. (β) Το γραμμικό φάσμα που εκπέμπεται από λυχνία ατμών υδρογόνου. Φαίνεται η σχισμή και το φράγμα περίθλασης.

**Σχήμα 5.7:** Γραμμικά φάσματα απορρόφησης και εκπομπής

απορροφηθούν από τα άτομα του αερίου υδρογόνου και να ξανά εκπέμψουν σε τυχαίες διευθύνσεις. Καθώς πολλά από αυτά τα φωτόνια δεν φτάνουν στο τηλεσκόπιο το φάσμα είναι σκοτεινό στα μήκη κύματος των φωτονίων που έχουν χαθεί.



**Σχήμα 5.8:** Φάσμα απορρόφησης του υδρογόνου (σκοτεινές γραμμές)

### 5.1.5 Φάσματα εκπομπής

Το φάσμα της ακτινοβολίας που εκπέμπει μια φωτεινή πηγή ονομάζεται φάσμα εκπομπής της πηγής αυτής. Τα φάσματα εκπομπής των διαφόρων πηγών διακρίνονται σε συνεχή και γραμμικά.

(α) Γραμμικά φάσματα εκπομπής. Αν εξετάσουμε με το φασματοσκόπιο το φως που εκπέμπουν θερμά αέρια ή ατμοί, τότε διαπιστώνουμε ότι το φάσμα τους, που αποτυπώνεται στην κλίμακα του φασματοσκοπίου, αποτελείται από διακριτές χρωματιστές γραμμές, χαρακτηριστικές για το είδος των αερίων ή των ατμών. Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο μήκος κύματος ή συχνότητα. Αν κάνουμε, για παράδειγμα, φασματοσκοπική ανάλυση του φωτός που εκπέμπει μια λάμπα αερίου υδρογόνου, θα παρατηρήσουμε ότι το φάσμα της αποτελείται από πέντε φωτεινές γραμμές (σχήμα 7).



Σχήμα 5.9: Γραμμικό φάσμα εκπομπής αερίου υδρογόνου

(β) Συνεχή φάσματα εκπομπής. Συνεχή φάσματα παίρνουμε, όταν εξετάζουμε με το φασματοσκόπιο το φως που εκπέμπουν στερεά και υγρά σώματα τα οποία βρίσκονται σε μεγάλη θερμοκρασία. Αν η πηγή του φωτός είναι, για παράδειγμα, ο λαμπτήρας πυρακτώσεως, τότε το φάσμα είναι μια συνεχής ταινία χρωμάτων (σχήμα 8). Επειδή τα συνεχή φάσματα, που εκπέμπονται από διάφορα διάπυρα σώματα, δε διαφέρουν μεταξύ τους, η μελέτη τέτοιων φασμάτων δεν μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για τη φύση του σώματος, αν δηλαδή το σώμα αποτελείται από κάποιο συγκεκριμένο υλικό, όπως π.χ. σίδηρο, χαλκό κτλ. Η μοναδική πληροφορία που παίρνουμε είναι για τη θερμοκρασία του υλικού.



Σχήμα 5.10: Συνεχές φάσμα εκπομπής λαμπτήρα πυρακτώσεως

### 5.1.6 Κβαντική θεωρία του Planck

Κάθε φωτόνιο μιας ακτινοβολίας έχει ενέργεια που δίνεται από τη σχέση:

$$E = h\nu \quad (5.1)$$

Το  $h$  είναι μια σταθερά, που ονομάζεται σταθερά *Planck* και έχει τιμή  $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ Jsec}$ .

Το  $\nu$  είναι η συχνότητα εκπομπής του φωτονίου, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$c = \lambda\nu \quad (\text{Θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής}). \quad (5.2)$$

Το  $c$  είναι η ταχύτητα του φωτός και έχει τιμή  $c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$  Από (1), (2)  $\implies$

$$E = \frac{hc}{\lambda} \implies h = \frac{E\lambda}{c} \quad (5.3)$$

### 5.1.7 Ατομικό πρότυπο του Bohr

Το γραμμικό φάσμα του υδρογονατόμου στην ορατή περιοχή αποτελείται μόνο από τέσσερις γραμμές (μια κόκκινη, μια κυανοπράσινη, μια κυανή και μια ιώδη). Ο *Balmer* έδειξε ότι τα μήκη κύματος  $\lambda$  στο ορατό φάσμα του υδρογόνου μπορούν να προκύψουν από τον απλό σχετικά τύπο :

$$\frac{1}{\lambda} = 1.097 \times 10^7 \frac{1}{m} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (5.4)$$

όπου  $n$  ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2. Αν για παράδειγμα αντικαταστήσουμε όπου  $n = 3$  τότε  $\lambda = 656nm$ .

Ο *Bohr* διατύπωσε τις ακόλουθες συνθήκες προκειμένου να εξηγήσει 1) τη σταθερότητα του υδρογονατόμου και 2) το γραμμικό του φάσμα :

1. Συνθήκη για τα επίπεδα ενέργειας: Ένα ηλεκτρόνιο επιτρέπεται να έχει ορισμένες μόνο τιμές ενέργειας σε ένα άτομο, οι οποίες ονομάζονται επίπεδα ενέργειας και δίνονται από τον ακόλουθο τύπο:

$$E = -\frac{R_H}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.5)$$

Το  $n$  ονομάζεται κύριος κβαντικός αριθμός και το  $R_H$  είναι μια σταθερά με τιμή  $2.179 \times 10^{-18} \text{ Joule}$ .

2. Συνθήκη για τις μεταπτώσεις μεταξύ των επιπέδων ενέργειας: Ένα ηλεκτρόνιο σε κάποιο άτομο επιτρέπεται να μεταβάλλει την ενέργεια του μόνο μεταπηδώντας από ένα επίπεδο σε ένα άλλο. (Μετάπτωση ηλεκτρονίου)

Η εκπομπή φωτός από άτομα, η οποία οδηγεί σε ένα γραμμικό φάσμα, ερμηνεύεται ως εξής: Ένα ηλεκτρόνιο, που βρίσκεται σε κάποιο υψηλό επίπεδο ενέργειας (αρχικό επίπεδο ενέργειας  $E_i$ ), μεταπίπτει σε ένα επίπεδο χαμηλότερης ενέργειας (τελικό επίπεδο ενέργειας  $E_f$ ). Σε αυτή την πορεία το ηλεκτρόνιο χάνει ενέργεια, η οποία εκπέμπεται υπό μορφή ενός φωτονίου όπου

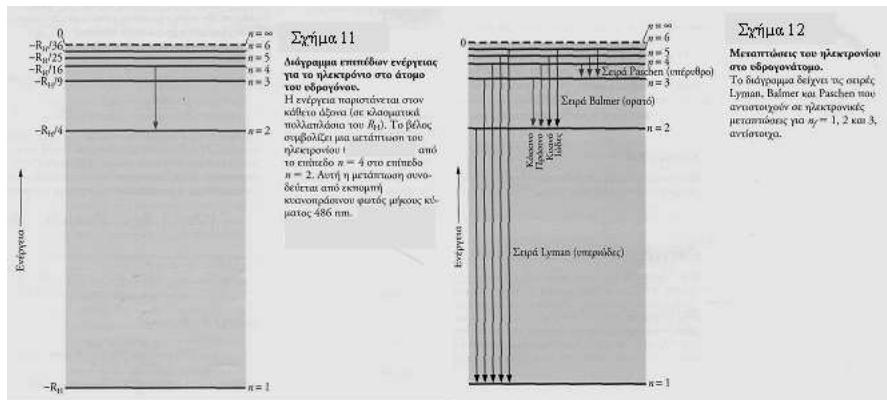
$$\text{Ενέργεια ενός φωτονίου} = h\nu = E_i - E_f \quad (5.6)$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί πως ο *Bohr* έλαβε τον τύπο του *Balmer*. Αν  $n_i$  ο κύριος κβαντικός αριθμός του αρχικού επιπέδου και  $n_f$  αυτός του τελικού, τότε

$$\left. \begin{array}{l} E_i = -\frac{R_H}{n_i^2} \\ E_f = -\frac{R_H}{n_f^2} \\ h\nu = E_i - E_f \end{array} \right\} \Rightarrow h\nu = -\frac{R_H}{n_i^2} - \left( -\frac{R_H}{n_f^2} \right) = R_H \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \xrightarrow{\nu = \frac{c}{\lambda}} \frac{1}{\lambda} = \frac{R_H}{hc} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Με πράξεις βρίσκουμε ότι το  $R_H/hc$  ισούται με  $1.097 \times 10^7 m^{-1}$  που είναι η σταθερά στον τύπο του *Balmer*. Στον τύπο του *Balmer* ο κβαντικός αριθμός  $n_f$  είναι 2, πράγμα που σημαίνει ότι ο εν λόγω τύπος δίνει τα μήκη κύματος που αντιστοιχούν σε ηλεκτρονικές μεταπτώσεις στο υδρογόνατομο από επίπεδα ενέργειας  $n_i > 2$  στο





Σχήμα 5.11:

επίπεδο  $n_f = 2$ . Αν δώσουμε στο  $n_f$  άλλες ακέραιες τιμές, λαμβάνουμε διαφορετικές σειρές γραμμών (ή μηκών κύματος) για το φάσμα του ατόμου H.

Κανονικά το ηλεκτρόνιο σε ένα άτομο υδρογόνου βρίσκεται στο χαμηλότερο επίπεδο, για το οποίο  $n = 1$ . Για να ανέλθει σε ένα υψηλότερο επίπεδο, το ηλεκτρόνιο πρέπει να κερδίσει ενέργεια ή να διεγερθεί. Ένας τρόπος για να συμβεί αυτό είναι να συγκρουστούν δυο άτομα υδρογόνου. Στη διάρκεια αυτής της κρούσης, μέρος της κινητικής ενέργειας του ενός ατόμου μπορεί να κερδισθεί από το ηλεκτρόνιο του άλλου ατόμου και έτσι αυτό το ηλεκτρόνιο, να ανυψωθεί ή να διεγερθεί από το επίπεδο  $n = 1$  σε ένα υψηλότερο επίπεδο. Η διέγερση ατόμων και η επακόλουθη εκπομπή φωτός είναι πιο πιθανό να συμβούν σε ένα θερμό αέριο, όπου τα άτομα έχουν μεγάλες κινητικές ενέργειες.

## 5.2 Οργανολογία

1. Επιτραπέζιο φασματοσκόπιο (ή φασματόμετρο) φράγματος Project Star με βάση στήριξης.
2. Λυχνίες για την παραγωγή των φασμάτων εκπομπής των αερίων  $He$ ,  $Ne$ ,  $Hg$  και  $H_2$ .
3. Τροφοδοτικό υψηλής τάσης  $PS - STS$ .
4. Πέντε έγχρωμα φίλτρα (κόκκινο, μπλε, κίτρινο, πορτοκαλί, πράσινο) με καθορισμένες περιοχές απορρόφησης.
5. Άλατα Νατρίου, Καλίου, Στронτίου, Βαρίου και Χαλκού.
6. Λαβίδα για την συγκράτηση μικρής ποσότητας αλάτων.
7. Λυχνία Μπούνσεν
8. Δοχείο από διάφανο πλαστικό



Σχήμα 5.12:

### 5.2.1 Χαρακτηριστικά του φασματομέτρου :

- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την παρατήρηση φασμάτων εκπομπής και απορρόφησης, γραμμικών και συνεχών. Επίσης για δραστηριότητες εκτός τάξεως, όπως είναι η παρατήρηση του φάσματος του ήλιου και του φεγγαριού.
- Χρησιμοποιεί φράγμα περίθλασης με 750 σχισμές ανά  $mm$ , που επιτρέπει μετρήσεις φασματικών γραμμών στο ορατό φως ( $400nm$  έως  $700nm$ ) με μια ακρίβεια της τάξεως των  $\pm 1nm$ .
- Διαθέτει μια στενή σχισμή για την είσοδο του φωτός.
- Περιλαμβάνει διπλή παράλληλη κλίμακα μέτρησης μήκους κύματος ( $nm$ ) και ενέργειας σε ηλεκτρονιοβόλτ ( $eV$ ), που επιτρέπει τον υπολογισμό της σταθεράς του *Planck* ( $h$ ) με σφάλμα μικρότερο του 1%.
- Σε ελάχιστα δευτερόλεπτα οι μαθητές μπορούν να παρατηρούν και να περιγράψουν φάσματα.
- Η κλίμακά του μπορεί να ρυθμιστεί εύκολα από τους μαθητές, παρατηρώντας απλά το φάσμα μιας λάμπας φθορισμού. Δεν απαιτεί καμία δραστηριότητα προετοιμασίας από τον καθηγητή.
- Στην πάνω πλευρά του φασματομέτρου υπάρχει πίνακας με τα μήκη κύματος σε  $nm$  και την αντίστοιχη ενέργεια φωτονίων σε ηλεκτρονιοβόλτ, για χαρακτηριστικά στοιχεία που συναντάμε σε γνωστά φάσματα, όπως είναι του ήλιου, λάμπας φθορισμού, λυχνίες αερίων και σε φλόγες χημικών αλάτων.





Σχήμα 5.13: Η διπλή κλίμακα του φασματόμετρου Project Star

### 5.3 Πειραματική διαδικασία - Ρύθμιση & χρήση του φασματόμετρου

Για την ρύθμιση της κλίμακας του φασματόμετρου παρατηρούμε το φάσμα μιας οποιασδήποτε λάμπας φθορισμού και ελέγχουμε εάν η πράσινη φωτεινή γραμμή, που δίνει κάθε φάσμα φθορισμού, είναι στα  $546nm$ . Γι αυτό το λόγο υπάρχει ένα μικρό σημάδι στο κάτω μέρος της κλίμακας που δηλώνει την θέση για μήκος κύματος  $546nm$  (σχήμα 14).

Εάν η πράσινη γραμμή δεν συμπίπτει με το σημάδι στην κλίμακα, οι φοιτητές μπορούν εύκολα να την ρυθμίσουν, μετακινώντας δεξιά ή αριστερά την οπή που υπάρχει στο μπροστινό μέρος του φασματόμετρου, στο κάτω μέρος της κλίμακας. Για την μετακίνηση της κλίμακας χρησιμοποιήστε την μύτη ενός λεπτού αντικειμένου.

Η χρήση του φασματόμετρου είναι απλή. Τοποθετήστε το πάνω στο γραφείο ή κρατήστε το στο χέρι σας και προσανατολίστε το έτσι ώστε να βλέπετε την πηγή του φωτός που θέλετε να αναλύσετε μέσα από την σχισμή του. Κρατώντας το ένα σας μάτι κλειστό, κοιτάζτε μέσα από την θυρίδα παρατήρησης και παρατηρήστε το φάσμα που σχηματίζεται στην κλίμακα μέτρησης του φασματόμετρου.



Σχήμα 5.14: Ρύθμιση φασματόμετρου



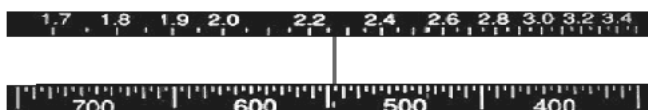
Σχήμα 5.15: Παρατήρηση με το φασματόμετρο

### 5.4 Πείραμα 1: Ανάλυση Φασμάτων αερίων που φωτοβολούν

#### 5.4.1 Διαδικασία Εργασίας:

1. Βεβαιωθείτε ότι το τροφοδοτικό *PS – STS* δεν είναι συνδεδεμένο στο δίκτυο της ΔΕΗ.

2. Τοποθετήστε την λυχνία ηλίου ( $He$ ) στη βάση στήριξης, με τη βοήθεια του υπεύθυνου καθηγητή.
3. Καλέστε τον υπεύθυνο καθηγητή να συνδέσει το τροφοδοτικό σε παροχή  $230V$   $AC$  που διαθέτει γείωση.
4. Πριν συνδέσετε το τροφοδοτικό στην παροχή  $230V$   $AC$ , βεβαιωθείτε ότι ο ΓΕΝΙΚΟΣ ΔΙΑΚΟΠΤΗΣ είναι πατημένος στη θέση  $OFF$  (0) και το κομβίο ΡΥΘΜΙΣΗ ΦΩΤΕΙΝΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ γυρισμένο τέρμα αριστερά.
5. Πιέστε το ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΚΟΠΤΗ στη θέση  $ON$  (1). Η ενσωματωμένη στο διακόπτη λυχνία θα ανάψει επισημαίνοντας ότι η συσκευή είναι αναμμένη.
6. Πιέστε το διακόπτη επιλογής λυχνίας στη θέση ΛΥΧΝΙΑ ΑΕΡΙΟΥ και γυρίστε αργά το κομβίο ΡΥΘΜΙΣΗ ΦΩΤΕΙΝΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ προς τα δεξιά μέχρις ότου η λυχνία ανάψει έντονα χωρίς όμως να εμφανίζονται κροσσοί στα άκρα της. Σημειώστε ότι οι λυχνίες Ηλίου ( $He$ ) και Νέον ( $Ne$ ) ανάβουν σε αρκετά χαμηλότερη στάθμη απ' ό,τι οι λυχνίες Υδρογόνου ( $H_2$ ) και Υδραργύρου ( $Hg$ ). Καθώς αυξάνεται η ένταση, ανάβει και το ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΥΨΗΛΗΣ ΤΑΣΗΣ.
7. Κοιτώντας μέσα από τη θυρίδα παρατήρησης προς τη σχισμή, περιστρέψτε αργά το φασματόμετρο μέχρι να δείτε τη σχισμή να γίνεται έντονα φωτεινή. Αφήστε το φασματόμετρο σ' αυτή τη θέση.
8. Καταγράψτε στην παρακάτω κλίμακα το φάσμα που παρατηρείτε.



Σχήμα 5.16:

9. Αφού παρατηρήσετε το φάσμα που παράγει η λυχνία με το φασματόμετρο, γυρίστε το κομβίο ΡΥΘΜΙΣΗ ΦΩΤΕΙΝΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ τέρμα αριστερά. Πιέστε τον ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΚΟΠΤΗ του τροφοδοτικού στη θέση  $OFF$  (0). Αντικαταστήστε την λυχνία ηλίου με κάποια από τις λυχνίες  $Hg$ ,  $H_2$ ,  $Ne$ . Ανάψτε ξανά το τροφοδοτικό και επαναλάβετε τις ίδιες διαδικασίες.
10. Αφού παρατηρήσετε το φάσμα που παράγει η λυχνία με το φασματόμετρο, γυρίστε το κομβίο ΡΥΘΜΙΣΗ ΦΩΤΕΙΝΗΣ ΕΝΤΑΣΗΣ τέρμα αριστερά. Πιέστε τον ΓΕΝΙΚΟ ΔΙΑΚΟΠΤΗ του τροφοδοτικού στη θέση  $OFF$  (0). Είναι σημαντικό να μην αφήνετε τις λυχνίες αερίου αναμμένες για πολύ ώρα γιατί αυτό έχει επίπτωση στο χρόνο ζωής των λυχνιών. Για την παρατήρηση του φάσματος και την καταγραφή των φασματικών γραμμών, αρκούν ένα ή δύο λεπτά. Σημειώστε ότι φασματικές γραμμές που βρίσκονται στην αρχή της κλίμακας (ιώδες), είναι πιθανόν να μην διακρίνονται εύκολα.

## 5.5 Πείραμα 2: Ανάλυση φασμάτων απορρόφησης, συνεχών, γραμμικών

### Διαδικασία Εργασίας:

1. Καλέστε τον υπεύθυνο καθηγητή να συνδέσει το τροφοδοτικό *PS – STS* στο δίκτυο της ΔΕΗ.
2. Πατήστε τον γενικό διακόπτη τροφοδοσίας του τροφοδοτικού στη θέση *ON*.
3. Για να τροφοδοτήσετε με τάση την φωτεινή πηγή, πατήστε τον άσπρο διακόπτη μεταγωγής στη θέση *ΛΥΧΝΙΑ ΠΥΡΑΚΤΩΣΕΩΣ*.
4. Γυρίστε τον ρυθμιστή φωτεινή έντασης μέχρι η λυχνία πυρακτώσεως να ανάψει αρκετά έντονα.
5. Τοποθετήστε το φασματόμετρο πάνω στο γραφείο και προσανατολίστε το έτσι ώστε η σχισμή του να βρίσκεται κοντά στην λάμπα της φωτεινής πηγής, χωρίς ωστόσο να κοιτά απ' ευθείας το πυρακτωμένο νήμα της λάμπας.
6. Κοιτώντας μέσα από τη θυρίδα παρατήρησης προς τη σχισμή, περιστρέψτε αργά το φασματόμετρο μέχρι να δείτε τη σχισμή να γίνεται έντονα φωτεινή. Αφήστε το φασματόμετρο σ' αυτή τη θέση.
7. Παρεμβάλετε, διαδοχικά, μεταξύ της φωτεινής πηγής και του φασματόμετρου, τα διάφορα έγχρωμα φίλτρα, τοποθετώντας τα στους ειδικούς οδηγούς του τροφοδοτικού ή του φασματόμετρου.



Σχήμα 5.17:

8. Καταγράψτε στον παρακάτω πίνακα το φάσμα που απορροφά το κάθε φίλτρο στο ορατό φως ( $400nm < \lambda < 700nm$ ) και κατόπιν συγκρίνετε τις παρατηρήσεις σας με τις τιμές που αναφέρονται στον πίνακα 2.

Χρώμα φίλτρου	Φάσμα που απορροφάται
Πράσινο	
Μπλε	
Κόκκινο	
Κίτρινο	
Πορτοκαλί	

- Ανάλογη πειραματική διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί χρησιμοποιώντας ως πηγή φωτός τον ηλιόλουστο ουρανό αντί της λυχνίας πυρακτώσεως, χωρίς ωστόσο να βλέπετε κατευθείαν προς τον ήλιο.

### 5.6 Πείραμα 3: Ανάλυση φασμάτων συγκεκριμένων χημικών ουσιών (αλάτων $K, Na, Ba, Cu$ και $Sr$ )

#### Διαδικασία εργασίας:

1. Ανάψτε τη φλόγα στην λυχνία Μπούνσεν.
2. Τοποθετήστε το φασματόμετρο πάνω στο γραφείο και προσανατολίστε την σχισμή του προς την φλόγα. Παρατηρήστε πρώτα το φάσμα της φλόγας χωρίς άλας.
3. Μέσα στο κάθε φιαλίδιο άλατος υπάρχει μια ακίδα χρωμονικελίνης διαμορφωμένη σε δακτύλιο στο ένα άκρο. Προσαρμόστε μία από τις ακίδες στο άκρο του στελέχους της λαβίδας. ΠΡΟΣΟΧΗ το φιαλίδιο του χλωριούχου χαλκού είναι το μόνο στο οποίο δεν τοποθετούμε την ακίδα διότι θα οξειδωθεί.
4. Θερμάνετε το δακτύλιο της ακίδας στη φλόγα και βουτήξτε το στο αντίστοιχο άλας. Αν αντιμετωπίζετε δυσκολία στο να συγκρατήσετε το άλας, δοκιμάστε με τον δακτύλιο της ακίδας βρεγμένο.
5. Κρατήστε το δακτύλιο με το άλας πάνω στη φλόγα. Παρατηρήστε ότι ο χρωματισμός στο πάνω μέρος της φλόγας αλλάζει. Με το φασματόμετρο παρατηρήστε το φάσμα ή τις γραμμές που παράγει το άλας όταν καίγεται και σημειώστε τα αντίστοιχα μήκη κύματος.
6. Επαναλάβετε τα ίδια βήματα για τα υπόλοιπα άλατα. Προσοχή: Για κάθε άλας βεβαιωθείτε ότι χρησιμοποιείτε την αντίστοιχη ακίδα. Διαφορετικά μπορεί να παρατηρήσετε φάσματα που προκύπτουν από συνδυασμό δύο ή περισσότερων αλάτων.
7. Καταγράψτε στον παρακάτω πίνακα το χρώμα της φλόγας για κάθε άλας διαδοχικά. Παρατηρήστε τις φωτεινές γραμμές και τις αλλαγές στο φάσμα της φλόγας.

Αλάτι	Χρωματισμός	Φωτεινές Γραμμές / Φάσμα
Νάτριο		
Κάλιο		
Χαλκό		
Στρόντιο		
Βάριο		

8. Αδειάστε μέσα στο διάφανο δοχείο μικρή ποσότητα χλωριούχου χαλκού, προσθέστε νερό και ανακινήστε το διάλυμα με ένα μυτερό μακρύ αντικείμενο.
9. Καλέστε τον υπεύθυνο καθηγητή να συνδέσει το τροφοδοτικό  $PS - STS$  με το δίκτυο της ΔΕΗ.
10. Θέστε το τροφοδοτικό σε λειτουργία.
11. Για να τροφοδοτήσετε με τάση την φωτεινή πηγή, πατήστε τον άσπρο διακόπτη μεταγωγής στη θέση ΛΥΧΝΙΑ ΠΥΡΑΚΤΩΣΕΩΣ
12. Γυρίστε τον ρυθμιστή φωτεινή έντασης μέχρι η λυχνία πυρακτώσεως να ανάψει αρκετά έντονα.
13. Τοποθετήστε το δοχείο με το διάλυμα χλωριούχου χαλκού στους οδηγούς της φωτεινής πηγής
14. Παρατηρήστε το φάσμα και συγκρίνετε τις ακτινοβολίες που έχουν απορροφηθεί, με το χρώμα του υγρού που βρίσκεται στο δοχείο. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.

Χρώμα Υγρού	Φάσμα που απορροφάται

15. Τοποθετήστε το δοχείο με το διάλυμα χλωριούχου χαλκού στους οδηγούς του φασματόμετρου.
16. Προσανατολίστε την σχισμή του φασματόμετρου προς τον ήλιο. ΠΡΟΣΟΧΗ: ΜΗΝ ΚΟΙΤΑΤΕ ΠΟΤΕ ΑΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ ΤΟΝ ΗΛΙΟ.
17. Παρατηρήστε το φάσμα του ήλιου και συγκρίνετε τις ακτινοβολίες που έχουν απορροφηθεί, με το χρώμα του υγρού που βρίσκεται στο δοχείο. Καταγράψτε τις παρατηρήσεις σας.

Χρώμα Υγρού	Φάσμα που απορροφάται

## 5.7 Ασκήσεις - Προβλήματα

1. Τα φάσματα των αερίων  $He$ ,  $Ne$ ,  $Hg$  και  $H_2$ , που παράγουν οι λυχνίες που παρατηρήσατε, είναι φάσματα εκπομπής ή απορρόφησης; Συνεχή ή γραμμικά; Σε τι διαφέρουν μεταξύ τους;
2. Χρησιμοποιήστε τα φάσματα των αερίων, που παρατηρήσατε στο φασματόμετρο, για να υπολογίσετε πειραματικά την σταθερά του  $Planck$  ( $h$ ).

Ακολουθήστε το παράδειγμα που δίνεται παρακάτω, για το φάσμα της κίτρινης γραμμής της λυχνίας ηλίου, το οποίο όπως παρατηρήσατε, έχει μήκος κύματος περίπου  $587.5nm$  και ενέργει  $a$  φωτονίων περίπου  $2.11eV$ .

Από την θεωρία γνωρίζετε ότι ισχύει:  $E = h\nu$  και  $c = \lambda\nu$ . Επομένως  $E = hc/\lambda$  και  $h = E\lambda/c$

Όπου:

$$c = 2.9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$$

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ joule}$$

Από τα παραπάνω έχετε:

$$h = (2.11 \times 16 \times 10^{-19} \text{ joule} \times 587.5 \times 10^{-9} \text{ m}) / (2.9979 \times 10^8 \text{ m/s})$$

$$h = (1983.4 \times 10^{-28} \text{ joule} \cdot \text{m}) / (2.9979 \times 10^8 \text{ m/s})$$

$$h = (19.834 \times 10^2 \times 10^{-28} \text{ joule} \cdot \text{m}) / (2.9979 \times 10^8 \text{ m/s})$$

$$h = (19.834 \times 10^{-26} \text{ joule} \cdot \text{m}) / (2.9979 \times 10^8 \text{ m/s})$$

$$h = 6.61 \times 10^{-34} \text{ joule} \cdot \text{sec}$$

3. Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

Φωτεινές γραμμές φασμάτων αερίων	Μήκος κύματος $\lambda$	Ενέργεια φωτονίων	Συχνότητα
Κίτρινη Ηλίου	587.5		
Κόκκινη Ηλίου	667.8		
Κόκκινη Υδρογόνου	656.3		
Μπλε Υδρογόνου	486.1		
Πράσινη Υδραργύρου	546.1		
Κίτρινη Υδραργύρου	579.0		
Κίτρινη Νέου	587.0		

Είναι αλήθεια ότι τα φωτόνια υψηλότερης συχνότητας έχουν μεγαλύτερη ενέργεια;

4. Χρησιμοποιήστε το πρότυπο του *Bohr* για να υπολογίσετε το μήκος κύματος της ακτινοβολίας που εκπέμπει το άτομο του υδρογόνου, όταν μεταπηδά από την κατάσταση με  $n = 4$  στην κατάσταση με  $n = 2$ .

Μην ξεχνάτε ότι η ενέργεια του ατόμου του υδρογόνου στη θεμελιώδη κατάσταση είναι  $E_1 = -13.6 \text{ eV}$  και  $E_n = E_1/n^2$ .

Συγκρίνετε την τιμή του μήκους κύματος που υπολογίσατε θεωρητικά με την τιμή που βρήκατε πειραματικά.

5. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Βαλμερ επιβεβαιώστε θεωρητικά τις γραμμές που παρατηρήσατε για το γραμμικό φάσμα εκπομπής του υδρογόνου.
6. Πειραματισμός φασματομετρίας εκτός εργαστηρίου:

Προσανατολίστε την σχισμή του φασματομέτρου προς τον ηλιόλουστο ουρανό κοντά στον ήλιο, χωρίς ωστόσο να κοιτάξετε απ' ευθείας τον ήλιο. Στο φασματομέτρο σας θα πρέπει να παρατηρήσετε ένα συνεχές φάσμα όλων των χρωμάτων πάνω στο οποίο εμφανίζονται διάφορες στενές σκοτεινές γραμμές.

Ερωτήσεις:

- (α) Το φάσμα που παρατηρείτε επεκτείνεται από . . . . .  $nm$  έως . . . . .  $nm$ . Κατόπιν σημειώστε τις θέσεις των σκοτεινών γραμμών ( $nm$ ) που παρατηρείτε και καταγράψτε τα σε σχέση με το χρώμα της γραμμής που απορροφάται.
- (β) Συγκρίνετε τις γραμμές απορρόφησης που παρατηρείτε στο φάσμα του ηλίου με αυτές που αναφέρονται στον πίνακα 4. Ποια στοιχεία της φύσης συμπεραίνετε ότι βρίσκονται στον ήλιο;
- (γ) Πιστεύετε ότι έχετε βρει όλα τα στοιχεία που υπάρχουν στον ήλιο; Ναι ή όχι και γιατί;
- (δ) Που πιστεύετε ότι βρίσκονται αυτά τα στοιχεία για να προκαλούν τις γραμμές απορρόφησης στο φάσμα του ηλίου; (Βρίσκονται μέσα στον ήλιο, πάνω στην επιφάνεια του ήλιου, πάνω από τον ήλιο, στο διάστημα μεταξύ του ήλιου και της γης, ή στην ατμόσφαιρα της γης;)

Προσανατολίστε την σχισμή του φασματομέτρου προς ένα φωτεινό άσπρο σύννεφο.

Ερωτήσεις:

- (α) Περιγράψτε το φάσμα που παρατηρείτε και συγκρίνετε με το φάσμα του ηλίου.
- (β) Παρατηρείτε στο φάσμα που δίνει το σύννεφο, τις γραμμές απορρόφησης που εμφανίζονται στο φάσμα του ηλίου;
- (γ) Γιατί πιστεύετε ότι το φάσμα που δίνει το σύννεφο έχει αυτή τη μορφή;

Προσανατολίστε την σχισμή του φασματομέτρου προς το φεγγάρι. (Αυτή η εργασία προτείνεται να γίνει το βράδυ όταν υπάρχει πανσέληνος και το φεγγάρι είναι φωτεινό).

Ερωτήσεις:

- (α) Περιγράψτε το φάσμα που παρατηρείτε και συγκρίνετε με το φάσμα του ηλίου.
- (β) Παρατηρείτε στο φάσμα που δίνει το φεγγάρι, τις γραμμές απορρόφησης που εμφανίζονται στο φάσμα του ηλίου;
- (γ) Είναι οι ίδιες γραμμές; Ναι ή όχι και γιατί;

## 5.8 Πείραμα 4: Φασματοφωτόμετρο - Γωνιόμετρο

### 5.8.1 Σκοπός

- Ρύθμιση του γωνιομέτρου-φασματομέτρου
- Ανάλυση φάσματος με φράγμα. Προσδιορισμός των φασματικών γραμμών του υδραργύρου
- Προσδιορισμός του δείκτη διάθλασης του γυαλιού
- Σχέση ανάμεσα στο δείκτη διάθλασης και το μήκος κύματος (καμπύλη διασποράς)



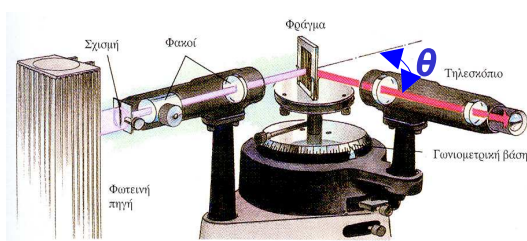
### 5.8.2 Θεωρητικό μέρος

#### Οπτικό Φράγμα

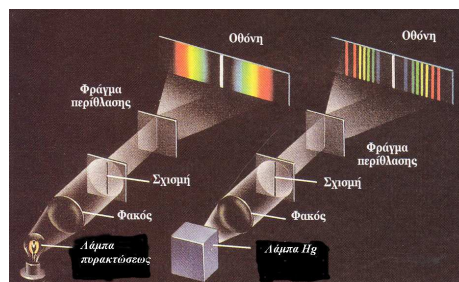
Τα μήκη κύματος, των φασματικών γραμμών της λυχνίας υδραργύρου, προσδιορίζονται από το φράγμα περίθλασης (Σχήμα 18,19), όπου ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$d \sin \theta = m\lambda \quad (5.7)$$

όπου  $m$  είναι η τάξη περίθλασης και παίρνει τιμές  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  και  $d$  είναι η σταθερά του φράγματος και ισούται με την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμών.



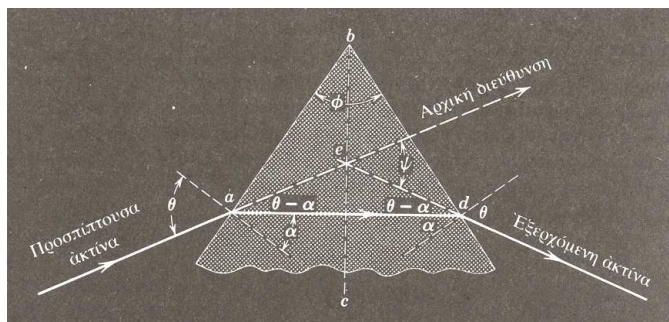
Σχήμα 5.18: Γωνιόμετρο



Σχήμα 5.19: Ανάλυση του φωτός με φράγμα περίθλασης

Στην παρούσα άσκηση, το  $\lambda$  κάθε φασματικής γραμμής (χρώματος) της λάμπας υδραργύρου υπολογίζεται από το μέσο όρο αρκετών μετρήσεων ή από το μέσο όρο των διαφορετικών τάξεων περίθλασης. Το φράγμα που χρησιμοποιούμε έχει 300 γραμμές/ $mm$ .

#### Πρίσμα



Σχήμα 5.20:

Στο πρίσμα του σχήματος 20, μια δέσμη φωτός περνά συμμετρικά μέσα από το πρίσμα. Αυτό σημαίνει ότι για μια συγκεκριμένη ακτίνα φωτός, η γωνία πρόσπτωσης  $\theta$  είναι η ίδια με τη γωνία εξόδου. Αν η γωνία πρόσπτωσης είναι  $\theta$ , η γωνία διάθλασης είναι  $a$  και η γωνία του πρίσματος είναι  $\phi$  τότε από το νόμο διάθλασης του *Snell* έχουμε

$$n = \frac{\sin \theta}{\sin a} \Rightarrow \sin \theta = n \sin a \quad (5.8)$$



$$a = \phi/2 \quad (5.9)$$

$$\psi = 2(\theta - a) \quad (5.10)$$

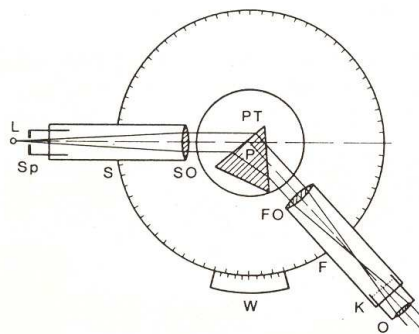
Από τις παραπάνω σχέσεις, τελικά προκύπτει

$$n = \frac{\sin[(\psi + \phi)/2]}{\sin(\phi/2)} \quad (5.11)$$

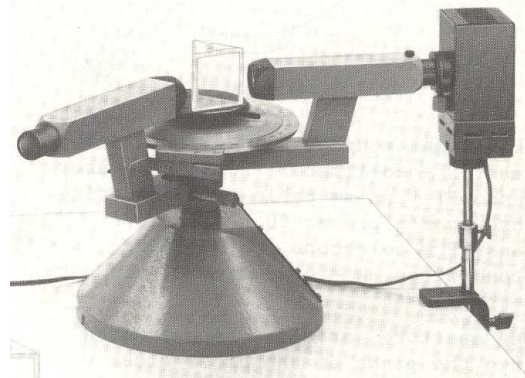
Στη συγκεκριμένη άσκηση υπολογίζεται ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού για όλα τα μήκη κύματος που αντιστοιχούν σε φασματικές γραμμές της λάμπας υδραργύρου.

### 5.8.3 Πειραματικό μέρος

Το φασματομετρο-γωνιόμετρο πρέπει να ρυθμιστεί κατάλληλα ώστε, αν δε μεσολαβεί φράγμα ή πρίσμα μεταξύ κατευθυντήρα και τηλεσκοπίου, η μετρούμενη γωνία να είναι μηδέν μοίρες. Έπειτα τοποθετείται το οπτικό φράγμα περίθλασης (*grating*) και χρησιμοποιείται για να προσδιοριστούν τα μήκη κύματος των φασματικών γραμμών του *Hg*. Κατόπιν τοποθετείται το πρίσμα γυαλιού και ρυθμίζεται ώστε ο διασκεδασμός (γωνία εκτροπής) να είναι ελάχιστος για κάθε μια φασματική γραμμή χωριστά. Τέλος καταγράφεται η γωνιακή θέση του τηλεσκοπίου (ελάχιστη γωνία εκτροπής) για κάθε φασματική γραμμή και υπολογίζεται ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού για κάθε μήκος κύματος.



Σχήμα 5.21:



Σχήμα 5.22:

Στην άσκηση που θα κάνουμε, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα

1. Ευθυγράμμισουμε το όργανο ώστε να δείχνει γωνία εκτροπής μηδέν μοίρες, όταν δεν παρεμβάλεται το πρίσμα (ή το φράγμα) ανάμεσα στο τηλεσκόπιο παρατήρησης και στη φωτεινή πηγή.
2. Τοποθετούμε το πρίσμα σύμφωνα με τη γεωμετρία των σχημάτων 20, 21 και 22.
3. Σε κάθε φασματική γραμμή που βλέπουμε μέσα από το τηλεσκόπιο, στρέφουμε την περιστρεφόμενη βάση του πρίσματος αριστερά και δεξιά, μέχρι να βρούμε τη θέση στην οποία ο διασκεδασμός της συγκεκριμένης φασματικής γραμμής να είναι ελάχιστος. Στη θέση αυτή μετράμε τη γωνία  $\psi$ .

4. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 για κάθε μια φασματική γραμμή και υπολογίζουμε το δείκτη διάθλασης από την εξίσωση (5), γνωρίζοντας ότι  $\phi = 60^\circ$ .
5. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα του δείκτη διάθλασης σε συνάρτηση του μήκους κύματος (καμπύλη διασποράς).

## 5.9 Βιβλιογραφία

- Φυσική Hugh D. Young, τόμος Β.
- Γενική Χημεία, Ebbing Gammon, έκτη έκδοση.
- P.S.S.C. Φυσική, Haber-Schaim, Dodge, Walter, Ίδρυμα Ευγενίδου
- Φυσική Γενικής Παιδείας, Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου
- Εργαστηριακός Οδηγός Φυσικής, Γ Τάξης Ενιαίου Λυκείου
- Project Star Spectrometer, William Luzader, Learning Technologies, Inc.
- ThinkQuest library, <http://www.thinkquest.org/about/index.html>
- University of Colorado, Physics, <http://www.colorado.edu/physics/2000/quantumzone>

## Κεφάλαιο 6

# Μετατροπή της ηλιακής ενέργειας σε ηλεκτρική

### 6.1 Ηλιακή ενέργεια

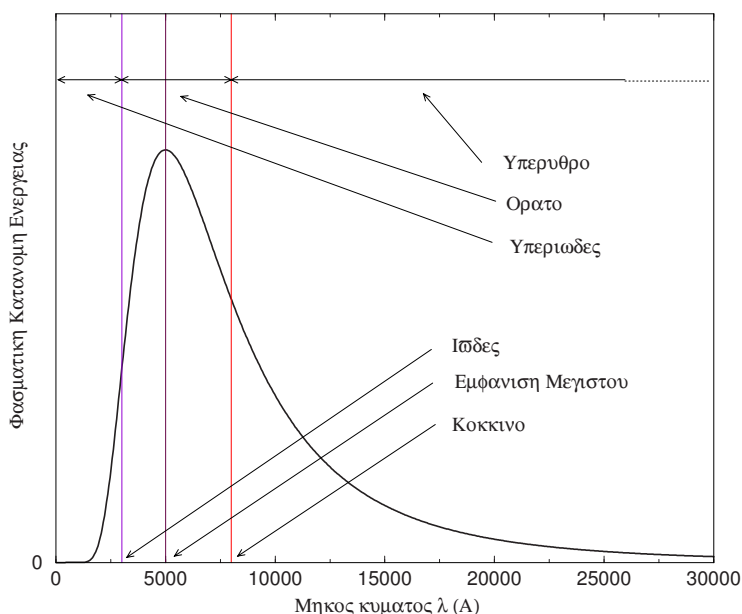
Όπως είναι γνωστό σε όλους μας, όλες οι δραστηριότητες που λαμβάνουν χώρα πάνω στη Γη αντλούν ενέργεια από τον Ήλιο. Χωρίς την ενέργεια αυτή, στη Γη δε θα είχε αναπτυχθεί το φαινόμενο της ζωής. Η ενέργεια αυτή απελευθερώνεται από τις πυρηνικές αντιδράσεις που λαμβάνουν χώρα στο κέντρο του Ήλιου και φεύγει από την επιφάνειά του υπό τη μορφή ακτινοβολίας μέλανος σώματος, διατηρώντας την θερμοκρασία της επιφάνειας σε μια τιμή περίπου  $5800^{\circ}K$ . Λόγω αυτής της τιμής της επιφανειακής θερμοκρασίας, η εκπεμπόμενη από τον Ήλιο ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία έχει ένα εύρος συχνοτήτων που περιλαμβάνουν τόσο το ορατό και το υπέρυθρο ( $IR$ ), όσο και το υπεριώδες ( $UV$ ). Η περιοχή του ορατού αντιστοιχεί στο 40% περίπου της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας, ενώ η υπεριώδης μόλις το 14%, με το μέγιστο να εμφανίζεται στα ( $\approx 5000 \text{ \AA}$ ). Αυτό προκύπτει από τον περίφημο τύπο του Planck, σύμφωνα με τον οποίο η φασματική κατανομή της ενέργειας (δηλαδή η κατανομή της ενέργειας στα διάφορα μήκη κύματος (ή τις συχνότητες) που εκπέμπει ένα μέλαν σώμα είναι (βλέπε Σχ. 1)

$$\frac{dU}{d\omega} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (6.1)$$

όπου  $\frac{dU}{d\omega} \times \delta\omega$  είναι η ενέργεια που εκπέμπεται από το μέλαν σώμα στη φασματική περιοχή  $[\omega, \omega + \delta\omega]$ , ( $\omega = 2\pi f$  όπου  $f$  η συχνότητα της ακτινοβολίας),  $V$  ο όγκος μέσα στον οποίο διαδίδεται η ακτινοβολία,  $\hbar = h/(2\pi) = 1.054 \times 10^{-34} J \times sec$ , ( $h$  η σταθερά του Planck),  $c = 3 \times 10^8 m/sec$  η ταχύτητα του φωτός,  $k_B = 1.380 \times 10^{-23} Joule/^{\circ}K$  η σταθερά του Boltzman και  $T$  η θερμοκρασία του μέλανος σώματος. (Στο σχ. 1 δείχνουμε την κατανομή της ενέργειας  $dU/d\lambda$  ως προς τα μήκη κύματος και όχι ως προς τις συχνότητες που περιγράφει ο τύπος του Planck.)

Η ενέργεια αυτή, ελάχιστα αλλάζει στο οκτάλεπτο περίπου ταξίδι που χρειάζεται μέχρι να φτάσει στη Γη, η οποία δέχεται ένα πολύ μικρό κομμάτι αυτής, αφού η ακτινοβολία αυτή, φεύγοντας απ' τον Ήλιο, διαδίδεται προς όλες τις κατευθύνσεις και ένα μικρό μόνο μέρος της συναντά τη Γη κατά τη διάδοσή της.

Απ' αυτό το κομμάτι που τελικά φτάνει στη Γη, ένα ποσοστό περίπου 30% αντανakλάται αμέσως πίσω στο διάστημα και από το εναπομείναν, περίπου τα 2/3 απορρο-



**Σχήμα 6.1:** Φασματική κατανομή της Ηλιακής ενέργειας ως προς τα μήκη κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας, όπως προκύπτει απ' τον τύπο του Planck για θερμοκρασία  $T = 5800^{\circ}K$ . Όπως φαίνεται, το μεγαλύτερο μέρος της ακτινοβολίας είναι στο ορατό και το μέγιστο της κατανομής είναι στα 5000 Å. Η ακτινοβολία όμως εκτείνεται και στο υπεριώδες (UV) και στο υπέρυθρο (IR).

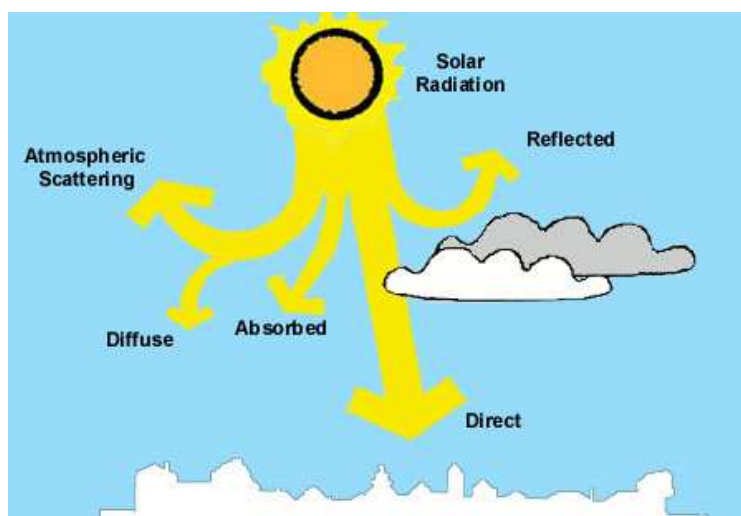
φώνται από την ατμόσφαιρα, τη θάλασσα και την επιφάνεια της Γης και το υπόλοιπο 1/3 αυτής χρησιμοποιείται από το νερό για την εξάτμισή του. Για τη φωτοσύνθεση, που αποτελεί το βασικό μηχανισμό απορρόφησης ενέργειας για τα φυτά και το φυτοπλαγκτόν της επιφάνειας των ωκεανών, μόνο ένα πολύ μικρό ποσοστό, της τάξης του 0.03%, χρησιμοποιείται.

Από την άλλη πλευρά, η Γη ακτινοβολεί κι αυτή ως μέλαν σώμα αλλά επειδή η θερμοκρασία της είναι πολύ μικρότερη απ' αυτή του Ήλιου, η εκπεμπόμενη ενέργεια περιλαμβάνει συχνότητες στο υπέρυθρο (IR). Η ενέργεια αυτή χάνεται στο διάστημα. Η ενεργειακή ισορροπία στη Γη, από την εισροή ενέργειας από τον Ήλιο και την εκροή ενέργειας από την ίδια, επέρχεται όταν η επιφάνεια της Γης χάνει ενέργεια με τον ίδιο ρυθμό μ' αυτό που προσλαμβάνει. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η Γη να διατηρεί μια μέση θερμοκρασία περίπου  $12^{\circ}C$ , υπολογισμένη στη διάρκεια του χρόνου για μέρα και νύχτα.

## 6.2 Παγιδεύοντας την Ηλιακή ενέργεια

### 6.2.1 Μετατρέποντας την Ηλιακή ενέργεια σε άλλες μορφές

Αν και η εισροή ενέργειας από τον Ήλιο είναι η αιτία ανάπτυξης του φαινομένου της ζωής, η μετατροπή της σε άλλες μορφές ενέργειας που να μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις ανθρώπινες δραστηριότητες, είναι μια δύσκολη υπόθεση. Δύο είναι οι τρόποι με την οποία γίνεται σήμερα αυτή η μετατροπή. Ο ένας είναι με τη χρήση του ηλιακού



**Σχήμα 6.2:** Ηλιακή ακτινοβολία στη Γη

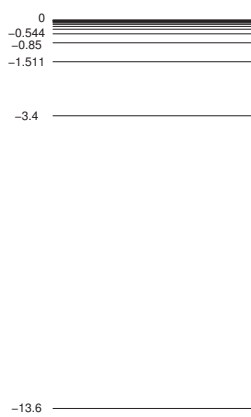
θερμοσίφωνα, όπου η Ηλιακή ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική για το ζέσταμα του νερού και ο άλλος είναι χρήση Ηλιακών κυττάρων για τη μετατροπή της σε ηλεκτρική ενέργεια. Με τον ηλιακό θερμοσίφωνα η μετατροπή επιτυγχάνεται ικανοποιητικά με λίγες απώλειες. Όμως η αξία της ενέργειας που προκύπτει με το ζέσταμα του νερού, δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλη αφού η χρήση της για άλλες δραστηριότητες (εκτός από το ζέσταμα του νερού) που συνεπάγεται τη μετατροπή της σε άλλη μορφή ενέργειας, δε γίνεται χωρίς μεγάλες απώλειες. Από την άλλη πλευρά, η μετατροπή της ηλιακής ενέργειας μέσω των ηλιακών κυττάρων σε ηλεκτρική έχει αρκετά μεγάλη αξία αφού η ηλεκτρική ενέργεια μπορεί με λίγες απώλειες να μετατραπεί σε όλες τις μορφές ενέργειας. Η απόδοση όμως των ηλιακών κυττάρων είναι πολύ μικρή και συνδυαζόμενη με το υψηλό της κόστος παραγωγής, καθίσταται προς στιγμήν ασύμφορη για ευρεία εφαρμογή. Παρ' όλα αυτά τα ηλιακά κύτταρα χρησιμοποιούνται για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας σε περιοχές που δεν είναι εύκολη η μεταφορά ενέργειας, όπως νησιά ή απομακρυσμένες και δύσβατες περιοχές αλλά και επικουρικά στα κυρίως δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας.

### 6.2.2 Λειτουργία των Ηλιακών κυττάρων <sup>1</sup>

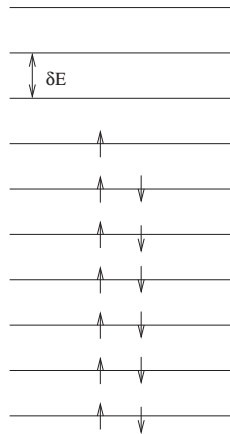
Όπως γνωρίζουμε, τα ηλεκτρόνια των ατόμων βρίσκονται σε διακριτές ηλεκτρονικές καταστάσεις (τροχιακά) (π.χ.  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p_x$ ,  $2p_y$ ,  $2p_z$ ,  $3d_{xy}$  κ.τ.λ.). Κατά παρόμοιο τρόπο τα ηλεκτρόνια των στερεών σωμάτων βρίσκονται κι αυτά σε κάποιες διακριτές ηλεκτρονικές καταστάσεις, οι οποίες όμως είναι τόσο πυκνές, ώστε να μπορούν να θεωρηθούν σα συνεχείς.

Υπό κάποιες προϋποθέσεις, ανάμεσα σ' αυτές τις πολύ πυκνές ενεργειακές καταστάσεις εμφανίζονται ενεργειακές περιοχές στις οποίες δεν υπάρχουν ενεργειακές καταστάσεις. Τις περιοχές αυτές τις ονομάζουμε ενεργειακά χάσματα, ενώ τις περιοχές που εμφανίζονται ένα σύνολο πυκνών ενεργειακών καταστάσεων τις ονομάζουμε

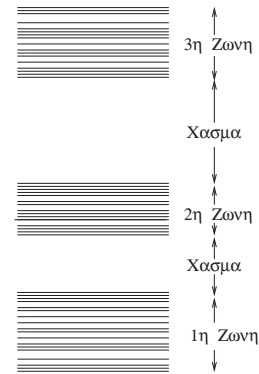
<sup>1</sup>Η παράγραφος αυτή μπορεί να παραληφθεί σε πρώτη ανάγνωση



**Σχήμα 6.3:** Το φάσμα (οι ενεργειακές καταστάσεις) του ατόμου του Υδρογόνου. Στα άτομα οι ενεργειακές καταστάσεις είναι διακριτές.



**Σχήμα 6.4:** Στα στερεά οι ενεργειακές καταστάσεις είναι πυκνές και μπορούν να θεωρηθούν συνεχείς. Τα βελάκια συμβολίζουν τα ηλεκτρόνια με *spin* πάνω και κάτω, που έχουν εποικίσει τις ενεργειακές καταστάσεις



**Σχήμα 6.5:** Ανάμεσα στις ενεργειακές ζώνες εμφανίζονται ενεργειακά χάσματα

#### ενεργειακές ζώνες.

Ο εποικισμός αυτών των ενεργειακών καταστάσεων (δηλαδή το «γέμισμά» τους με ηλεκτρόνια) γίνεται ξεκινώντας από τη χαμηλότερη ενεργειακά κατάσταση προς την ψηλότερη, ακολουθώντας την αρχή του Pauli. Έτσι οι ενεργειακές ζώνες «γεμίζουν» με ηλεκτρόνια μέχρι ένα όριο. Η υψηλότερη ενεργειακή ζώνη στην οποία υπάρχουν καταστάσεις κατειλημμένες από ηλεκτρόνια λέγεται ζώνη σθένους ενώ η αμέσως πάνω απ' αυτή, που θα είναι η χαμηλότερη ενεργειακή ζώνη στην οποία δε θα υπάρχουν κατειλημμένες από ηλεκτρόνια καταστάσεις, λέγεται ζώνη αγωγιμότητας.

Για να υπάρξει ηλεκτρική αγωγιμότητα σ' ένα υλικό, θα πρέπει να υπάρχουν μη κατειλημμένες ενεργειακές στάθμες πολύ κοντά στην τελευταία κατειλημμένη στάθμη, ώστε με μια μικρή διαταραχή από ένα εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο (π.χ. μια μπαταρία) να μπορέσουν τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στις υψηλότερες κατειλημμένες στάθμες να μεταθούν στις μη κατειλημμένες

Αν η υψηλότερη κατειλημμένη ενεργειακή κατάσταση είναι η τελευταία ενεργειακή κατάσταση της ζώνης σθένους, τότε η αμέσως υψηλότερη ενεργειακή κατάσταση βρίσκεται στη ζώνη αγωγιμότητας και απέχει απ' αυτήν τόσο όσο είναι το εύρος του ενεργειακού χάσματος. Αν το εύρος του ενεργειακού χάσματος είναι μικρό (μέχρι το πολύ  $2 - 3eV$ .) τότε μερικά ηλεκτρόνια μπορούν σε θερμοκρασία δωματίου να βρουν την ενέργεια που χρειάζεται και να περάσουν στη ζώνη αγωγιμότητας, εμφανίζοντας έτσι κάποια μικρή αγωγιμότητα. Ένα τέτοιο υλικό ονομάζεται ημιαγωγός.

Από τους πιο δημοφιλείς ημιαγωγούς είναι το πυρίτιο *Si*. Τα άτομα του πυριτίου κατασκευάζουν μια κρυσταλλική (περιοδική) δομή έτσι ώστε κάθε άτομο πυριτίου να τοποθετείται στο κέντρο κανονικού τετραέδρου και να κάνει δεσμούς με τέσσερα άλλα άτομα πυριτίου, καθένα απ' τα οποία βρίσκεται τοποθετημένο στις κορυφές του τετραέδρου. Το χάσμα του *Si* ανάμεσα στη ζώνη σθένους και στη ζώνη αγωγιμότητας είναι ίσο με  $1.14eV$  σε θερμοκρασία  $300^{\circ}K$ . Αν ένα φωτόνιο με τόση ή μεγαλύτερη

ενέργεια απορροφηθεί από ένα ηλεκτρόνιο που βρίσκεται στη ζώνη σθένους, τότε το ηλεκτρόνιο αυτό διεγερόμενο, θα μεταβεί σε μια κατάσταση της ζώνης αγωγιμότητας. Αποδιεγερόμενο όμως, στη συνέχεια, θα επιστρέψει πάλι στη ζώνη σθένους κι έτσι δε θα υπάρξει αγωγιμότητα. Για να υπάρξει αγωγιμότητα θα πρέπει τα διεγερμένα ηλεκτρόνια να παραμείνουν στη ζώνη αγωγιμότητας και όχι να επιστρέψουν στη ζώνη σθένους. Αυτό επιτυγχάνεται με το λεγόμενο εμπλουτισμό του πυριτίου με προσμίξεις πεντασθενών (π.χ. *P, As, Sb*) ή τρισθενών (π.χ. *B, Al, Ga, In*) στοιχείων του περιοδικού πίνακα. Αν ο καθαρός κρύσταλλος πυριτίου εμπλουτισθεί με τέτοια στοιχεία σε μια αναλογία 1 άτομο πεντασθενούς ή τρισθενούς στοιχείου ανά  $10^3 - 10^7$  άτομα πυριτίου, τότε τα άτομα των προσμίξεων θα αντικαταστήσουν τα άτομα του πυριτίου από τις αρχικές τους θέσεις, χωρίς να αλλάξει η δομή του κρυσταλλικού πυριτίου και θα δημιουργήσουν ομοιοπολικούς δεσμούς με τα άτομα του πυριτίου.

Αν ο εμπλουτισμός γίνεται με άτομα πεντασθενούς στοιχείου, τότε για κάθε άτομο πεντασθενούς στοιχείου θα εμφανιστεί περίσσεια ενός ηλεκτρονίου το οποίο θα μεταφερθεί υποχρεωτικά στη ζώνη αγωγιμότητας, αφού η ζώνη σθένους θα είναι ήδη γεμάτη με ηλεκτρόνια (γιατί;). Έτσι η ύπαρξη μερικών ηλεκτρονίων στη ζώνη αγωγιμότητας θα επιτρέψει την ύπαρξη μικρής αγωγιμότητας σ' αυτή τη δομή. Τέτοιοι ημιαγωγοί ονομάζονται ημιαγωγοί τύπου  $-n$  ( $n$  από το *negative* = αρνητικός).

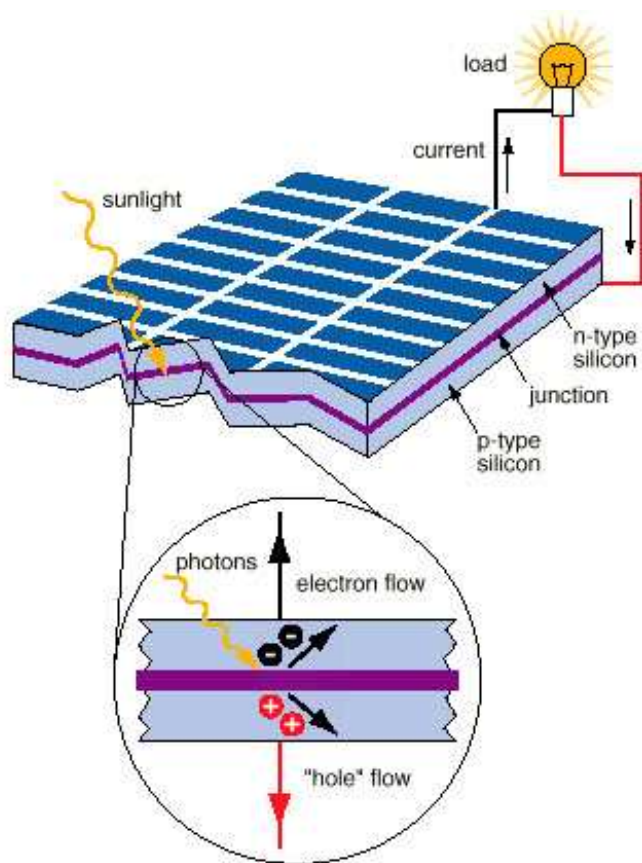
Αν ο εμπλουτισμός γίνεται με άτομα τρισθενούς στοιχείου, τότε για κάθε άτομο τρισθενούς στοιχείου θα εμφανιστεί έλλειψη ενός ηλεκτρονίου στους ομοιοπολικούς δεσμούς που θα κάνει με το πυρίτιο κι έτσι η ζώνη σθένους δε θα είναι πλήρως κατειλημμένη. Κατά συνέπεια τα ηλεκτρόνια της ζώνης σθένους θα έχουν περιθώριο να μεταβούν στις αμέσως ανώτερες μη κατειλημμένες στάθμες της ζώνης τους και θα εμφανίσουν μια μικρή αγωγιμότητα. Τέτοιοι ημιαγωγοί ονομάζονται ημιαγωγοί τύπου  $-p$  ( $p$  από το *positive* = θετικός). Για λόγους ευκολίας, τις μη κατειλημμένες καταστάσεις της ζώνης σθένους μπορούμε να τις χειριστούμε σαν ηλεκτρόνια με θετικό φορτίο, τις επονομαζόμενες οπές.

Όταν έρθει σε επαφή η επιφάνεια ενός ημιαγωγού τύπου  $-p$  με την επιφάνεια ενός ημιαγωγού τύπου  $-n$  δημιουργείται η λεγόμενη επαφή  $p-n$ . Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια της ζώνης αγωγιμότητας του ημιαγωγού τύπου  $-n$  θα προσπαθήσουν να διαχυθούν στον ημιαγωγό τύπου  $-p$ . Ομοίως οι οπές θα προσπαθήσουν να διαχυθούν στον ημιαγωγό τύπου  $-n$ . Όμως μόλις αρχίσει να γίνεται η διάχυση των ηλεκτρονίων, πίσω τους θα μένει ένα πλεόνασμα θετικού φορτίου από τους πυρήνες των ατόμων του πεντασθενούς στοιχείου. Ομοίως η διάχυση των οπών στον ημιαγωγό τύπου  $-p$  θα αφήσει πίσω της πλεόνασμα ηλεκτρονίων, δηλ. αρνητικό φορτίο. Έτσι στον ημιαγωγό τύπου  $-n$  θα μαζευτεί θετικό φορτίο ενώ στον ημιαγωγό τύπου  $p$  θετικό. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα να δημιουργηθεί στο χώρο γύρω από την επαφή  $p-n$  ένα ηλεκτρικό πεδίο, που θα σταματήσει την παραπέρα διάχυση οπών και ηλεκτρονίων προς το απέναντι κομμάτι της επαφής.

Τα φωτοβολταϊκά κύτταρα δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια επαφή  $p-n$  πυριτίου. Αποτελούνται από δύο στρώματα. Το πάνω στρώμα, στο οποίο πέφτει το φως, είναι ένα λεπτό στρώμα τύπου  $-n$ , που περιέχει περίπου ένα άτομο φωσφόρου ανά χίλια άτομα πυριτίου, ενώ το κάτω στρώμα, είναι ένα παχύ στρώμα τύπου  $-p$ , που περιέχει περίπου ένα άτομο βορίου ανά ένα εκατομμύριο άτομα πυριτίου.

Όταν το φως πέφτει στο πάνω στρώμα του πυριτίου, μερικά ηλεκτρόνια διεγείρονται στη ζώνη αγωγιμότητας, αφήνοντας πίσω τους οπές στη ζώνη σθένους. Αυτό δημιουργεί πλεόνασμα ηλεκτρονίων στη ζώνη αγωγιμότητας και πλεόνασμα οπών στη ζώνη σθένους





**Σχήμα 6.6:** Η λειτουργία του φωτοβολταϊκού κυττάρου

του. Αυτά τα ηλεκτρόνια και οι οπές απωθούνται από το ηλεκτρικό πεδίο (που έχει δημιουργηθεί, όπως είπαμε, πάνω στην επαφή  $p-n$ ) και προχωρούν, τα μεν ηλεκτρόνια προς την πάνω επιφάνεια του στρώματος τύπου  $n$ , οι δε οπές προς την κάτω επιφάνεια του στρώματος τύπου  $p$  του πυριτίου. Κατ' αυτό τον τρόπο το στρώμα τύπου  $n$ , έξω από την περιοχή της επαφής, γίνεται αρνητικά φορτισμένο, ενώ το στρώμα τύπου  $p$  φορτίζεται θετικά με αποτέλεσμα να δημιουργείται διαφορά δυναμικού στα άκρα του φωτοβολταϊκού κυττάρου. Έτσι αν η πάνω επιφάνεια του πυριτίου, συνδέεται με την κάτω επιφάνειά του, μέσω ενός ηλεκτρικού κυκλώματος, τότε το κύκλωμα αυτό θα διαρρέεται από ρεύμα, όσο στην πάνω επιφάνεια πέφτει φως.

Οι δύο πλευρές του φωτοβολταϊκού κυττάρου καλύπτονται με μια αντιανακλαστική επίστρωση έτσι ώστε να μην υπάρχουν απώλειες ηλιακού φωτός από ανάκλαση. (Χωρίς αυτό, θα χανόταν περίπου το 30% της ηλιακής ακτινοβολίας).

### 6.2.3 Δυνατότητες φωτοβολταϊκών κυττάρων

Υπό ισχυρό ηλιακό φως η ηλεκτρική τάση που αποδίδει ένα φωτοβολταϊκό κύτταρο είναι περίπου  $0.5\text{Volt}$ . Ένα φωτοβολταϊκό κύτταρο με επιφάνεια  $100\text{cm}^2$  δίνει ρεύμα περίπου  $3\text{Ampere}$ . Συνδέοντας σε σειρά τα φωτοβολταϊκά κύτταρα, μπορούμε να κατασκευάσουμε τα φωτοβολταϊκά στοιχεία που αποδίδουν περίπου  $12\text{Volt}$  τάση. Τα



στοιχεία αυτά μπορούν να συνδεθούν σε συστοιχίες για να δώσουν μεγαλύτερες εντάσεις ρεύματος. Η τάση αυτή του συνεχούς ρεύματος μπορεί στη συνέχεια να μετατραπεί σε εναλλασσόμενο και να μετασχηματιστεί στην επιθυμητή τάση.

Δύο μεγάλα πλεονεκτήματα της δημιουργίας ηλεκτρικής ενέργειας με τα φωτοβολταϊκά κύτταρα (εκτός του ότι δε μολύνουν το περιβάλλον) είναι ότι δε χρειάζεται να είναι όλα μαζί συγκεντρωμένα και ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για κάθε χρήση (από ρολόγια χειρός και κομπιουτεράκια, μέχρι εργοστάσια υψηλής ισχύος). Ένα άλλο πλεονέκτημα είναι ότι η κατασκευή των στοιχείων και των συστοιχιών από τα φωτοβολταϊκά κύτταρα αντέχει για τουλάχιστον 20 χρόνια. Το μειονέκτημα όμως αυτών των συσκευών είναι ότι ο ήλιος δε φωτίζει τη νύχτα ή όταν είναι συννεφιά. Κατά συνέπεια η αποθήκευση της ενέργειας είναι απαραίτητη. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας μπαταρίες, αλλά ένας άλλος τρόπος είναι να παράγεται Υδρογόνο από ηλεκτρόλυση και η αποθήκευση της ενέργειας σαν χημική ενέργεια στο Υδρογόνο. Αυτή η αποθηκευμένη ενέργεια μπορεί στη συνέχεια να ελευθερωθεί σε καθαρή μορφή (που δε μολύνει το περιβάλλον) υπό μορφή ηλεκτρικής ενέργειας σε ένα fuel cell.

### 6.3 Πειραματικό μέρος

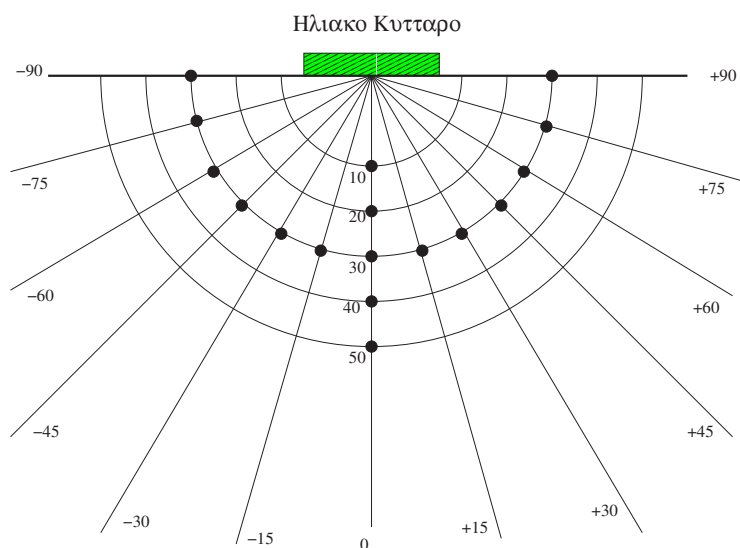
Το φωτοβολταϊκό στοιχείο που υπάρχει στο εργαστήριο, αποδίδει μέγιστη τάση περίπου  $3Volt$  υπό κάθετη πρόσπτωση των ακτίνων του ήλιου πάνω σ' αυτό, σε μια ηλιόλουστη μέρα και μπορεί να δώσει ρεύμα μερικά  $mAmpere$ . Όπως αντιλαμβάνεστε όταν η μέρα δεν είναι ηλιόλουστη, η απόδοση του φωτοβολταϊκού στοιχείου πέφτει.

Στο παρόν πείραμα θα προσπαθήσουμε να δούμε πώς η απόδοση του φωτοβολταϊκού στοιχείου εξαρτάται από τη γωνία πρόσπτωσης της φωτεινής ακτινοβολίας και πώς εξαρτάται από την απόσταση της φωτεινής πηγής. Για να μελετήσουμε την εξάρτηση της απόδοσης του φωτοβολταϊκού στοιχείου από τη γωνία πρόσπτωσης της φωτεινής ακτινοβολίας, θα πρέπει να μετρήσουμε την ένταση του ρεύματος που αποδίδει το φωτοβολταϊκό στοιχείο, όταν μεταβάλλουμε τη γωνία πρόσπτωσης, κρατώντας σταθερή την απόσταση ανάμεσα στη φωτεινή πηγή και το φωτοβολταϊκό στοιχείο.

Για να μελετήσουμε την εξάρτηση της απόδοσης του φωτοβολταϊκού στοιχείου από την απόσταση ανάμεσα στη φωτεινή πηγή και στο φωτοβολταϊκό στοιχείο, θα πρέπει να μετρήσουμε την ένταση του ρεύματος που αποδίδει το φωτοβολταϊκό στοιχείο, όταν μεταβάλλουμε την απόσταση αυτή, κρατώντας σταθερή τη γωνία πρόσπτωσης. (Θα μπορούσαμε να κάνουμε τις μετρήσεις μας υπό κάθετη πρόσπτωση των φωτεινών ακτίνων πάνω στο φωτοβολταϊκό στοιχείο, δηλαδή υπό γωνία πρόσπτωσης μηδέν).

Οι μετρήσεις της έντασης του ρεύματος γίνονται απ' ευθείας με το αμπερόμετρο το οποίο μας δίνεται στο εργαστήριο. Οι μετρήσεις αυτές μπορούν να γίνουν χωρίς την παρέμβαση κάποιας αντίστασης. Σ' αυτή την περίπτωση μετράμε το μέγιστο ρεύμα που μπορεί να αποδώσει το φωτοβολταϊκό στοιχείο υπό τη συγκεκριμένη γωνία πρόσπτωσης του φωτός και για τη συγκεκριμένη απόσταση του φωτοβολταϊκού στοιχείου από την πηγή του φωτός.

Για το πείραμά μας, ως πηγή του φωτός θα πάρουμε μια λάμπα πυρακτώσεως περίπου  $100Watt$  που μας δίνεται στο εργαστήριο. Τοποθετούμε τη λάμπα σε απόσταση  $10cm$  ανάμεσα στο νήμα πυρακτώσεως και στο φωτοβολταϊκό κύτταρο, φροντίζοντας ώστε η νοητή ευθεία ανάμεσα στο νήμα πυρακτώσεως και στο φωτοβολταϊκό στοιχείο να είναι κάθετη στην επιφάνεια του φωτοβολταϊκού στοιχείου και να περνάει απ' το



**Σχήμα 6.7:** Οι μετρήσεις πρέπει να γίνουν πάνω στα σημεία που φαίνονται στο σχήμα

κέντρο του και μετράμε την ένταση του ρεύματος που αποδίδει το φωτοβολταϊκό κύτταρο (βλέπε σχήμα). (Προφανώς αυτή η νοητή ευθεία συμπίπτει με τη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το κέντρο του φωτοβολταϊκού στοιχείου).

Την απόσταση ανάμεσα στο νήμα πυρακτώσεως και το φωτοβολταϊκό στοιχείο, τη μετράμε με ένα μέτρο που μας δίνεται ή είναι ήδη προσδιορισμένη πάνω σε ένα χαρτόνι.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια μέτρηση μεταβάλλοντας την απόσταση ανά  $10\text{cm}$ , μέχρι το μήκος του ενός μέτρου. (Συνολικά 9 μετρήσεις.) Αφού ολοκληρώσουμε το πρώτο σετ των 9 μετρήσεων, επαναλαμβάνουμε τις ίδιες μετρήσεις 5 φορές και για κάθε διαφορετική απόσταση προσδιορίζουμε την τιμή της έντασης του ρεύματος, για κάθε διαφορετική απόσταση, με στατιστικό τρόπο (μέση τιμή, σφάλμα μέσης τιμής, κτλ).

Στη συνέχεια διατηρώντας σταθερή την απόσταση στα  $30\text{cm}$ , ανάμεσα στο φωτοβολταϊκό στοιχείο και στη φωτεινή πηγή, θα μετρήσουμε τις τιμές της έντασης του ρεύματος αλλάζοντας τη γωνία πρόσπτωσης των φωτεινών ακτίνων. Από το προηγούμενο σετ μετρήσεων έχετε ήδη προσδιορίσει τη μέτρηση της έντασης του ρεύματος για γωνία πρόσπτωσης ίσης με  $0^\circ$  σε απόσταση  $30\text{cm}$ . Κάντε τώρα τις ίδιες μετρήσεις (βλέπε σχήμα) για γωνίες πρόσπτωσης  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$  αριστερά και δεξιά από την κάθετη ευθεία στην επιφάνεια του φωτοβολταϊκού κυττάρου (διατηρώντας πάντα την απόσταση ανάμεσα στο φωτοβολταϊκό στοιχείο και τη φωτεινή πηγή στα  $30\text{cm}$ ).

### Επεξεργασία των μετρήσεων

1. Κάντε στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων και βρείτε την πιθανότερη τιμή του ρεύματος (μέση τιμή) και την τυπική απόκλιση των μετρήσεών σας, όπως αναφέρεται στο πρώτο μέρος του βιβλίου. Απορρίψτε όλες τις τιμές χρειάζεται να απορριφθούν και προσδιορίστε εκ νέου την πιθανότερη τιμή της έντασης του ρεύματος και το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής, για κάθε απόσταση και για κάθε γωνία, που έχετε πάρει μετρήσεις.

2. Τοποθετήστε σε μιλιμετρέ χαρτί (ή με κάποιο πρόγραμμα γραφικών σε υπολογιστή) τις τιμές του ρεύματος που μετρήσατε (δηλ. αυτές που βρήκατε από τη στατιστική ανάλυση), ως συνάρτηση του αντιστρόφου του τετραγώνου της απόστασης  $1/r^2$ . (Δηλαδή στον άξονα  $yy'$  θα τοποθετήσετε τις τιμές της έντασης του ρεύματος και στον άξονα  $xx'$  τις τιμές του αντιστρόφου του τετραγώνου της απόστασης  $1/r^2$  ανάμεσα στο φωτοβολταϊκό στοιχείο και τη φωτεινή πηγή.)
3. Τα πειραματικά σας σημεία που τοποθετήσατε στο μιλιμετρέ χαρτί, θα πρέπει να σχηματίζουν ευθεία. Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προσδιορίστε αυτή την ευθεία για την ένταση του ρεύματος, ως συνάρτηση του αντιστρόφου του τετραγώνου της απόστασης. Τι συμπέρασμα βγάζετε για την εξάρτηση της έντασης του ρεύματος που αποδίδει το φωτοβολταϊκό στοιχείο, ως συνάρτηση της απόστασης της φωτεινής πηγής απ' αυτό;
4. Τοποθετήστε σε μιλιμετρέ χαρτί (ή με κάποιο πρόγραμμα γραφικών σε υπολογιστή) τις τιμές της έντασης του ρεύματος, που μετρήσατε για σταθερή απόσταση  $30cm$ , ως συνάρτηση της γωνίας πρόσπτωσης των φωτεινών ακτίνων πάνω στην επιφάνεια του φωτοβολταϊκού στοιχείου. Τις γωνίες που μετρήσατε αριστερά από την κάθετη ευθεία στην επιφάνεια του φωτοβολταϊκού στοιχείου θεωρήστε τις ως αρνητικές γωνίες ενώ αυτές που μετρήσατε δεξιά θεωρήστε τις θετικές. Αν  $I_0$  είναι η τιμή της έντασης που μετρήσατε για την κάθετη γωνία πρόσπτωσης (δηλ. για γωνία 0), κάντε στο ίδιο μιλιμετρέ χαρτί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $I_0 \cos \phi$ . Τι συμπέρασμα βγάζετε για την εξάρτηση της έντασης του ρεύματος από τη γωνία πρόσπτωσης;
5. Αν θεωρήσουμε ότι η τάση που αποδίδει ένα φωτοβολταϊκό στοιχείο δεν εξαρτώνται από άλλους παράγοντες εκτός από την ένταση της φωτεινής πηγής  $J$ , τη γωνία πρόσπτωσης  $\phi$  της φωτεινής ακτινοβολίας πάνω στην επιφάνεια του φωτοβολταϊκού στοιχείου και την απόσταση  $r$  της φωτεινής πηγής απ' αυτήν, ποια σχέση συνδέει την τάση που αποδίδει το φωτοβολταϊκό στοιχείο με τα τρία αυτά μεγέθη σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πειράματος;
6. Όπως θα έχετε ήδη δει, η απόδοση ενός φωτοβολταϊκού στοιχείου εξαρτάται από την απόστασή του από την πηγή του φωτός. Πόσο πολύ θα διαφέρει η απόδοσή του αν τοποθετηθεί στα Ιμαλάια, σε σχέση με αν τοποθετηθεί στην επιφάνεια της θάλασσας, με την προϋπόθεση πάντα ότι ο ήλιος πέφτει κάθετα στην επιφάνειά του;
7. Μια οικογένεια τεσσάρων ατόμων χρειάζεται περίπου  $4500kWh$  ηλεκτρική ενέργεια στη διάρκεια ενός έτους. Κατά μέσο όρο τα φωτοβολταϊκά κύτταρα μπορούν στη διάρκεια ενός έτους να παράγουν  $100kWh/m^2$ . Υπολογίστε πόσα τετραγωνικά μέτρα ( $m^2$ ) ηλιακών κυττάρων θα χρειαστεί αυτή η οικογένεια για να καλύψει τις ανάγκες της σε ηλεκτρική ενέργεια.
8. \* Τι είναι τα ενεργειακά χάσματα;
9. \* Πότε ένα υλικό είναι αγωγός, ημιαγωγός, μονωτής;
10. \* Εξηγήστε με δικά σας λόγια πώς η επαφή  $p - n$  λειτουργεί σα δίοδος;

11. \* Πώς λειτουργεί το φωτοβολταϊκό κύτταρο; <sup>2</sup>

## 6.4 Βιβλιογραφία

Χρήσιμες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στις παρακάτω διευθύνσεις του διαδικτύου

1. [www.eere.energy.gov/pv](http://www.eere.energy.gov/pv)
2. [acre.murdoch.edu.au/refiles/pv](http://acre.murdoch.edu.au/refiles/pv)
3. [www.solareco.com/articles/articles.cfm?ct=1000](http://www.solareco.com/articles/articles.cfm?ct=1000)
4. [www.solarserver.de/wissen/photovoltaik-e.html](http://www.solarserver.de/wissen/photovoltaik-e.html)
5. [cnx.rice.edu/content/m11343/latest](http://cnx.rice.edu/content/m11343/latest)

---

<sup>2</sup>Οι ερωτήσεις με αστεράκι είναι προαιρετικές

## Κεφάλαιο 7

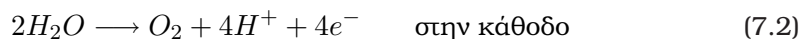
# Ηλεκτρόλυση του νερού

### 7.1 Εισαγωγή

Ηλεκτρόλυση είναι η διαδικασία κατά την οποία πραγματοποιείται μια αντίδραση διάσπασης μιας χημικής ένωσης στα στοιχεία τα οποία την αποτελούν, κατά τη διέλευση ηλεκτρικού ρεύματος μέσα από ένα διάλυμα αυτής της ένωσης.

Η ηλεκτρόλυση πραγματοποιείται μέσα σε μια συσκευή *Hoffman* (ή ευδιόμετρο) η οποία αποτελείται από δυο ογκομετρικούς συγκοινωνούντες σωλήνες στους οποίους τοποθετείται το διάλυμα της ένωσης που πρόκειται να διασπαστεί. Κατά την ηλεκτρόλυση διαχωρίζονται σ' αυτούς τους σωλήνες τα στοιχεία που προκύπτουν από τη διάσπαση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διάσπαση επιτυγχάνεται μέσω μιας διαφοράς δυναμικού που εφαρμόζεται στα άκρα των ηλεκτροδίων που βρίσκονται μέσα σ' αυτούς τους σωλήνες από μια εξωτερική πηγή συνεχούς ηλεκτρικής τάσης. Υπό την επίδραση της τάσης αυτής, τα ιόντα που αποτελούν τη χημική ένωση αναγκάζονται να διαχωριστούν μεταξύ τους και όταν φτάσουν στα ηλεκτρόδια προσλαμβάνουν (ή απορρίπτουν) ηλεκτρόνια και γίνονται ηλεκτρικά ουδέτερα. Αν τα ουδέτερα αυτά μόρια είναι αέρια, εγκλωβίζονται στους ογκομετρικούς σωλήνες και έτσι επιτυγχάνεται ο διαχωρισμός τους.

Στην περίπτωση της ηλεκτρόλυσης του νερού λαμβάνουν χώρα οι εξής αντιδράσεις



(Κάθοδος είναι το ηλεκτρόδιο που συνδέεται στο θετικό πόλο της πηγής και άνοδος αυτό που συνδέεται στον αρνητικό πόλο.)

Συνολικά η αντίδραση μπορεί να γραφεί  $6H_2O \longrightarrow 4OH^- + 4H^+ + 2H_2 + O_2$  ή πιο απλά  $2H_2O \longrightarrow 2H_2 + O_2$

Στην ηλεκτρόλυση οι φορείς του ηλεκτρικού ρεύματος δεν είναι τα ηλεκτρόνια, όπως είναι στα καλώδια, αλλά τα ίδια τα ιόντα των ενώσεων που διασπώνται. Τα θετικά ιόντα έλκονται από την άνοδο από την οποία προσλαμβάνουν όσα ηλεκτρόνια τους χρειάζονται για να γίνουν ουδέτερα, ενώ τα αρνητικά ιόντα έλκονται από την κάθοδο στην οποία εναποθέτουν την περίσσεια ηλεκτρονίων που κατέχουν και γίνονται επίσης ουδέτερα.

## 7.2 Πειραματικό μέρος

Το πείραμα που πρόκειται να εκτελέσουμε αναφέρεται στην ηλεκτρόλυση του νερού. Όπως είπαμε η ηλεκτρόλυση γίνεται μέσα στο ευδιόμετρο, στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται μια ηλεκτρική τάση, η οποία (στην περίπτωση μας) παράγεται από το ηλιακό κύτταρο. Το ευδιόμετρο που θα χρησιμοποιήσουμε διαθέτει ογκομετρική κλίμακα και από τις δύο πλευρές του. Μας δίνει έτσι τη δυνατότητα να μετρήσουμε διαφορές όγκου που θα προκύψουν όταν το νερό θα μετατραπεί σε οξυγόνο και υδρογόνο.

Γεμίζουμε το ευδιόμετρο με απεσταγμένο νερό και από τις δύο πλευρές του, μέχρι του σημείου που η ογκομετρική κλίμακα δείχνει μηδέν. Σ' αυτή την ένδειξη το ευδιόμετρο περιέχει ίσους όγκους νερού και από τη μία πλευρά του και από την άλλη. Συνδέουμε τα άκρα του ευδιομέτρου με το ηλιακό κύτταρο και ενδιάμεσα έχουμε παρεμβάλλει ένα αμπερόμετρο για τη μέτρηση της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα κατά τη διάρκεια του πειράματος. Μπροστά στο ηλιακό κύτταρο και σε απόσταση 10cm περίπου τοποθετούμε λαμπτήρα 100 – 150Watt ο οποίος φωτίζει το ηλιακό κύτταρο για να μετατρέψει τη φωτεινή ενέργεια σε ηλεκτρική.

Τη χρονική στιγμή  $t = 0$  κλείνουμε το κύκλωμα και η ηλεκτρόλυση ξεκινάει. Το νερό αρχίζει να μετατρέπεται σε οξυγόνο και υδρογόνο. Με το χρονόμετρο που μας δίνεται μετράμε το χρόνο και σημειώνουμε τις ενδείξεις του κάθε φορά που παράγεται ένα επιπλέον ml υδρογόνου. Την ίδια στιγμή σημειώνουμε πόσα ml οξυγόνου παράγονται στην άλλη πλευρά του ευδιομέτρου. Προσέχουμε να μη μετακινούνται η λάμπα και το ηλιακό κύτταρο, ώστε να μη μεταβάλλεται η ένδειξη του αμπερομέτρου κατά τη διάρκεια του πειράματος. Όταν δημιουργηθούν 10ml υδρογόνου, σταματάμε το πείραμα και μετράμε το χρόνο που χρειάστηκε για τη δημιουργία 10ml υδρογόνου.

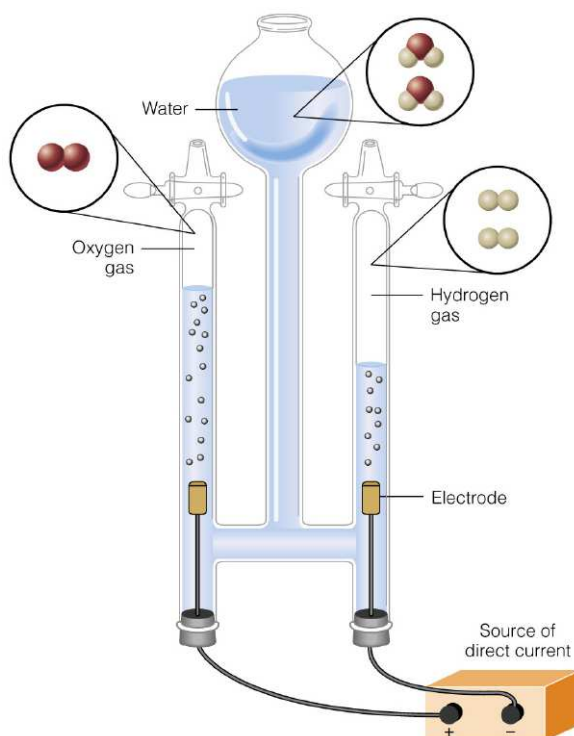
Στη συνέχεια αδειάζουμε το υδρογόνο και το οξυγόνο από το ευδιόμετρο και μετράμε τη μεταβολή του όγκου του νερού που μετατράπηκε σε υδρογόνο και οξυγόνο.

Στη συνέχεια εκτελούμε ακριβώς το ίδιο πείραμα απομακρύνοντας όμως αυτή τη φορά τη λάμπα από το ηλιακό κύτταρο έτσι ώστε η ένδειξη του αμπερομέτρου να πέσει στο μισό και κάνουμε τις ίδιες μετρήσεις.

## 7.3 Επεξεργασία των πειραματικών δεδομένων

1. Για τις δύο σειρές μετρήσεων που πήρατε με διαφορετική ένταση ρεύματος, παραστήστε σε μιλιμετρέ χαρτί (ή με κάποιο πρόγραμμα γραφικών στον ηλεκτρονικό υπολογιστή) τον όγκο του υδρογόνου και του οξυγόνου που δημιουργούνται κατά την ηλεκτρόλυση ως συνάρτηση του χρόνου. Όπως θα δείτε τα σημεία αυτά προσεγγίζουν πολύ καλά μια ευθεία. Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων προσδιορίστε τις τέσσερις αυτές ευθείες.

2. Συγκρίνοντας τους όγκους υδρογόνου και οξυγόνου που παράγονται κατά την ηλεκτρόλυση από τις δύο σειρές μετρήσεων, δείξτε ότι σε κάθε χρονική στιγμή ο όγκος του παραγόμενου υδρογόνου είναι διπλάσιος από τον όγκο του οξυγόνου. (Για να το κάνετε αυτό βρείτε για κάθε μέτρηση το λόγο του όγκου υδρογόνου προς τον όγκο οξυγόνου και δείξτε ότι η μέση τιμή του είναι 2).



**Σχήμα 7.1:** Η συσκευή *Hoffman* (ή ευδιόμετρο) για την ηλεκτρόλυση του  $H_2O$

### 3. Από τη γνωστή σχέση

$$\text{Ρυθμός μεταβολής } V = \frac{\delta V}{\delta t} = \frac{V(t + \delta t) - V(t)}{\delta t} \quad (7.3)$$

βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του παραγόμενου υδρογόνου και οξυγόνου από τις δύο σειρές μετρήσεων. Δείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου των παραγόμενων ποσοτήτων είναι ανάλογος του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα. Συγκρίνετε τους ρυθμούς μεταβολής του όγκου με τις κλίσεις των αντίστοιχων ευθειών που βρήκατε στο (1).

4. Έχοντας υπ' όψη ότι η πυκνότητα του νερού είναι  $\rho = 1 \text{ gr/cm}^3$ , και ότι τα ατομικά βάρη υδρογόνου και οξυγόνου είναι αντίστοιχα 1 και 16, χρησιμοποιήστε τη μέτρηση που βρήκατε για τον όγκο του υγρού νερού που μετατρέπεται σε 10ml υδρογόνου και 5ml οξυγόνου για να βρείτε πόσος είναι ο όγκος ενός *mole* αερίου υπό κανονικές συνθήκες. (Θεωρήστε ότι οι συνθήκες του πειράματος είναι κανονικές). Συμφωνεί το αποτέλεσμα σας με τα 22,4lit που όλοι γνωρίζουμε από τη βιβλιογραφία;

5. Κατά την ηλεκτρόλυση του νερού κάθε ιόν οξυγόνου αφήνει στην άνοδο 2 ηλεκτρόνια για να γίνει ουδέτερο και επομένως κάθε μόριο οξυγόνου αφήνει τέσσερα ηλεκτρόνια. Αυτό περιγράφεται συμβολικά στις χημικές εξισώσεις που είδαμε νωρίτερα. Στις ίδιες εξισώσεις είδαμε ότι κάθε ιόν υδρογόνου, προσλαμβάνει ένα ηλεκτρόνια για να γίνει ουδέτερο και επομένως κάθε μόριο υδρογόνου προσλαμβάνει 2 ηλεκτρόνια. Έτσι για κάθε 4 ηλεκτρόνια που ρέουν μέσα στο καλώδιο, δημιουργούνται ένα μόριο οξυγόνου και δύο μόρια υδρογόνου.

Εφ' όσον το ρεύμα είναι σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος, το φορτίο που θα περάσει μέσα από το καλώδιο θα είναι ίσο με  $Q = It$ , όπου  $I$  το ρεύμα που μετράμε στο αμπερόμετρο, το οποίο διαρρέει το κύκλωμα και  $t$  ο συνολικός χρόνος για τη δημιουργία συγκεκριμένης ποσότητας υδρογόνου (ή οξυγόνου). Στην περίπτωση μας ο χρόνος  $t$  θα είναι ο χρόνος για τη δημιουργία  $10ml$  υδρογόνου. Δεδομένου ότι ένα ηλεκτρόνιο έχει φορτίο  $1.6 \times 10^{-19}Cb$ , μπορούμε να βρούμε πόσα ηλεκτρόνια πέρασαν από το καλώδιο στο χρόνο  $t$  και κατά συνέπεια πόσα ιόντα υδρογόνου ή οξυγόνου μεταφέρθηκαν στα ηλεκτρόδια του ευδιομέτρου για να μετατραπούν σε μόρια υδρογόνου και οξυγόνου αντίστοιχα. Μπορούμε λοιπόν κατά συνέπεια να γνωρίζουμε πόσα μόρια υδρογόνου δημιουργήθηκαν στο χρόνο  $t$ , όταν ξέρουμε πόσα ηλεκτρόνια πέρασαν από το κύκλωμα μέσα σ' αυτό το χρόνο.

Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι  $1mole$  αερίου καταλαμβάνει  $22.4lit$  υπό κανονικές συνθήκες, υπολογίστε τον αριθμό *Avogadro*, (δηλαδή πόσα μόρια αερίου υπάρχουν σε όγκο  $22.4lit$ ), όταν γνωρίζετε πόσα μόρια υδρογόνου υπάρχουν στα  $10ml$ . Συγκρίνεται την τιμή που θα βρείτε με τη γνωστή από τη βιβλιογραφία τιμή του αριθμού του *Avogadro* που είναι  $N_A = 6,023 \times 10^{23}$ .

6. Όπως είπαμε, κατά την ηλεκτρόλυση του νερού, το υδρογόνο παράγεται στην άνοδο και το οξυγόνο στην κάθοδο. Αν δε γνωρίζατε πού βρίσκεται η κάθοδος και πού η άνοδος της συσκευής *Hoffman* θα μπορούσατε να αναγνωρίσετε πού παράγεται υδρογόνο και πού οξυγόνο;

## 7.4 Βιβλιογραφία

Χρήσιμες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στις παρακάτω διευθύνσεις του διαδικτύου

1. [www.cheminst.ca/ncw/experiments/eelectrowater.html](http://www.cheminst.ca/ncw/experiments/eelectrowater.html)
2. [www.nmsea.org/Curriculum/7\\_12/electrolysis/electrolysis.htm](http://www.nmsea.org/Curriculum/7_12/electrolysis/electrolysis.htm)
3. [www.miniscience.com/projects/WaterElectrolise.htm](http://www.miniscience.com/projects/WaterElectrolise.htm)
4. [www.haverford.edu/educ/knight-booklet/electrolysis.htm](http://www.haverford.edu/educ/knight-booklet/electrolysis.htm)
5. [dwb.unl.edu/Chemistry/MicroScale/MScale28.html](http://dwb.unl.edu/Chemistry/MicroScale/MScale28.html)
6. [www.people.virginia.edu/~kei4b/TechnologyandTeaching/electrolysis\\_of\\_water.htm](http://www.people.virginia.edu/~kei4b/TechnologyandTeaching/electrolysis_of_water.htm) με χρήσιμες παραπομπές (*links*)



## Κεφάλαιο 8

# Μπαταρία Υδρογόνου

### 8.1 Εισαγωγή

#### 8.1.1 Μπαταρίες

Η ηλεκτρόλυση είναι μια διαδικασία κατά την οποία χρησιμοποιείται η ηλεκτρική ενέργεια για να προκαλέσει χημική αντίδραση. Οι μπαταρίες χρησιμοποιούν τη χημική αντίδραση για να παραχθεί η ηλεκτρική ενέργεια ως ροή ηλεκτρονίων - ηλεκτρικό ρεύμα - σε ένα εξωτερικό κύκλωμα. Κατά τη διαδικασία αυτή καταναλώνονται τα υλικά που απαρτίζουν την μπαταρία και ενέργεια αποθηκεύεται στην μπαταρία με τη μορφή χημικής ενέργειας.

Όλες οι μπαταρίες που χρησιμοποιούνται πρέπει να είναι επαναφορτιζόμενες, δηλ. οι χημικές αλλαγές κατά τη διάρκεια της αποφόρτισης πρέπει να είναι αντιστρεπτές. Οι μπαταρίες πρέπει επίσης, όσο το δυνατόν περισσότερο, να είναι ελαφριές, να καταλαμβάνουν σχετικά μικρό όγκο και να μπορούν να επαναφορτιστούν γρήγορα. Η εντατική έρευνα σε αυτό το πεδίο έρευνας έχει οδηγήσει σε σημαντική βελτίωση της τεχνολογίας των μπαταριών, αλλά η πλήρωση και των τριών αυτών κριτηρίων τοποθετείται μακροπρόθεσμα.

#### 8.1.2 Κύτταρα καυσίμων (fuel cells)

Η αποδοτικότητα των κυττάρων καυσίμων είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή των μηχανών εσωτερικής καύσης (ICE), και δεν υπόκεινται στον περιορισμό του Carnot. (Ο Carnot έχει αποδείξει πως καμιά μηχανή δεν μπορεί να μετατρέψει σε ποσοστό 100% τη θερμότητα σε μηχανικό έργο. Δηλαδή υπάρχει απώλεια ενέργειας στη μηχανή).

Τα κύτταρα καυσίμων δεν έχουν συνήθως κανένα μηχανικά κινούμενο μέρος, με αποτέλεσμα να λειτουργούν χωρίς παραγωγή ήχου και να χρειάζονται λίγη συντήρηση. Ακόμα, καταναλώνουν τα καύσιμα σε ένα ποσοστό αυστηρά ανάλογο προς το φορτίο. Εάν το καύσιμο είναι υδρογόνο, κανένας ρύπος δεν διαμορφώνεται και το μόνο προϊόν είναι το νερό. Εάν τα καύσιμα περιέχουν άνθρακα, αναλογικά λιγότερο ποσοστό  $CO_2$  θα απελευθερωθεί στην ατμόσφαιρα, λόγω της υψηλότερης αποδοτικότητας των κυττάρων καυσίμων.

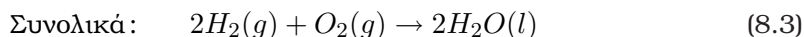
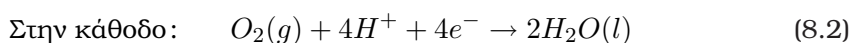
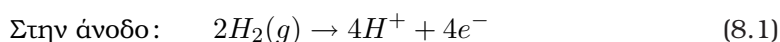
## 8.2 Πώς δουλεύει ένα κύτταρο καυσίμων

Το κύτταρο καυσίμων υδρογόνου είναι σε γενικές γραμμές το απλούστερο από αυτά που υπάρχουν και περιγράφεται ως εξής.

Το βασικό κύτταρο (σχ.1) αποτελείται από δύο πορώδη ηλεκτρόδια άνθρακα που συνδέονται με μια μεμβράνη ηλεκτρολυτικών πολυμερών. Έξω από τα ηλεκτρόδια υπάρχουν υποδοχείς ροής αερίων. Αυτοί περιέχουν κανάλια για να εξασφαλιστεί ότι τα αέρια είναι σε επαφή με ολόκληρη την επιφάνεια των ηλεκτροδίων. Χρησιμοποιούν επίσης να αφαιρέσουν το νερό που παράγεται κατά τη διαδικασία.

Η οξείδωση (απώλεια ηλεκτρονίων) εμφανίζεται στην άνοδο και η αναγωγή (λήψη ηλεκτρονίων) στην κάθοδο. Τα καύσιμα - σε αυτήν την περίπτωση, το υδρογόνο - οξειδώνεται στην άνοδο και απελευθερώνει ηλεκτρόνια. Αυτά τα ηλεκτρόνια μπορούν να ρεύσουν από την άνοδο (που επομένως γίνεται το αρνητικό τερματικό του κυττάρου) γύρω από το εξωτερικό κύκλωμα στην κάθοδο (που επομένως είναι το θετικό τερματικό). Ιόντα υδρογόνου ρέουν μέσω της μεμβράνης πολυμερών ηλεκτρολυτών στην κάθοδο για να ισορροπηθεί το φορτίο.

Ένα κύτταρο καυσίμων μπορεί επομένως να παρέχει ένα ρεύμα με τον ίδιο τρόπο όπως ένα κύτταρο αποθήκευσης (μπαταρία). Εντούτοις, σε αντίθεση με μια μπαταρία, το κύτταρο καυσίμων δεν χρειάζεται καμία επαναφόρτιση και τα ηλεκτρόδιά του είναι αμετάβλητα. Οι αντιδράσεις που εμφανίζονται στο κύτταρο είναι:



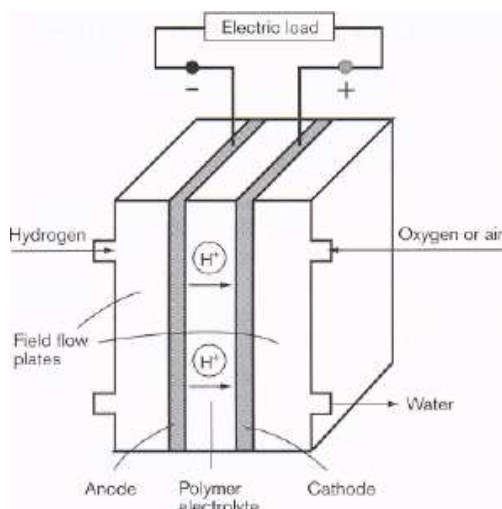
Το κύτταρο καυσίμων υδρογόνου έχει μια μέγιστη θεωρητική τάση  $1.23V$  (που είναι επίσης η ελάχιστη τάση που απαιτείται για την αποσύνθεση του ύδατος από την ηλεκτρόλυση). Στην πράξη, λόγω των απωλειών που προκαλούνται από την όχι πλήρη αντίδραση που συμβαίνει στο κύτταρο καυσίμων, την εσωτερική αντίσταση και την ανεπαρκή διάχυση των αερίων, η αποκτηθείσα τάση είναι  $0.6 - 0.9V$  συνεχούς ρεύματος ( $DC$ ). Μεγαλύτερες τάσεις μπορούν να ληφθούν με τη σύνδεση των κυττάρων σε σειρά. Τα κύτταρα που συνδέονται παράλληλα παρέχουν μεγαλύτερα ρεύματα. Το μέγιστο ρεύμα που μπορεί να παραχθεί από ένα κύτταρο καυσίμων είναι ανάλογο προς την περιοχική επιφάνεια των ηλεκτροδίων του. Προς το παρόν η μέγιστη αποκτήσιμη πυκνότητα ρεύματος (ρεύμα ανά μονάδα επιφάνειας) είναι περίπου  $2Acm^{-2}$ .

Η αντίδραση στα ηλεκτρόδια θα ήταν πάρα πολύ αργή χωρίς την χρήση κάποιου καταλύτη, ο οποίος για τα κύτταρα καυσίμων υδρογόνου είναι συνήθως ο λευκόχρυσος.

Επειδή τα κύτταρα καυσίμων μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους με διάφορους τρόπους όπως ήδη αναφέραμε, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για όλα τα είδη εφαρμογών, από τις φορητές μπαταρίες στους μεγάλους σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικού ρεύματος.

## 8.3 Πρωτονιοανταλλακτικές μεμβράνες ( $PEM$ s)

Το κύτταρο καυσίμων πρωτονιοανταλλακτικής μεμβράνης ή το κύτταρο καυσίμων ηλεκτρολυτικής μεμβράνης πολυμερών ( $PEMFC$ ) είναι πιθανώς το πιο ευπροσάρμοστο



**Σχήμα 8.1:** Διάταξη ενός τυπικού κυττάρου καυσίμων Υδρογόνου

καθώς επίσης και το απλούστερο στο σχέδιο. Στο εσωτερικό του βρίσκεται η μεμβράνη ηλεκτροδίου. Τα ηλεκτρόδια άνθρακα είναι πορώδη, και είναι εμπλουτισμένα με πολύ λεπτά τμήματα λευκοχρύσου ο οποίος λειτουργεί ως καταλύτης και είναι παράλληλα χημικά αδρανής. Δεδομένου ότι ο λευκόχρυσος είναι ένας σημαντικός παράγοντας στο κόστος των κυττάρων, πρόσφατη έρευνα έχει αφιερωθεί στη μείωση του μεγέθους των μορίων, αυξάνοντας έτσι την περιοχή επιφάνειας ανά μονάδα μάζας του λευκόχρυσου, και στην ομοιόμορφη διάδοση των μορίων στο χώρο.

Ο ηλεκτρολύτης είναι μια μεμβράνη που αποτελείται από ένα στερεό πολυμερές το οποίο άγει πρωτόνια.

Η μεμβράνη για να δώσει τη μέγιστη αγωγιμότητα πρέπει να ενυδατωθεί πλήρως κατά τη διάρκεια της λειτουργίας. Αυτό σημαίνει ότι τα *PEMFCs* πρέπει να λειτουργούν σε θερμοκρασίες κάτω από  $100^{\circ}\text{C}$ .

Τα ηλεκτρόδια άνθρακα είναι συνδεδεμένα με την μεμβράνη του πολυμερούς, έτσι ώστε η μεμβράνη να επεκτείνεται μερικώς στα πορώδη ηλεκτρόδια. Μια διεπαφή του τύπου αέριο/καταλύτης/ηλεκτρολύτης διαμορφώνεται, έτσι ώστε ο καταλύτης να βρίσκεται σε ταυτόχρονη επαφή με το υδρογόνο ή το οξυγόνο, τον αγωγό πρωτονίων (ο οποίος είναι η ηλεκτρολυτική μεμβράνη), και τον αγωγό των ηλεκτρονίων (το οποίο είναι το ηλεκτρόδιο άνθρακα). Οι ηλεκτροχημικές αντιδράσεις πραγματοποιούνται σε αυτά τα σημεία της διεπαφής (σχήμα 2). Ολόκληρη η μεμβράνη ηλεκτροδίων έχει πάχος λιγότερο από  $1\text{mm}$ .

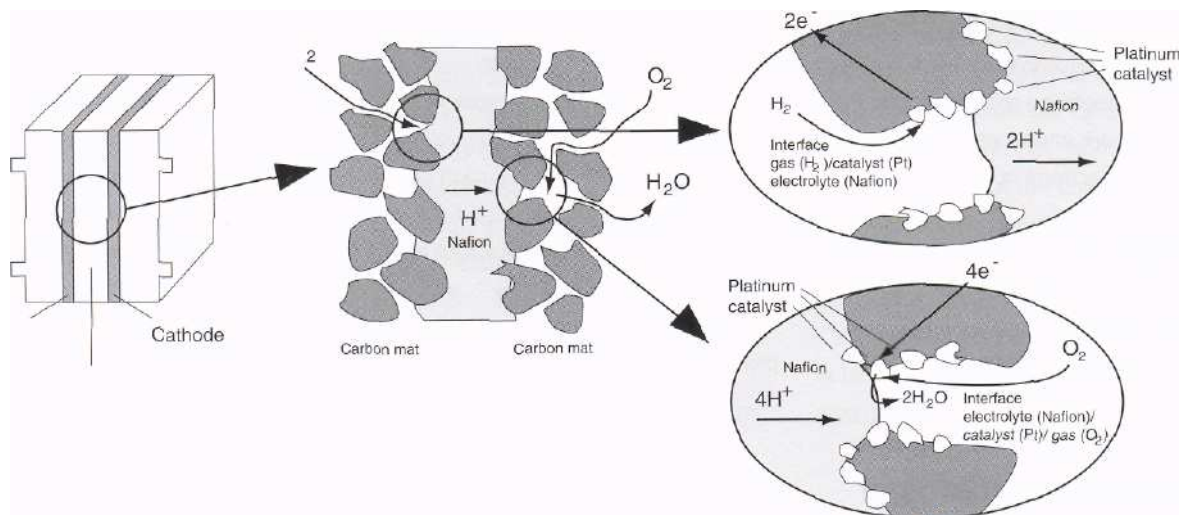
## 8.4 Πειραματικό Μέρος

Η διαδικασία που συμβαίνει στο κύτταρο καυσίμου υδρογόνου, είναι η ακριβώς αντίθετη της ηλεκτρόλυσης του νερού.

Σε ένα κύτταρο καυσίμου η χαρακτηριστική καμπύλη δείχνει πώς το ρεύμα που παράγεται από το κύτταρο, εξαρτάται από την τάση.

Σκοπός του συγκεκριμένου πειράματος είναι χρησιμοποιώντας τα αέρια οξυγόνο

και υδρογόνο που παράγονται από την ηλεκτρόλυση του νερού, να τα αποθηκεύσουμε σε ένα κύτταρο και να εξετάσουμε την παραγωγή ρεύματος και την εξάρτησή του τελευταίου από την τάση.



**Σχήμα 8.2:** Διατομή μιας διάταξης μεμβρανικών ηλεκτροδίων, (πολυμερικός ηλεκτρολύτης) στην οποία απεικονίζονται οι διαδικασίες που πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια των αντιδράσεων στα κύτταρα καυσίμων.

Στην πειραματική διαδικασία ακολουθείτε τα ίδια βήματα που πραγματοποιήθηκαν για την ηλεκτρόλυση του νερού στο ευδιόμετρο, έχοντας επιπλέον συνδέσει με σωλήνες για τη μεταβίβαση αερίων, το ευδιόμετρο με την μπαταρία όπου θα αποθηκευθεί το υδρογόνο. Ακόμα για την παρακολούθηση του παραγόμενου ρεύματος συνδέστε με ακροδέκτες την μπαταρία με το αμπερόμετρο. Κλείνοντας το κύκλωμα (η αντίσταση να βρίσκεται στη θέση "open") και ανάβοντας την φωτεινή πηγή (λάμπα) θα ξεκινήσει η διαδικασία της ηλεκτρόλυσης και μεταφοράς των αερίων οξυγόνου και υδρογόνου στην μπαταρία. Για να απομακρυνθεί ο αέρας που βρίσκεται στη διάταξη, αφήστε τη διαδικασία να εξελισσεται για 3 λεπτά με τα κάτω άκρα της μπαταρίας ανοικτά ώστε να απελευθερώνονται τα αέρια στο περιβάλλον. Έπειτα κλείστε με πώματα τα άκρα και αφήστε τα παραγόμενα αέρια να αποθηκεύονται στην μπαταρία μέχρι να δημιουργηθούν 10ml αερίου υδρογόνου. Αποσυνδέστε από τη συσκευή το ηλιακό κύτταρο ώστε να σταματήσει η διαδικασία και με τους ακροδέκτες συνδέστε την μπαταρία με το βολτόμετρο. Καταγράψτε το ρεύμα και την τάση της μπαταρίας αλλάζοντας την αντίσταση με τον διακόπτη, από τη θέση "open" μέχρι και τη θέση "lamp" και "motor".

Πραγματοποιήστε το ίδιο πείραμα αποσυνδέοντας το σωληνάριο που αντιστοιχεί στο οξυγόνο από την μπαταρία. Με αυτό τον τρόπο θα χρησιμοποιήσετε το οξυγόνο που βρίσκεται στον αέρα.

## 8.5 Ανάλυση αποτελεσμάτων - ερωτήσεις

1. Σχεδιάστε την χαρακτηριστική καμπύλη του κυττάρου ( $V - I$ ) (άξονας  $x : I$ , άξονας  $y : V$ ) και για τα δυο πειράματα και βρείτε τη μέγιστη αποκτηθείσα τάση

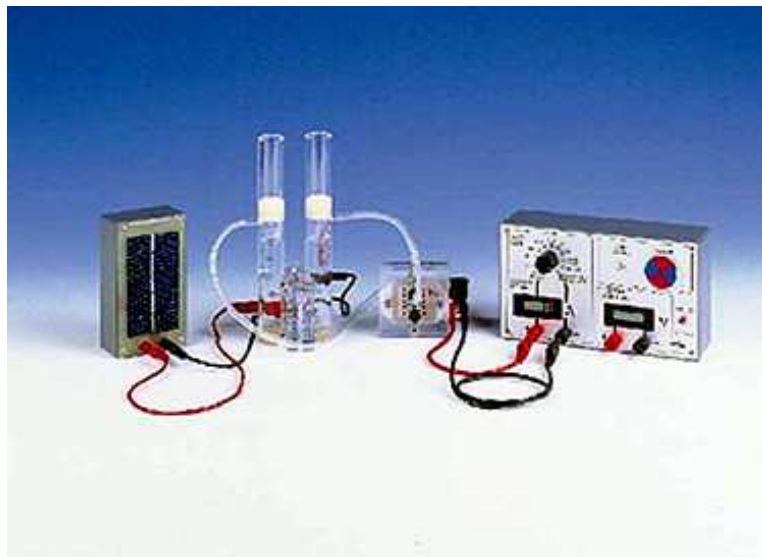
που δίνει το κύτταρο. Τοποθετήστε στην καμπύλη και τις τιμές για τα "lamp" και "motor". Σχολιάστε τις δυο γραφικές παραστάσεις και εξηγήστε τις διαφορές τους (αν υπάρχουν).

2. Σχεδιάστε την καμπύλη ισχύος του κυττάρου ( $P - I$ ) (άξονας  $x : I$ , άξονας  $y: P$  (σε  $mW$ ) και για τα δυο πειράματα. Τοποθετήστε στην καμπύλη και τις τιμές για τα "lamp" και "motor". Σχολιάστε τις δυο γραφικές παραστάσεις.
3. Η θεωρητική μέγιστη τάση του κυττάρου καυσίμου υδρογόνου είναι  $1.23V$ . Διαφέρει με αυτήν που βρήκατε και αν ναι που οφείλεται αυτή η διαφορά.
4. Προτείνετε μερικούς τρόπους (τροποποιήσεις των κυττάρων) με τους οποίους μπορούμε να παράγουμε ακόμα μεγαλύτερα ρεύματα από κύτταρα καυσίμου υδρογόνου.

### Βιβλιογραφία

Χρήσιμες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στις παρακάτω διευθύνσεις:

1. [www.heliocentris.com](http://www.heliocentris.com)
2. [www.clean-air.org](http://www.clean-air.org)
3. [www.fuelcells.org](http://www.fuelcells.org)
4. [education.lanl.gov/resources/h2](http://education.lanl.gov/resources/h2)
5. [physics4u.gr/energy/fuelcells.html](http://physics4u.gr/energy/fuelcells.html)



**Σχήμα 8.3:** Απεικόνιση πειραματικής διάταξης αποτελούμενης από ηλιακό κύτταρο, ευδιόμετρο, κύτταρο αποθήκευσης καυσίμων-μπαταρία υδρογόνου, αμπερόμετρο-βολτόμετρο



## Κεφάλαιο 9

# Μέτρηση Ραδιενέργειας

### 9.1 Εισαγωγή

Η ιστορία της ραδιενέργειας αρχίζει το 1896, όταν ο Henry Becquerel, προς μεγάλη του έκπληξη, ανακάλυψε ότι ένα άλας του Ουρανίου εξέπεμπε ένα καινούριο είδος ακτινοβολίας, που ήταν τόσο ισχυρή ώστε να μπορεί να μαυρίζει μια φωτογραφική πλάκα μέσα στο αδιαφανές της περιτύλιγμα. Το 1897 ο Rutherford, στις αρχικές του μελέτες για τη ραδιενέργεια του Ουρανίου, βρήκε ότι η ακτινοβολία είναι τουλάχιστον δύο ειδών. Στο ένα είδος ακτινοβολίας που είχε τη μεγαλύτερη δύναμη ιονισμού και τη μικρότερη εμβέλεια, έδωσε το όνομα **ακτίνες α**. Στο άλλο είδος, που είχε μικρότερη δύναμη ιονισμού και μεγαλύτερη εμβέλεια, έδωσε το όνομα **ακτίνες β**. Οι **ακτίνες γ** αναγνωρίστηκαν ως ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία αρκετά χρόνια αργότερα.

Το πρόβλημα ποιά ήταν η πηγή της νέας αυτής ακτινοβολίας, αντιμετώπισαν με-ταξύ άλλων, οι Piere και Marie Curie οι οποίοι έδωσαν στο φαινόμενο αυτό το όνομα **ραδιενέργεια**. Η ραδιενέργεια επομένως δεν είναι ενέργεια, όπως πολλοί φαντάζονται, συγχέοντας το δεύτερο συνθετικό της λέξης με την ενέργεια. Στην πραγματικότητα ο όρος ραδιενέργεια προέρχεται από τη μετάφραση της λέξης radioactivity, δηλαδή η 'ενέργεια' (με την έννοια της δραστηκότητας) του Ραδίου. Ραδιενέργεια επομένως είναι η εκπομπή των ακτινοβολιών α,β και γ.

Σήμερα γνωρίζουμε πολύ καλά ότι οι ακτινοβολίες αυτές δεν είναι τίποτα άλλο πα-ρά ακτινοβολίες που προέρχονται από μεταπτώσεις μεταξύ των ενεργειακών σταθμών του πυρήνα, όπως ακριβώς έχουμε δει ότι συμβαίνει με τις μεταπτώσεις των ηλεκτρο-νίων στις ενεργειακές στάθμες του ατόμου. Η διαφορά είναι ότι στις μεταπτώσεις του πυρήνα εμφανίζεται μεγαλύτερη ποικιλία μηχανισμών απ' ότι στις μεταπτώσεις των ηλεκτρονίων, όπου μοναδικός μηχανισμός μετάπτωσης, (όπως έχουμε ήδη δει στα πειράματα της φασματοσκοπίας), είναι η εκπομπή φωτονίου κατά την αποδιέγερση ενός ατόμου από μια στάθμη μεγαλύτερης ενέργειας, σε μια στάθμη μικρότερης. Μια επίσης σημαντική διαφορά είναι ότι οι ενέργειες που εκλύονται κατά τις ατομικές με-ταπτώσεις είναι της τάξεως μερικών  $eV$  σε αντίθεση με τις πυρηνικές μεταπτώσεις που η εκλυόμενη ενέργεια είναι της τάξεως μερικών  $MeV$ .

Έτσι η **ακτινοβολία α** είναι η εκπομπή από των πυρήνα σωματίων α, που είναι πυρήνες Ηλίου  ${}^4_2He$  (δηλ. δύο πρωτόνια και δύο νετρόνια συνδεδεμένα). Στην ακτι-νοβολία α, ο πυρήνας εκπέμπει ένα μέρος του εαυτού του με αποτέλεσμα, το στοιχείο που αντιστοιχεί σ' αυτό τον πυρήνα, να μεταστοιχείωνεται στο στοιχείο που έχει δύο



λιγότερα νετρόνια και δύο λιγότερα πρωτόνια από το αρχικό.

Η **ακτινοβολία β** είναι η εκπομπή ηλεκτρονίου-αντινετρίνου (ή ποζιτρονίου-νετρίνου) από τον πυρήνα με αποτέλεσμα ο πυρήνας να αυξάνει (ή να ελατώνει) το φορτίο του κατά μια μονάδα και το στοιχείο που αντιστοιχεί σ' αυτόν να μεταστοιχείωνεται στο στοιχείο με ένα επιπλέον (ή ένα λιγότερο) πρωτόνιο και ένα λιγότερο (ή ένα επιπλέον) νετρόνιο.

Η **ακτινοβολία γ** έχει τον ίδιο μηχανισμό με την εκπομπή φωτονίου κατά τις μεταπτώσεις ηλεκτρονίων των ατόμων, όπως τον έχουμε δει στα πειράματα φασματοσκοπίας. Είναι και αυτή φωτόνια αλλά πολύ μεγαλύτερης ενέργειας απ' αυτής των φωτονίων των ηλεκτρονιακών μεταπτώσεων.

Εκτός από τους μηχανισμούς μεταπτώσεων από τις οποίες προκύπτουν οι ακτινοβολίες α,β και γ, υπάρχουν τρεις ακόμα μηχανισμοί μεταπτώσεων και όλοι μαζί οι έξι μηχανισμοί συνθέτουν αυτό που σήμερα ονομάζουμε ραδιενέργεια. Οι μηχανισμοί αυτοί είναι: (α) η **πυρηνική σχάση** κατά την οποία ο πυρήνας σπάει σε δύο περίπου ίσα κομμάτια και συμβαίνει μόνο στα πολύ βαριά στοιχεία, (β) η **εσωτερική μετατροπή** κατά την οποία ο πυρήνας μεταθιβάσει την επί πλέον ενέργεια του σε ένα ατομικό ηλεκτρόνιο και το εκτοξεύει απ' το άτομο και (γ) η **τροχιακή σύλληψη** κατά την οποία ο πυρήνας συλλαμβάνει και καταστρέφει ένα ηλεκτρόνιο με την ταυτόχρονη δημιουργία και εκπομπή ενός νετρίνου.

Ένας πληρέστερος λοιπόν ορισμός της ραδιενέργειας, που περιλαμβάνει και τους έξι αυτούς μηχανισμούς, είναι ο ακόλουθος. **Ραδιενέργεια είναι η εκπομπή ενέργειας από τον πυρήνα κατά τις πυρηνικές μεταπτώσεις.**

Η επίδραση της ραδιενέργειας στους ζωντανούς οργανισμούς είναι δυνατό να επιφέρει σ' αυτούς σημαντικές και ανεπανόρθωτες βλάβες. Σε μεγάλες δόσεις προκαλεί ζημιά στα βιολογικά μακρομόρια, συμπεριλαμβανομένου και του *DNA*, με αποτέλεσμα ακόμα και γενετικές μεταλλάξεις. Παρ' όλα αυτά οι ίδιες ιδιότητες που την καθιστούν επιβλαβή, την καθιστούν και χρήσιμη. Τα ραδιενεργά στοιχεία χρησιμοποιούνται σε ιατρικές εφαρμογές ως ιχνηθέτες για τη διαγνωστική (π.χ. το  $^{131}_{53}I$  στο θυροειδή, το  $^{53}_{16}S$  στο δέρμα, το  $^{59}_{26}Fe$  στο αίμα κ.τ.λ.) και για θεραπευτικούς σκοπούς (π.χ. ακτινοβολήση όγκων). Χρησιμοποιούνται επίσης σε τεχνικές αποστείρωσης. Η ακτινοβολήση τροφίμων για τη συντήρησή τους αποτελεί ένα άλλο τομέα εφαρμογής της ραδιενέργειας. Εφαρμόστηκε για πρώτη φορά το 1916 στη Σουηδία για τη συντήρηση φράουλων. Ο σκοπός ήταν να προλάβουν την αλοιώσή τους από μύκητες όπως ο *Botrytis cinerea*, ώστε να επεκτείνουν την περίοδο που θα μπορούσαν οι φράουλες να εκτεθούν στα μανάβικα. Σήμερα η μέθοδος της συντήρησης και αποστείρωσης τροφίμων με ακτινοβολήση κερδίζει συνεχώς έδαφος. Πάνω από 40 χώρες έχουν υιοθετήσει τη μέθοδο αυτή για πάνω από 60 διαφορετικά είδη τροφίμων, που εκτείνονται από τα σιτηρά και τα καρυκεύματα, μέχρι τα κρέατα και τα γαλακτοκομικά προϊόντα, όπως επίσης σε φρούτα και λαχανικά. Η ακτινοβολήση των τροφίμων με ραδιενεργές πηγές δεν μεταφέρει ραδιενεργά στοιχεία στα τρόφιμα, ούτε είναι ικανή να προκαλέσει μεταστοιχειώσεις των συστατικών τους και μ' αυτή την έννοια είναι τελείως αβλαβής για τον καταναλωτή αυτών των τροφών. Ιδιαίτερα στις υγρές τροφές όπως το γάλα, η ακτινοβολήση εμφανίζεται με το όνομα 'ψυχρή παστερίωση' αφού με την ακτινοβολήσή τους επιτυγχάνεται το ίδιο αποτέλεσμα με την παστερίωση, χωρίς να χρειαστεί να αυξηθεί η θερμοκρασία τους.

Μια άλλη εφαρμογή της ραδιενέργειας, η οποία βρίσκεται κάτω από έντονη κριτική, έχοντας τόσο φανατικούς υποστηρικτές όσο και φανατικούς επικριτές, είναι η



παραγωγή μεταλλαγμένων τροφών. Περιορίζοντας τη δόση της ραδιενέργειας σε ένα κατάλληλο εύρος είναι δυνατό να παραχθούν μεταλλαγμένα φυτά τα οποία διατηρούν τη βιωσιμότητά τους και εμφανίζουν βελτίωση σε ορισμένα χαρακτηριστικά σε σχέση με τα πατρικά φυτά.

Στο πείραμα που θα πραγματοποιηθεί θα μας δοθεί η δυνατότητα να υπολογίσουμε τον αριθμό των ραδιενεργών πυρήνων κάποιων ραδιενεργών δειγμάτων που θα μας δοθούν. Θα μπορέσουμε να μετρήσουμε το ρυθμό με τον οποίο πραγματοποιούνται οι διασπάσεις αυτές και τέλος θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε το πάχος των τοιχωμάτων συγκεκριμένων υλικών τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για **θωράκιση** (δηλ. για να μας προστατεύσουν από τη ραδιενέργεια).

## 9.2 Θεωρητικό μέρος

### 9.2.1 Ραδιενεργές διασπάσεις - Ενεργότητα - Χρόνος υποδιπλασιασμού - Μέσος χρόνος ζωής

Οι ραδιενεργές διασπάσεις, οι οποίες όπως είπαμε συνοδεύονται από εκπομπή ακτινοβολίας  $\alpha$ ,  $\beta$  ή  $\gamma$ , συμβαίνουν κατά τυχαίο τρόπο. Το φαινόμενο είναι καθαρά πιθανοκρατικό. Ο κάθε ραδιενεργός πυρήνας ενός ορισμένου είδους (στοιχείου) έχει μια καθορισμένη πιθανότητα διάσπασης ανά μονάδα χρόνου  $p = 1/\tau$ . Χρησιμοποιώντας αυτή την πληροφορία μπορεί κανείς να αποδείξει ότι αν τη χρονική στιγμή  $t = 0$  υπάρχουν  $N_0$  ραδιενεργά υλικά  $N_0$  αδιάσπαστοι πυρήνες, τότε σε χρόνο  $t$  θα έχουν μείνει στο υλικό αυτό  $N(t)$  αδιάσπαστοι πυρήνες που θα δίνονται από τη σχέση:

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} = N_0 e^{-\lambda t} \quad \text{όπου} \quad \lambda = 1/\tau \quad (9.1)$$

Είναι προφανές ότι όσο μεγαλύτερο είναι το  $\lambda$  τόσο περισσότερο ραδιενεργός είναι ο πυρήνας αυτού του στοιχείου.

Ορίζουμε ως χρόνο υποδιπλασιασμού (ή χρόνο ημιζωής) το χρόνο  $T$  που χρειάζεται για να διασπαστούν οι μισοί πυρήνες του δείγματος και η τιμή του είναι  $T = \tau \ln 2 = \ln 2/\lambda$  (να το αποδείξετε). Οι χρόνοι υποδιπλασιασμού κυμαίνονται μεταξύ των τιμών  $10^{-7} \text{ sec} - 10^{13} \text{ years}$ .

Στην πραγματικότητα εκείνο που μετράμε πειραματικά, δεν είναι ο αριθμός των πυρήνων που μένουν αδιάσπαστοι, αλλά ο αριθμός των πυρήνων που διασπώνται στη μονάδα του χρόνου. Μετράμε δηλαδή το ρυθμό της διάσπασης  $I = -\Delta N/\Delta t$ . Το ρυθμό αυτό τον ονομάζουμε ένταση  $I$  της διάσπασης ή ενεργότητα ή ραδιενέργεια. Με απλή παραγωγή της σχέσης (1) προκύπτει ότι (να το αποδείξετε)

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} = I_0 e^{-\lambda t}, \quad \text{όπου} \quad I_0 = N_0/\tau = N_0 \lambda \quad (9.2)$$

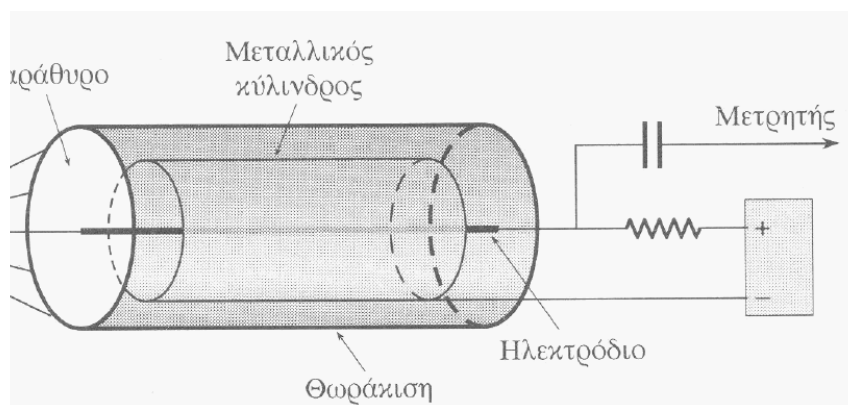
$I_0$  είναι ο ρυθμός διάσπασης των πυρήνων τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Η ποσότητα  $\tau$  μπορεί να δείξει κανείς ότι ισούται με το μέσο χρόνο ζωής του πυρήνα (δηλ. τη μέση τιμή του χρόνου που απαιτείται, ώστε ο πυρήνας αυτός να διασπαστεί). Γι αυτό ονομάζεται μέσος χρόνος ζωής. Επομένως ο χρόνος υποδιπλασιασμού (ημιζωής) ισούται με 0.693 φορές του μέσου χρόνου ζωής.

### Τυπικοί χρόνοι ημιζωής μερικών ραδιενεργών στοιχείων

Z	Ισότοπο				
81	$^{206}\text{Tl}$ 4.2min	$^{210}\text{Tl}$ 1.3min			
82	$^{206}\text{Pb}$ σταθερό	$^{210}\text{Pb}$ 22y	$^{212}\text{Pb}$ 26.8min		
83	$^{210}\text{Bi}$ 5days	$^{214}\text{Bi}$ 19.8min			
84	$^{210}\text{Po}$ 138days	$^{212}\text{Po}$ 0.3μsec	$^{214}\text{Po}$ 164sec	$^{216}\text{Po}$ 0.15sec	$^{218}\text{Po}$ 3min
85	$^{209}\text{At}$ 5.4h	$^{218}\text{At}$ 2sec			
86	$^{217}\text{Rn}$ 0.54msec	$^{222}\text{Rn}$ 3.82days			
88	$^{226}\text{Ra}$ 1600y				
90	$^{228}\text{Th}$ 1.9y	$^{230}\text{Th}$ $7.7 \times 10^4\text{y}$	$^{232}\text{Th}$ $1.4 \times 10^{10}\text{y}$		
91	$^{234}\text{Pa}$ 1.17min				
92	$^{234}\text{U}$ $2.4 \times 10^5\text{y}$	$^{235}\text{U}$ $1.4 \times 10^{10}\text{y}$	$^{238}\text{U}$ $4.5 \times 10^9\text{y}$		

Μονάδα της ενεργότητας στο *SI* είναι το *1Bq* (Becquerel) που ισούται με μία διάσπαση ανά δευτερόλεπτο. Είναι προφανές ότι όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του δείγματος τόσο μεγαλύτερη θα είναι η ενεργότητά του. Για το λόγο αυτό ορίζεται η ειδική ενεργότητα ως η ενεργότητα ανά μονάδα μάζας. Για την εκτίμηση της επίδρασης της ακτινοβολίας στη ζωντανή ύλη η γνώση της ενεργότητας είναι ανεπαρκής. Για το λόγο αυτό ορίζονται άλλα μεγέθη (όπως η δόση) και άλλες μονάδες (όπως το *Roentgen* ή το *rem*). Όμως για τις ανάγκες της παρούσας εργαστηριακής άσκησης δε θα χρειαστούμε αυτά τα μεγέθη και αυτές τις μονάδες και δε θα αναφερθούμε σ' αυτά περισσότερο.

### 9.2.2 Ο Ανιχνευτής Geiger-Müller



Σχήμα 9.1: Ανιχνευτής Geiger-Müller

Οι ραδιενεργές διασπάσεις μπορούν να ανιχνευθούν και να μετρηθούν με διάφορους τρόπους. Ένας απ' αυτούς εκμεταλεύεται την ιδιότητα των ραδιενεργών ακτινοβολιών να προκαλούν ιονισμό (δηλ. να αναγκάζουν κάποια ηλεκτρόνια των ατόμων να φεύγουν απ' το άτομο). Αυτό γίνεται μέσα στις συσκευές Geiger-Müller. Μια συσκευή Geiger-Müller αποτελείται από ένα κλειστό μεταλλικό σωλήνα που περιέχει ένα μίγμα αερίου (ευγενές αέριο π.χ. *Ar* με κάποιο αλογόνο) σε χαμηλή πίεση και ένα λεπτό συρματινο ηλεκτρόδιο (σύρμα) τοποθετημένο κατά μήκος του άξονά τους. Ανάμεσα στο

συρμάτινο ηλεκτρόδιο και στο μεταλλικό σωλήνα εφαρμόζεται μια διαφορά δυναμικού. Ο σωλήνας συνδέεται στον αρνητικό πόλο και παίζει το ρόλο καθόδου, ενώ το συρμάτινο ηλεκτρόδιο συνδέεται στο θετικό πόλο και παίζει το ρόλο ανόδου, δημιουργώντας έτσι ένα ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο σωλήνα. Οι δύο βάσεις του σωλήνα κλείνονται με μονωτικό υλικό και παίζουν το ρόλο εισόδου της ακτινοβολίας, ενώ ο ίδιος ο σωλήνας θωρακίζεται ώστε να μην μπορεί να εισέλθει μέσω αυτού η ακτινοβολία.

Όταν μια ραδιενεργός ακτινοβολία εισέλθει μέσα στο χώρο του σωλήνα, προκαλεί ιονισμό του ευγενούς αερίου. Το ελεύθερο ηλεκτρόνιο που προκύπτει από τον ιονισμό, λόγω του αρνητικού του φορτίου, οδηγείται στο συρμάτινο ηλεκτρόδιο που βρίσκεται σε θετικό δυναμικό και συλλέγεται ως παλμός από ένα ηλεκτρονικό μετρητή. Έτσι η ακτινοβολία ανιχνεύεται.

Η διαφορά δυναμικού ανάμεσα στο μεταλλικό σωλήνα και στο συρμάτινο ηλεκτρόδιο είναι καθοριστική στη σωστή λειτουργία του μετρητή. Αν είναι μικρή τότε το ηλεκτρικό πεδίο που θα δημιουργηθεί δε θα είναι επαρκές για να οδηγήσει τα ιονισθέντα ηλεκτρόνια στην κάθοδο και κάποια απ' αυτά θα χαθούν. Αν είναι μεγάλη μπορεί να ανιχνεύσει επιπλέον λανθασμένους παλμούς. Ανάμεσα σ' αυτά τα δύο άκρα υπάρχει μια περιοχή διαφορών δυναμικού, το κέντρο της οποίας αποτελεί την καταλληλότερη τιμή διαφοράς δυναμικού για τη σωστή λειτουργία του ανιχνευτή.

### 9.2.3 Ακτινοβολία υποδάθρου

Ο ανιχνευτής Geiger-Müller, ακόμα κι αν δεν εκτίθεται σε μια ραδιενεργό πηγή, εμφανίζεται να μετράει κάποιους παλμούς. Οι παλμοί αυτοί οφείλονται σ' αυτό που λέμε ακτινοβολία υποδάθρου. Η ακτινοβολία υποδάθρου προέρχεται από την κοσμική ακτινοβολία αλλά και από ίχνη ραδιενεργών στοιχείων που μπορεί να υπάρχουν γύρω μας. Η ακτινοβολία του υποδάθρου πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν στην πειραματική άσκηση που θα πραγματοποιήσουμε και θα πρέπει να αφαιρεθεί από τις μετρήσεις που θα πάρουμε για τη ραδιενεργό πηγή που μελετάμε. Αυτό μπορεί να πραγματοποιηθεί με συχνές μετρήσεις της ακτινοβολίας υποδάθρου κατά τη διάρκεια του πειράματος.

### 9.2.4 Απορρόφηση από υλικά - Θωράκιση

Πέρα από το καθαρά επιστημονικό ενδιαφέρον για την απορρόφηση της ραδιενέργειας από διάφορα υλικά, το ενδιαφέρον για την απορρόφηση εστιάζεται στον προσδιορισμό του πάχους των διάφορων υλικών που μπορούν να καταστούν κατάλληλα για τη θωράκιση από τις ακτινοβολίες.

Εξαιτίας της διαφορετικής τους φύσης, οι ακτινοβολίες  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  απορροφώνται από την ύλη σε διαφορετικό βαθμό. Στο συγκεκριμένο πείραμα θα μας απασχολήσει η απορρόφηση της ακτινοβολίας  $\beta$  και  $\gamma$ . Για τις ακτινοβολίες αυτές, η εξασθένησή τους ως συνάρτηση του πάχους του υλικού ακολουθεί ένα νόμο εκθετικής πτώσης και δίνεται από τη σχέση :

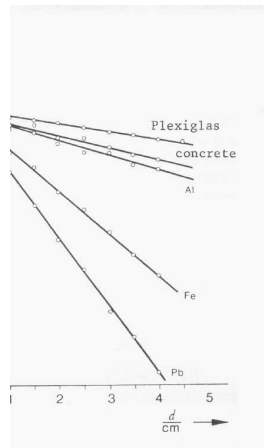
$$R(d) = R_0 e^{-\mu d} \quad (9.3)$$

όπου  $R(d)$  είναι ο αριθμός των παλμών στη μονάδα του χρόνου, που ανιχνεύει ο ανιχνευτής Geiger-Müller όταν μπροστά απ' αυτόν βρίσκεται ένα υλικό που απορροφάει την ακτινοβολία και έχει πάχος  $d$ ,  $R_0$  είναι ο αντίστοιχος αριθμός παλμών στη μονάδα του χρόνου, όταν δεν υπάρχει απορρόφηση και  $\mu$  είναι η σταθερά της απορρόφησης.

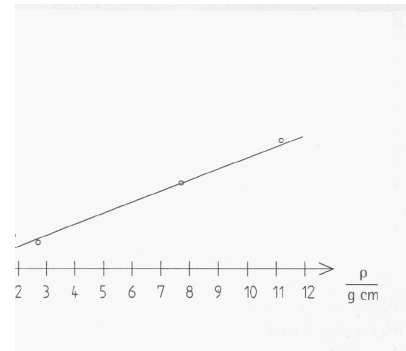
Λογαριθμίζοντας τη σχέση προκύπτει ότι (να το δείξετε)

$$\log R(d) = \log R_0 - \mu d \log e \quad (9.4)$$

Επομένως οι μετρήσεις του  $\log R(d)$  σε συνάρτηση της απόστασης  $d$  πρέπει να παρουσιάζουν μια ευθεία με κλίση  $-\log e \mu$  και σταθερά  $\log R_0$ , η οποία μπορεί να απεικονισθεί είτε σε μιλιμετρέ χαρτί, (είτε για περισσότερη ευκολία σε ημιλογαριθμικό χαρτί (δείτε τη σελ. 19 των σημειώσεων) ), με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων. Μπορεί έτσι να υπολογιστεί η σταθερά της απορρόφησης  $\mu$  για κάθε υλικό.



**Σχήμα 9.2:** Ρυθμός μετρήσεων ως συνάρτηση του πάχους  $d$  του υλικού



**Σχήμα 9.3:** Σταθερά απορρόφησης ως συνάρτηση της πυκνότητας των διαφόρων υλικών (από αριστερά προς τα δεξιά: *plexiglass*, μπετόν, *Al*, *Fe*, *Pb*)

Στην εικόνα 9.2 φαίνεται η παραπάνω γραφική παράσταση σε ημιλογαριθμικό χαρτί για διάφορα απορροφητικά υλικά, όπως *plexiglass*, μπετόν, *Al*, *Fe*, *Pb*.

Η σταθερά  $\mu$  της απορρόφησης εξαρτάται από την πυκνότητα του υλικού που απορροφάει και είναι ανάλογη αυτής. Γνωρίζοντας τις πυκνότητες των διαφόρων υλικών και έχοντας προσδιορίσει τη σταθερά της απορρόφησης με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων όπως ήδη δείξαμε, μπορούμε πάλι με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων όπως ήδη δείξαμε, μπορούμε πάλι με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων να προσδιορίσουμε τη σταθερά αναλογίας ανάμεσα στη σταθερά  $\mu$  και στην πυκνότητα των διαφόρων απορροφητικών υλικών. Στην εικόνα 9.3 φαίνεται αυτή η ευθεία καθώς και τα πειραματικά σημεία.

### 9.3 Πειραματικό μέρος

Η πειραματική συσκευή που θα χρησιμοποιήσουμε φαίνεται στο σχήμα 9.4. Αποτελείται από ένα σωλήνα Geiger-Müller ο οποίος συνδέεται με ένα καταγραφικό των παλμών που συλλέγονται. Το καταγραφικό αυτό έχει τη δυνατότητα να μετράει τους παλμούς που έρχονται από το σωλήνα Geiger-Müller σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα τα οποία μπορούν να προεπιλεγθούν. Τα προεπιλεγμένα αυτά χρονικά διαστήματα είναι 1, 10, 60, και 100sec. Αν χρησιμοποιήσουμε αυτές τις επιλογές στο πείραμά μας, μπορούμε, μετά από κάθε μέτρηση, πατώντας reset και start να επαναλάβουμε τη μέτρηση για ένα άλλο ίσο χρονικό διάστημα. Υπάρχει επίσης η επιλογή  $\infty$  κατά την

οποία ο μετρητής μετράει όσους παλμούς έρχονται μέχρι εμείς να επιλέξουμε, πατώντας το stop να τον σταματήσουμε να μετράει. Για να επαναλάβουμε μια άλλη μέτρηση θα πρέπει να πατήσουμε ξανά reset και start. Μια άλλη επιλογή που υπάρχει είναι να μετρήσουμε το ρυθμό των παλμών ανά 10sec. Στο πέρας κάθε 10sec η ένδειξη του μετρητή αναφέρεται στον αριθμό των παλμών που ανιχνεύθηκαν στη διάρκεια αυτών των 10sec.



**Σχήμα 9.4:** Η πειραματική διάταξη

Στο πείραμα που θα εκτελέσουμε θα μετρήσουμε το ρυθμό των διασπάσεων των ραδιενεργών πηγών  $^{60}\text{Co}$  και  $^{90}\text{Sr}$ . Επειδή το φαινόμενο είναι τυχαίο θα χρησιμοποιήσουμε τη στατιστική ανάλυση των μετρήσεών μας. Θα τοποθετήσουμε το ραδιενεργό δείγμα ακριβώς απέναντι από το σωλήνα Geiger-Müller σε μια συγκεκριμένη απόσταση μερικών cm και θα αρχίσουμε να παίρνουμε μετρήσεις.

Το πρώτο που μας ενδιαφέρει είναι να δείξουμε ότι οι διασπάσεις συμβαίνουν με τυχαίο τρόπο και έχουν μια σταθερή πιθανότητα διάσπασης που εξαρτάται από τον κάθε διαφορετικό πυρήνα. Υπ' αυτή την προϋπόθεση, η κατανομή που θα πρέπει να ακολουθούν οι ραδιενεργές διασπάσεις πρέπει να είναι μια κατανομή *Poisson* η οποία για άπειρο αριθμό μετρήσεων προσεγγίζει την κατανομή *Gauss*. Θα μετρήσουμε λοιπόν πόσες φορές θα εμφανιστεί ένας συγκεκριμένος αριθμός διασπάσεων στη διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος (π.χ. 10sec). Επαναλάβετε τη μέτρηση 100 φορές. Αν  $N_{max}$  είναι ο μέγιστος αριθμός διασπάσεων που βρήκατε, καταγράψτε το πλήθος των μετρήσεων με διασπάσεις από 0 ως  $N_{max}/10$ , από  $N_{max}/10$  ως  $2N_{max}/10$ ,

από  $2N_{max}/10$  ως  $3N_{max}/10$ , ..., από  $9N_{max}/10$  ως  $N_{max}$ . Κάντε το ιστόγραμμα του πλήθους των μετρήσεων (διασπάσεων) που βρήκατε και δείτε αν προσεγγίζει την κατανομή *Poisson*.

Το δεύτερο που μας ενδιαφέρει να βρούμε είναι το πλήθος των ραδιενεργών πυρήνων που υπάρχουν στο δείγμα. Αν υποθέσουμε ότι το δείγμα εκπέμπει με τον ίδιο τρόπο προς όλες τις κατευθύνσεις (ομογενώς), τότε οι διασπάσεις που ανιχνεύονται από τον ανιχνευτή Geiger-Müller είναι ανάλογες με τη στερεά γωνία που αντιστοιχεί στην επιφάνεια της εισόδου του ανιχνευτή. Αν η είσοδος του ανιχνευτή βρίσκεται σε απόσταση  $R$  από το δείγμα και η ακτίνα του κυλίνδρου του ανιχνευτή είναι  $r$ , τότε αν  $I$  είναι ο ρυθμός διάσπασης των πυρήνων του δείγματος που μετράει ο ανιχνευτής σ' αυτή την απόσταση, ο συνολικός αριθμός πυρήνων του δείγματος θα είναι:

$$N = \frac{I}{\lambda} \times \frac{4\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{4I}{\lambda} \times \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (9.5)$$

Το  $\lambda$  είναι χαρακτηριστικό για κάθε διαφορετικό είδος πυρήνα και μπορεί να βρεθεί από πίνακες.

Το τρίτο που μας ενδιαφέρει να βρούμε είναι η σταθερά απορρόφησης κάθε υλικού καθώς και η επαλήθευση του νόμου της απορρόφησης όπως έχει ήδη περιγραφεί στην παράγραφο της θεωρίας. Για διαφορετικά υλικά διαφορετικού πάχους, που παρεμβάλουμε ανάμεσα στον ανιχνευτή Geiger-Müller και στο ραδιενεργό υλικό, μετράμε το ρυθμό των διασπάσεων που συλλαμβάνει ο ανιχνευτής. Με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων όπως έχει ήδη περιγραφεί, προσδιορίζουμε το συντελεστή  $\mu$  για κάθε υλικό. Πόσο πρέπει να είναι το πάχος κάθε υλικού για να θωρακιστεί μια ραδιενεργός ουσία, έτσι ώστε η ραδιενέργεια που θα φτάνει σε μας να είναι στα επίπεδα της ακτινοβολίας υποβάθρου που έχετε μετρήσει;

Τέλος από τα αποτελέσματα που έχετε ήδη βρει για το  $\mu$  κάθε υλικού, δείξτε ότι είναι ανάλογο της πυκνότητας του κάθε υλικού. Οι πυκνότητες των διάφορων υλικών μπορούν να βρεθούν σε πίνακες.

## Παράρτημα Α΄

# Παραδείγματα

### Α΄.1 Στατιστική μελέτη μιας σειράς μετρήσεων

Ας υποθέσουμε ότι στο πείραμα για τον προσδιορισμό του συντελεστή τριβής ανάμεσα σε δύο επιφάνειες, πήραμε την ακόλουθη σειρά μετρήσεων για τη γωνία  $\phi$ , για την οποία το σώμα που βρισκόταν πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο περνούσε από την ακινησία στην κίνηση. Το σφάλμα του μοιρογνωμονίου είναι  $\delta\phi = \pm 1^\circ$ .

α/α μέτρησης	1η	2η	3η	4η	5η	6η	7η	8η	9η	10η
μέτρηση ( $^\circ$ )	26	19	18	17	21	20	20	26	19	21

Παρατηρούμε ότι όλες οι μετρήσεις μας έχουν ακρίβεια δύο σημαντικών ψηφίων. Στις πράξεις που θα κάνουμε στη συνέχεια θα προκύψουν περισσότερα από δύο σημαντικά ψηφία. Θα τα κρατήσουμε όλα αυτά τα ψηφία (κι ας μην είναι σημαντικά) και τη στρογγυλοποίηση που θα μας δώσει το σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων (δηλ. 2) θα την κάνουμε στο τελικό αποτέλεσμα που μας ενδιαφέρει (δηλ. στο συντελεστή τριβής).

Κατ' αρχήν θα βρούμε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση αυτών των μετρήσεων, με σκοπό να βρούμε (εφαρμόζοντας το κριτήριο Chauvenet) αν κάποια (ή κάποιες) τιμές απορρίπτονται, ως ακραίες μετρήσεις που έχουν μικρή πιθανότητα εμφάνισης και κατά συνέπεια δε θα έπρεπε να κάνουν την εμφάνισή τους, για το συγκεκριμένο αριθμό μετρήσεων (10) που κάναμε.

Η μέση τιμή αυτών των μετρήσεων για τη γωνία  $\phi$  είναι:

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i = \frac{26 + 19 + 18 + 17 + 21 + 20 + 20 + 26 + 19 + 21}{10} = 20.7^\circ$$

Η τυπική απόκλιση  $\sigma$  δίνεται από τη σχέση  $\sigma = \sqrt{\langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2}$ . Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τον ορισμό της, σύμφωνα με τον οποίο  $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\phi_i - \langle \phi \rangle)^2}$ . Όμως ο υπολογισμός αυτός είναι χρονοβόρος και κοπιαστικός γιατί απαιτεί περισσότερες πράξεις από ότι να



υπολογίσουμε το  $\langle \phi^2 \rangle = (\sum_{i=1}^N \phi_i^2)/N$ . Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \phi^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 \\ &= \frac{26^2 + 19^2 + 18^2 + 17^2 + 21^2 + 20^2 + 20^2 + 26^2 + 19^2 + 21^2}{10} \\ &= \frac{676 + 361 + 324 + 289 + 441 + 400 + 676 + 361 + 441}{10} = 436.9 \end{aligned}$$

Επομένως

$$\sigma = \sqrt{\langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2} = \sqrt{436.9 - 20.7^2} = \sqrt{436.9 - 428.49} = \sqrt{8.41} = 2.9$$

Αφού έχουμε βρεί τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση θα εφαρμόσουμε το κριτήριο Chauvenet για να δούμε αν απορρίπτεται κάποια τιμή. Κοιτάζοντας τον πίνακα των σημειώσεων, βλέπουμε ότι ο αριθμός  $\beta$  με τον οποίο πρέπει να γίνουν οι συγκρίσεις των  $\beta_i = |\phi_i - \langle \phi \rangle|/\sigma$ , για 10 μετρήσεις, έχει την τιμή  $\beta = 1.644$ . Προφανώς μπορούμε να βρούμε όλα τα  $\beta_i$  για όλες τις τιμές των μετρήσεών μας  $\phi_i$  και μετά να τις συγκρίνουμε με το  $\beta = 1.644$ . Αυτό όμως θα ήταν χρονοβόρο και ανώφελο, αφού μόνο ακραίες τιμές μπορεί να απορριφθούν και επομένως μόνο γι αυτές τις τιμές έχει σημασία ο υπολογισμός των  $\beta_i$ . Φυσικά όποιος θέλει μπορεί να υπολογίσει όλα τα  $\beta_i$ , να τα συγκρίνει με την τιμή  $\beta = 1.644$  (εφ' όσον οι μετρήσεις είναι 10) και από τη σύγκριση να βρει ποιές τιμές πρέπει να απορριφθούν. Παρακάτω θα το κάνουμε μόνο για τις ακραίες τιμές.

Η μεγαλύτερη ακραία τιμή των μετρήσεών μας είναι  $26^\circ$ . Για την τιμή αυτή

$$\beta_i = \frac{|\phi_i - \langle \phi \rangle|}{\sigma} = \frac{|26 - 20.7|}{2.9} = 1.827 > 1.644$$

Επομένως η τιμή αυτή απορρίπτεται. Όπως βλέπουμε στον πίνακα των μετρήσεών μας, υπάρχουν δύο μετρήσεις με την τιμή  $26^\circ$ . Κατά συνέπεια και οι δύο πρέπει να απορριφθούν.

Συνεχίζουμε με την αμέσως μικρότερη ακραία μέτρηση που είναι  $21^\circ$ . Για την τιμή αυτή

$$\beta_i = \frac{|\phi_i - \langle \phi \rangle|}{\sigma} = \frac{|21 - 20.7|}{2.9} = 0.1034 < 1.644$$

Επομένως η μέτρηση αυτή δεν απορρίπτεται και κατά συνέπεια δεν απορρίπτονται ούτε οι αμέσως μικρότερες απ' αυτή.

Θα πρέπει τώρα να ελέγξουμε αν απορρίπτεται η μέτρηση με την ελάχιστη τιμή (δηλ. η  $17^\circ$ ). Για τη μέτρηση αυτή

$$\beta_i = \frac{|\phi_i - \langle \phi \rangle|}{\sigma} = \frac{|17 - 20.7|}{2.9} = 1.2758 < 1.644$$

επομένως ούτε αυτή η μέτρηση απορρίπτεται και κατά συνέπεια ούτε οι αμέσως μεγαλύτερες της που είναι λιγότερο ακραίες απ' αυτή.

Κατά συνέπεια απορρίπτονται μόνο οι δύο μετρήσεις με την τιμή  $26^\circ$  και επομένως μένουν οι οκτώ υπόλοιπες μετρήσεις, για τις οποίες πρέπει να βρούμε τη μέση τιμή τους και το τυπικό σφάλμα της μέσης τους τιμής. Η μέση τους τιμή, η οποία είναι



και η πιθανότερη τιμή και αυτή θα θεωρούμε ως μέτρηση που προέρχεται από τη στατιστική ανάλυση που μόλις κάναμε, θα έχει την τιμή

$$\langle \phi \rangle = \frac{19 + 18 + 17 + 21 + 20 + 20 + 19 + 21}{8} = 19.375^\circ$$

Για να βρούμε το τυπικό σφάλμα  $\sigma_M$  της μέσης τιμής, χρειαζόμαστε την τυπική απόκλιση  $\sigma$ , αφού  $\sigma_M = \sigma/\sqrt{N-1}$ , όπου τώρα  $N = 8$ . Με τον ίδιο τρόπο που βρήκαμε την τυπική απόκλιση για τις 10 μετρήσεις νωρίτερα, θα βρούμε την τυπική απόκλιση των 8 που απομένουν μετά την απόρριψη των 2 μετρήσεων. Θα βρούμε πρώτα το  $\langle \phi^2 \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle \phi^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i^2 = \frac{19^2 + 18^2 + 17^2 + 21^2 + 20^2 + 20^2 + 19^2 + 21^2}{8} = \\ &= \frac{361 + 324 + 289 + 441 + 400 + 361 + 441}{8} = 377.125 \end{aligned}$$

Η τυπική απόκλιση  $\sigma$  θα είναι

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\langle \phi^2 \rangle - \langle \phi \rangle^2} = \sqrt{377.125 - 19.375^2} = \sqrt{377.125 - 375.39062} \\ &= \sqrt{1.734375} = 1.3169 \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής θα είναι

$$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N-1}} = \frac{1.3169}{\sqrt{8-1}} = \frac{1.3169}{\sqrt{7}} = 0.4977^\circ$$

Με στρογγυλοποίηση σε ένα σημαντικό ψηφίο, το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής παίρνει την τιμή  $\sigma_M = 0.5^\circ$ . Το σφάλμα στη μέτρηση της γωνίας είναι το μέγιστο ανάμεσα στο τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής και του σφάλματος του οργάνου (δηλ. του μοιρογνωμονίου). Το σφάλμα του μοιρογνωμονίου είναι  $1^\circ$  που είναι μεγαλύτερο από το  $\sigma_M = 0.5^\circ$ . Επομένως το σφάλμα που κάνουμε στη μέτρηση της γωνίας είναι  $\delta\phi = \pm 1^\circ$ .

Αφού γνωρίζουμε τώρα την πιθανότερη τιμή της γωνίας και το σφάλμα της μέτρησής της, μπορούμε να μετρήσουμε τώρα (με υπολογισμό, δηλ. ως έμμεση μέτρηση) την τιμή του συντελεστή τριβής ολίσθησης, από τη σχέση

$$\mu = \tan(\langle \phi \rangle) \pm \delta\mu \quad \text{όπου} \quad \delta\mu = \frac{1}{\cos^2(\langle \phi \rangle)} \frac{\pi}{180^\circ} \delta\phi$$

όπου το  $\delta\phi$  είναι εκφρασμένο σε μοίρες. Κάνοντας τις πράξεις με ένα επιστημονικό υπολογιστή τσέπης βρίσκουμε

$$\mu = \tan(\langle \phi \rangle) = \tan(19.375^\circ) = 0.351665\dots$$

και

$$\delta\mu = \frac{1}{\cos^2(\langle \phi \rangle)} \frac{\pi}{180^\circ} \delta\phi = \frac{1}{\cos^2(19.375^\circ)} \times \frac{3.14159\dots}{180^\circ} \times 1 = 0.01961\dots$$

Στρογγυλοποιώντας το συντελεστή τριβής ώστε να εκφράζεται με δύο σηματικά ψηφία (όσα και τα ψηφία της γωνίας που μετρήσαμε) και το σφάλμα ώστε να εκφράζεται με ένα σημαντικό ψηφίο, παίρνουμε

$$\mu = 0.35 \pm 0.02$$

## Α.2 Προσαρμογή με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

Ας υποθέσουμε ότι σ' ένα πείραμα ελεύθερης πτώσης, μετράμε την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου πτώσης για διάφορες χρονικές στιγμές και βρίσκουμε τις τιμές που ακολουθούν στον παρακάτω πίνακα.

$t(sec)$	$U(m/sec)$
0	5.1
1	12.6
2	26.3
3	33.4
4	47.2
5	55.4

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα στην ελεύθερη πτώση, ως συνάρτηση του χρόνου, δίνεται από τη σχέση

$$U(t) = U_0 + gt$$

που είναι μια συνάρτηση ευθείας με κλίση  $g$  και σταθερά  $U_0$ . Μπορούμε επομένως με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων να προσδιορίσουμε αυτή την ευθεία (δηλ. την κλίση της και τη σταθερά).

Γνωρίζουμε ότι η σχέση που δίνει την κλίση της ευθείας δίνεται από

$$g = \frac{\langle Ut \rangle - \langle U \rangle \langle t \rangle}{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2}$$

και η σταθερά από

$$U_0 = \langle U \rangle - g \langle t \rangle$$

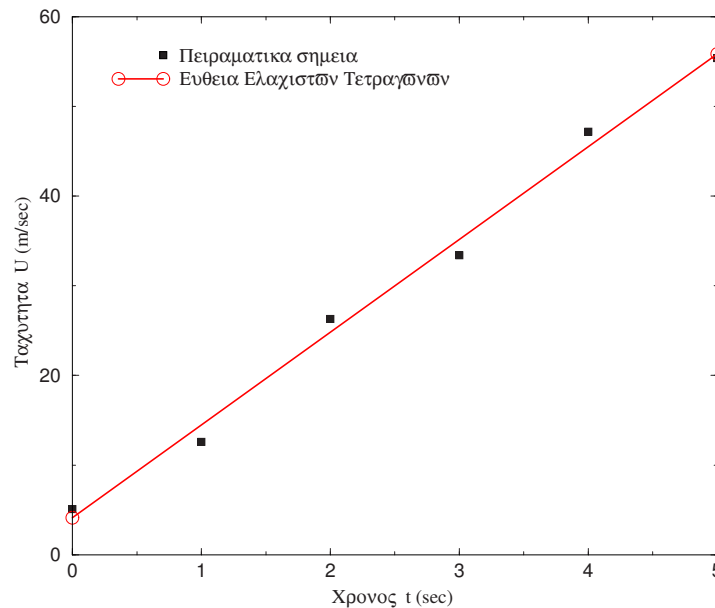
Θα πρέπει λοιπόν να βρούμε τις ποσότητες  $\langle t \rangle$ ,  $\langle U \rangle$ ,  $\langle t^2 \rangle$  και  $\langle Ut \rangle$ .

$$\langle t \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5}{6} = 2.5sec$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i = \frac{5.1 + 12.6 + 26.3 + 33.4 + 47.2 + 55.4}{6} = 30m/sec$$

$$\begin{aligned} \langle t^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i^2 = \frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{6} \\ &= \frac{0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25}{6} = 9.1666666sec^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle Ut \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i t_i = \frac{5.1 \times 0 + 12.6 \times 1 + 26.3 \times 2 + 33.4 \times 3 + 47.2 \times 4 + 55.4 \times 5}{6} \\ &= \frac{0 + 12.6 + 52.6 + 100.2 + 188.8 + 277}{6} = 105.2 \frac{m}{sec} = 105.2m \end{aligned}$$



**Σχήμα Α'.1:** Προσαρμογή ευθείας σε πειραματικά σημεία με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων

Επομένως

$$g = \frac{\langle Ut \rangle - \langle U \rangle \langle t \rangle}{\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2} = \frac{105.2m - 30m/sec \cdot 2.5sec}{9.166666sec^2 - (2.5sec)^2}$$

$$= \frac{105.2 - 75}{9.166666 - 6.25} m/sec^2 = \frac{30.2}{2.9166666} m/sec^2 = 10.354286m/sec^2$$

και

$$U_0 = \langle U \rangle - g \langle t \rangle = 30m/sec - 10.354286m/sec^2 \times 2.5sec = 4.114285m/sec$$

Η ευθεία που προσαρμόζεται καλύτερα στα πειραματικά μας δεδομένα είναι η

$$U(t) = 4.114285 + 10.354286t \quad (Α'.1)$$

όπου ο χρόνος  $t$  μετριέται σε  $sec$  και η ταχύτητα  $U$  σε  $m/sec$ . Για να χαράξουμε αυτή την ευθεία χρειάζεται να βρούμε δυο σημεία της και να τα ενώσουμε. Αν πάρουμε τα πιο απομακρυσμένα σημεία της για τα οποία έχουμε μετρήσεις βρίσκουμε για  $t = 0$   $U = 4.114285m/sec$  και για  $t = 5sec$   $U = 55.885715m/sec$

Βρήκαμε έτσι την επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$  και την αρχική ταχύτητα  $U_0$  και το μόνο που μένει να προσέξουμε είναι τα σημαντικά ψηφία με τα οποία πρέπει να εκφράσουμε αυτές τις ποσότητες.

Στη γραφική παράσταση φαίνονται τα πειραματικά σημεία και η ευθεία που προσαρμόσαμε σ' αυτά, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.



## Παράρτημα Β'

### Πίνακες

#### Β'.1 Προθέματα για τις δυνάμεις του 10

Πρόθεμα	Όνομα	Αξία
<i>d</i>	<i>deci</i>	$10^{-1}$
<i>c</i>	<i>centi</i>	$10^{-2}$
<i>m</i>	<i>mili</i>	$10^{-3}$
$\mu$	<i>micro</i>	$10^{-6}$
<i>n</i>	<i>nano</i>	$10^{-9}$
<i>p</i>	<i>pico</i>	$10^{-12}$
<i>f</i>	<i>femto</i>	$10^{-15}$
<i>a</i>	<i>atto</i>	$10^{-18}$
<i>k</i>	<i>kilo</i>	$10^3$
<i>M</i>	<i>mega</i>	$10^6$
<i>G</i>	<i>giga</i>	$10^9$
<i>T</i>	<i>tera</i>	$10^{12}$
<i>P</i>	<i>peta</i>	$10^{15}$
<i>E</i>	<i>exa</i>	$10^{18}$

#### Β'.2 Πυκνότητες διαφόρων ουσιών

Ουσία	Πυκνότητα $\rho(\times 10^3 \text{kgr}/\text{m}^3)$
Χρυσός	19.3
Ουράνιο	18.7
Μόλυβδος	11.3
Χαλκός	8.93
Σίδηρος	7.86
Αλουμίνιο	2.70
Μαγνήσιο	1.75
Νερό	1.00
Αέρας	0.0013

**Β'.3 Φυσικές Σταθερές**

Ταχύτητα του φωτός	$c$	$2.99792458 \times 10^8 m/sec$
Αριθμός του Avogadro	$N_A$	$6.022169 \times 10^{23}$
Γραμμομοριακός όγκος ιδανικού αερίου υπό Κ.Σ.	-	$22.4136 lit/mole$
Παγκόσμια σταθερά των αερίων	$R$	$8.31434 joule/^\circ K mole$
Φορτίο του ηλεκτρονίου	$e$	$1.6021917 \times 10^{-19} Cb$
Μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου	$m_e$	$9.109558 \times 10^{-31} kgr$
Μάζα ηρεμίας του πρωτονίου	$m_p$	$1.672614 \times 10^{-27} kgr$
Μάζα ηρεμίας του νετρονίου	$m_n$	$1.674920 \times 10^{-27} kgr$
Σταθερά του Boltzman	$k_B$	$1.380622 \times 10^{-23} joule/^\circ K$
Σταθερά του Planck	$h$	$6.626196 \times 10^{-34} joule \cdot sec$
Σταθερά του Rydberg	$R_\infty$	$1.09737312 \times 10^7 /m$
Επιτάχυνση της βαρύτητας <sup>1</sup>	$g$	$9.80665 m/sec^2$
Σταθερά της παγκόσμιας έλξης	$G$	$6.6732 \times 10^{-11} Nt \cdot m^2 /kgr^2$
Μάζα της Γης	$M_\Gamma$	$5.983 \times 10^{24} kgr$
Μέση διάμετρος της Γης		$12742 km$
Απόσταση Γης - Ήλιου		$149 \times 10^6 km$
Μάζα του Ήλιου	$M_\odot$	$1.9707 \times 10^{30} kgr$

**Β'.4 Μετατροπές μονάδων**

## **Παράρτημα Γ΄**

# **Ο Περιοδικός Πίνακας των στοιχείων**

